

Het begrip afgeleide

www.karelappeltans.be

April 19, 2021

1 herhaling rico van een rechte

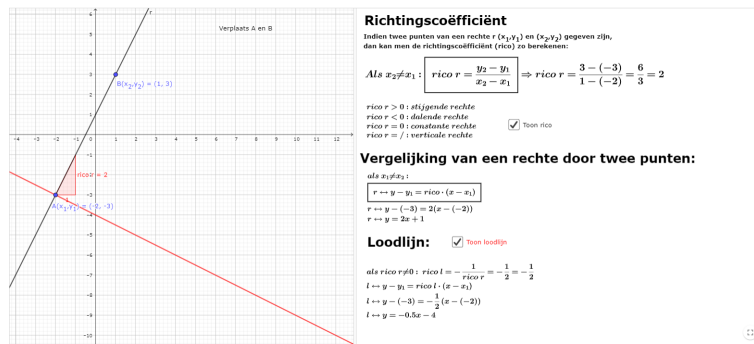


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/V6dh2XPP>

2 gemiddelde verandering over een interval

2.1 begripsvorming

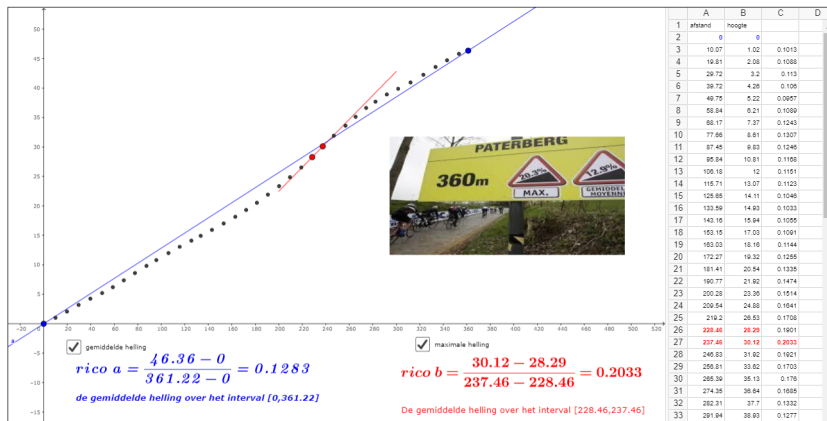


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/Bt3aCMHz>

2.2 Definitie

De gemiddelde verandering van een continue functie f over het interval $[a, b]$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

