Sección 3.1

27.

Por hipotesis y_p satisface $y_p'' + P y_p' + q y_p = f(x)$ y por segunda hipotesis y_c satisface

$$y_c'' + P y_c' + q y_c = 0$$

entonces la tesis establece que $y(x) = y_c + y_p$ satisface $y'' + Py' + qy = f(x)$, tenemos que

$$y' = y_c' + y_p' \rightarrow y'' = y_c'' + y_p''$$

reemplazando en la ecuacion

$$(y_c'' + y_p'') + p(y_c' + y_c') + q(y_c + y_p) = f(x)$$

$$y_c'' + y_p'' + p y_c' + p y_p' + q y_c + q y_p =$$

$$(y_c'' + p y_c' + q y_c) + (y_p'' + p y_p' + q y_p) =$$

Usamamos la hipotesis $0 + f(x) =$

$$f(x) = f(x)$$

32.

a. el wronskiano de las dos soluciones

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

$$\frac{dw}{dx} = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - (y_1'' y_2 + y_1' y_2')$$

$$\frac{dw}{dx} = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

asi que $A(x)\frac{dw}{dx} = A(y_1 y_2'' - y_2'' y_2) = A y_1 y_2'' - A y_1'' y_2 = y_1 A y_2'' - A y_1'' y_2$ 1

ahora bien, ya que y_1 y y_2 satisfacen la ecuacion diferencial

$$A(x) y'' + B(x) y' + P(x) y = 0$$

$\rightarrow A(x) y'' = -B(x) y' - P(x) y$; con lo cual $A(x) y_1'' = -B(x) y_1' + P(x) y_1$

$$A(x) y_2'' = -B(x) y_2' - P(x) y_2$$

reemplazando en la expresión:

$$A(x)\frac{dw}{dx} = y_1(-B(x)y_2' - P(x)y_2) - (-B(x)y_1' - P(x)y_1)y_2$$

$$A(x)\frac{dw}{dx} = -B(x)y_1 y_2' - \cancel{P(x)y_1 y_2} + B(x)y_1' y_2 + \cancel{P(x)y_1 y_2}$$

$$A(x)\frac{dw}{dx} = B(x)(-y_1 y_2' + y_1' y_2)$$

$$A(x)\frac{dw}{dx} = -B(x)(y_1 y_2' - y_1' y_2)$$

$$A(x)\frac{dw}{dx} = -B(x)\,w(x)$$

b. Si $A(x) \neq 0$ $\quad \frac{dw}{dx} = -\frac{B(x)}{A(x)}w(x)$

$$\int \frac{dw}{w} = \int \left(-\frac{B(x)}{A(x)}\right)dx$$

$$\ln w = -\int \frac{B(x)}{A(x)}dx$$

$$e^{\ln w} = e^{-\int \frac{B(x)}{A(x)}dx + c}$$

$$e^{\ln w} = e^{-\int \frac{B(x)}{A(x)}dx + c} = e^{-\int \frac{B(x)}{A(x)}dx}\, e^{c}$$

$$w(x) = K e^{-\int \frac{B(x)}{A(x)}dx}$$

5.

a. Sea $v = \ln x$ entonces por regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{1}{x}$$

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \quad A$$

Derivo la expresion Ⓐ respecto a x $\rightarrow \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dv}\right)$

$$1\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dv}\left(\frac{dy}{dv}\right)\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dv^2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dv^2}$$

$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dv^2} - x\frac{dy}{dx}$ pero por Ⓐ

$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv}$ Ⓑ

reemplazando las expresiones Ⓐ y Ⓑ en la ecuación de euler $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ obtenemos la ecuación de coeficientes constantes

$$a\left(\frac{d^2y}{dv^2} - \frac{dy}{dv}\right) + b\left(\frac{dy}{dv}\right) + cy = 0$$

$$a\frac{d^2y}{dv^2} - a\frac{dy}{dv} + b\frac{dy}{dv} + cy = 0$$

$$a\frac{d^2y}{dv^2} + (b-a)\frac{dy}{dv} + cy = 0$$

b. Suponiendo que la ecuación auxiliar que corresponde $ar^2 + (b-a)r + c = 0$ tiene raices reales diferentes por lo cual la solucia sería

$$y(v) = c_1e^{-4v} + c_2e^{3v}$$

$$\rightarrow y(x) = c_1e^{-4\ln x} + c_2e^{3\ln x}$$

$$= c_1e^{\ln x^{-4}} + c_2e^{\ln x^3}$$

$$= c_1x^{-4} + c_2x^3$$

55. $x^2y'' + xy' = 0$

Para este caso usamos el resultado obtenido en el ejercicio ⑤1 por medio de la sustitucion $v = \ln x$, tendriamos la ecuación de euler $x^2y'' + xy' = 0$; $a=1$, $b=1$, $c=0$

se convierte en $\frac{d^2y}{dv^2} = 0$, cuya ecuacion $r^2 = 0$

tiene raices $r_1 = r_2 = 0 \rightarrow$ $y(x) = c_1 e^{0 \cdot v} + c_2 v e^{0v}$

$$y(v) = c_1 + c_2 v$$

$$y(x) = c_1 + c_2 \ln x$$

53. $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$

Tenemos que $a=1$, $b=2$, $c=-12$

$$\frac{d^2y}{dv} + (2-1)\frac{dy}{dv} - 12y = 0$$

$$y''_v + y'_v - 12y = 0$$

$$r^2 - r - 12 = 0$$

$(r+4)(r-3) = 0$ $r_1 = -4$ y $r_2 = 3$

$$y(v) = c_1 e^{-4v} + c_2 e^{3v}$$

$$y(x) = c_1 e^{-4\ln x} + c_2 e^{3\ln x}$$

$$y(x) = c_1 x^{-4} + c_2 x^3$$