M.a.w. dit is de rico van de rechte door de punten $P(a, f(a))$ en $Q(b, f(b))$

3 ogenblikkelijke verandering in een punt

3.1 Definitie afgeleide in een punt

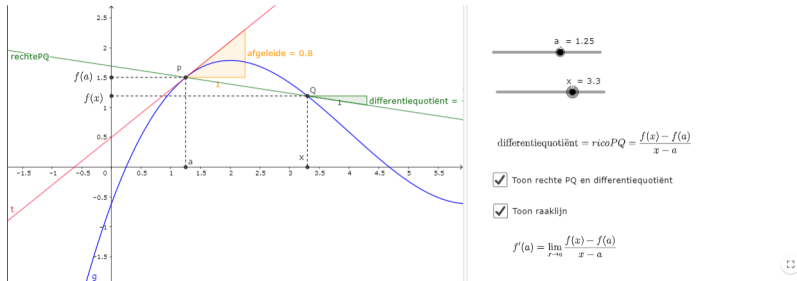


Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/NGkF3XS6>

3.2 Berekening f'(a) met behulp van definitie

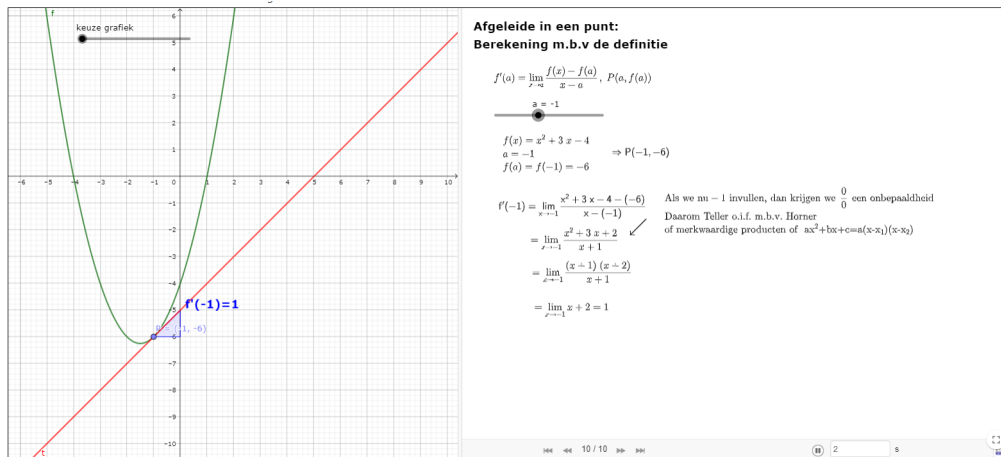


Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/NGkF3XS6>

4 Rekenregel voor $x^n, n \in \mathbb{Q}$

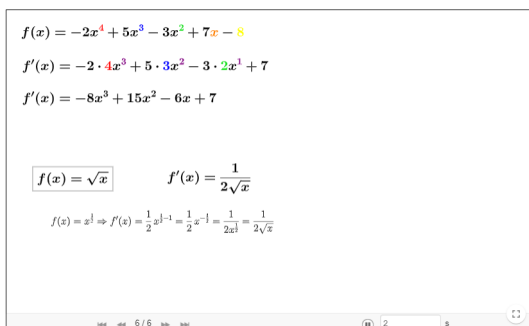


Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/zdynkwv5>

5 alternatieve notaties

Voorbeeld: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$
 Notatie 1: $f'(x) = 3x^2 + 6x$

Notatie 2: $Df(x) = D(x^3 + 3x^2 - 4) = 3x^2 + 6x$

Notatie 3: $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(x^3 + 3x^2 - 4)}{dx} = 3x^2 + 6x$

6 Vergelijking raaklijn

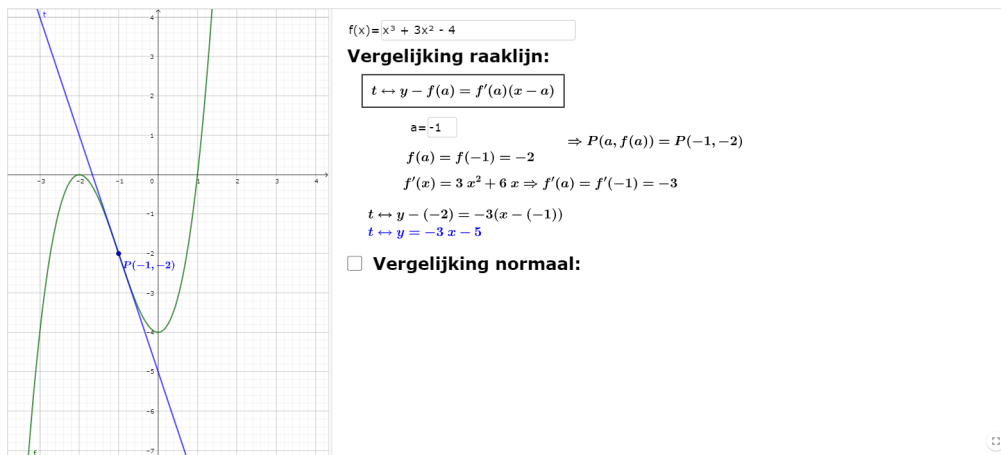


Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/EscjM2Rh>

7 lineaire benadering

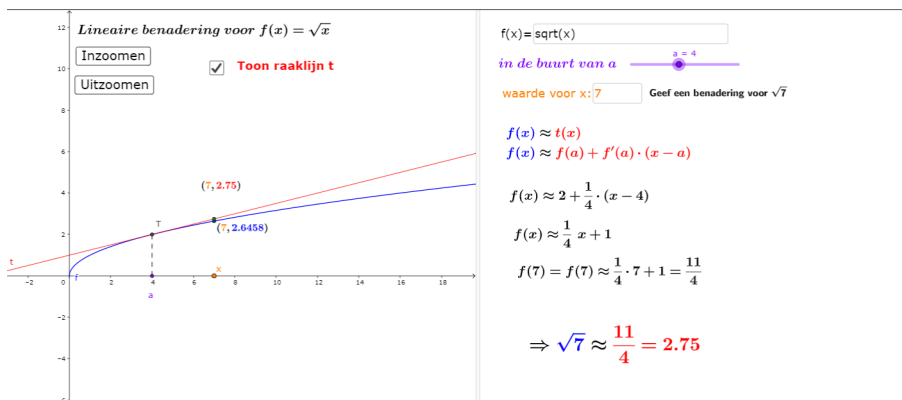


Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/NwZHM6eQ>

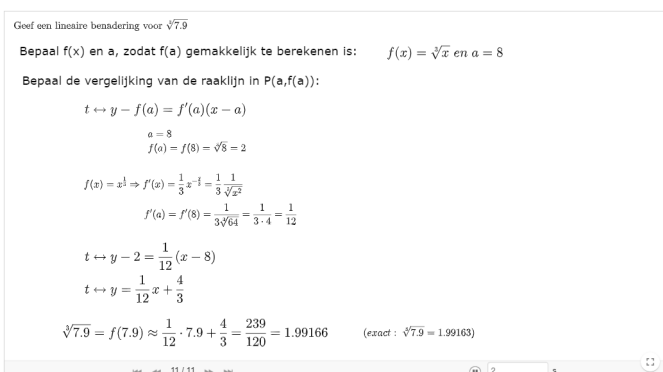


Figure 8: <https://www.geogebra.org/m/NwZHM6eQ>

8 fouten propagatie

Er wordt een fout gemeten, in zeg bijvoorbeeld de zijde van een vierkant. Op welke manier zet deze fout zich door in de berekening van de oppervlakte en hoe kunnen we afschatting bekomen voor deze foutdoorzetting?

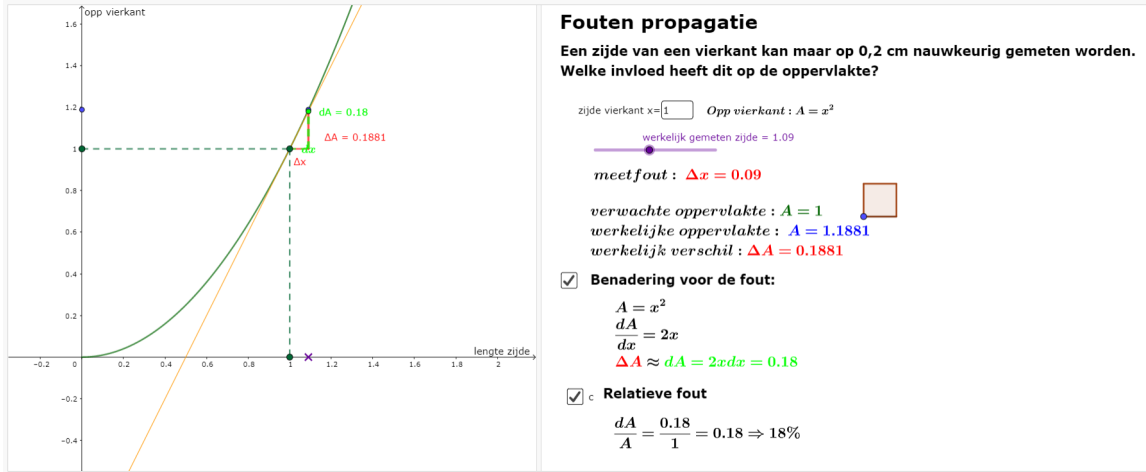


Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/NwZHM6eQ>

9 afgeleide functie of hellingsfunctie

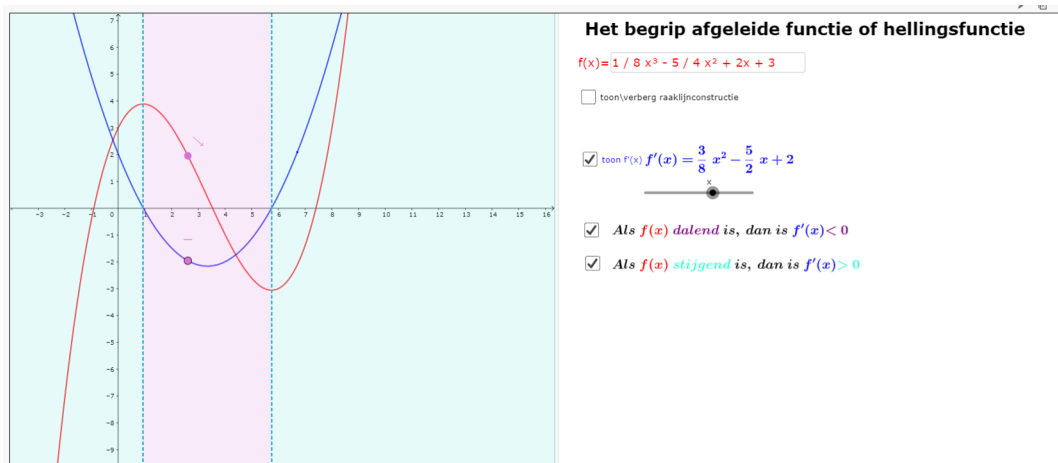


Figure 10: <https://www.geogebra.org/m/dWqwC5qd>

10 tweede afgeleide

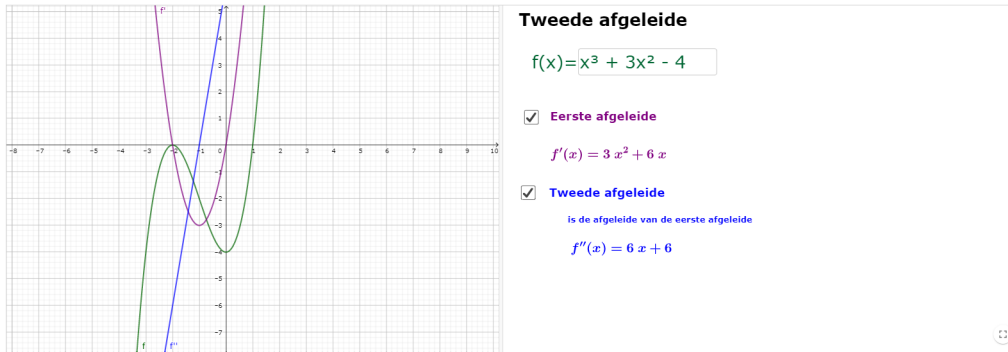


Figure 11: <https://www.geogebra.org/m/qt9vwxq>

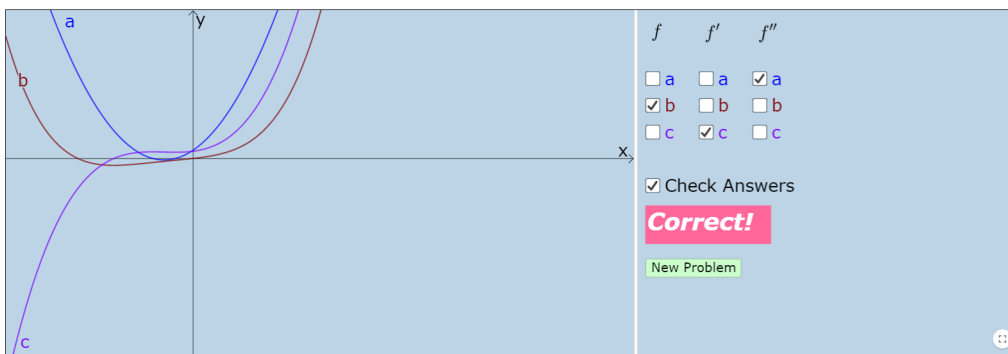


Figure 12: <https://www.geogebra.org/m/qt9vwxq>

11 toepassingen uit de fysica

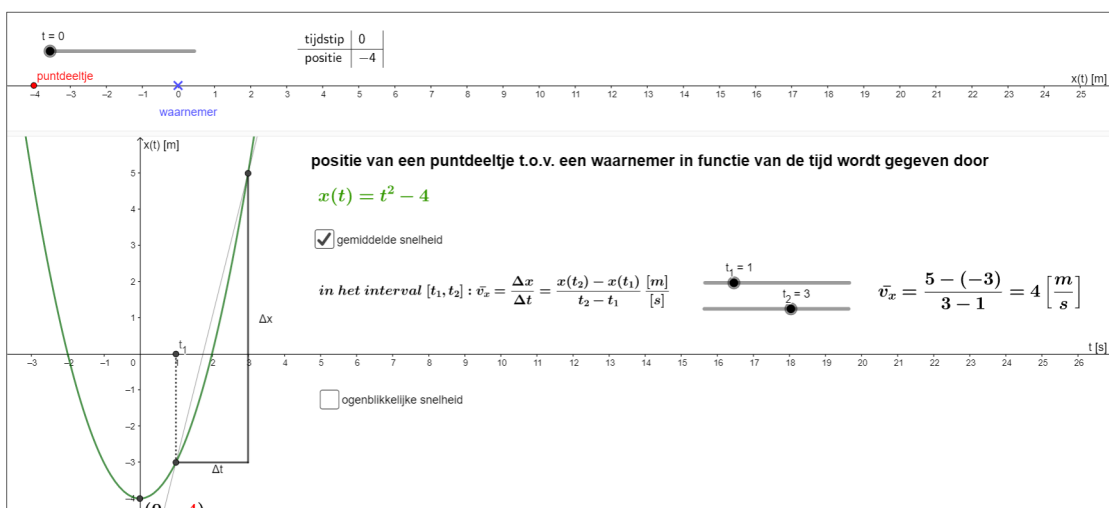


Figure 13: <https://www.geogebra.org/m/nsGgY8T3>

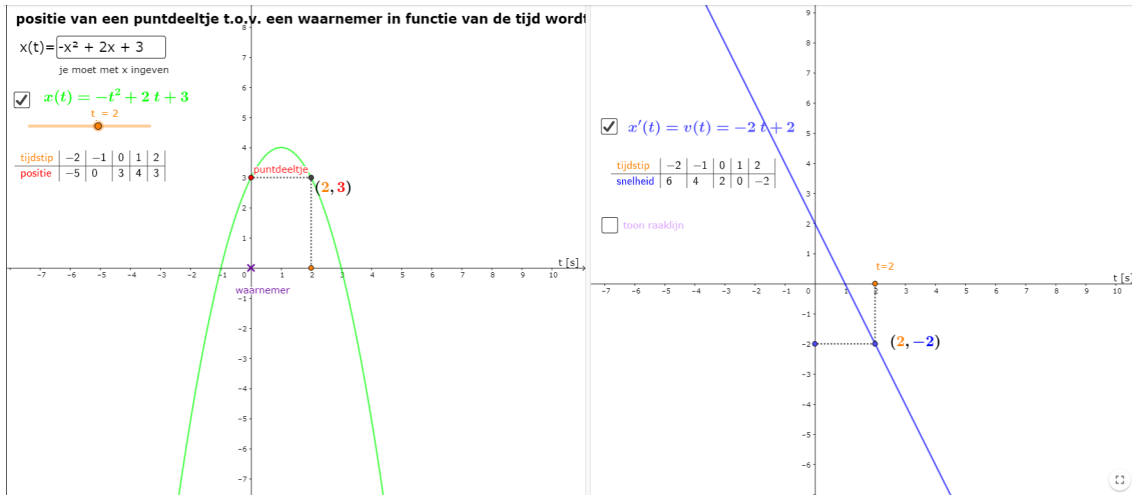


Figure 14: <https://www.geogebra.org/m/nsGgY8T3>

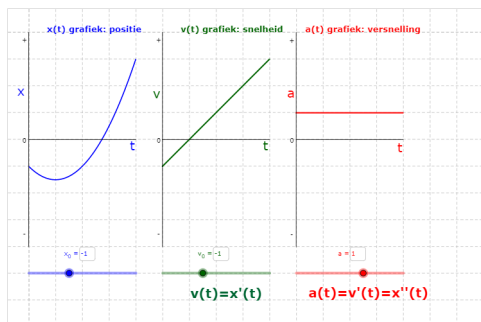


Figure 15: <https://www.geogebra.org/m/nsGgY8T3>

12 Niet alle functies zijn overal afleidbaar

12.1 verticale raaklijn

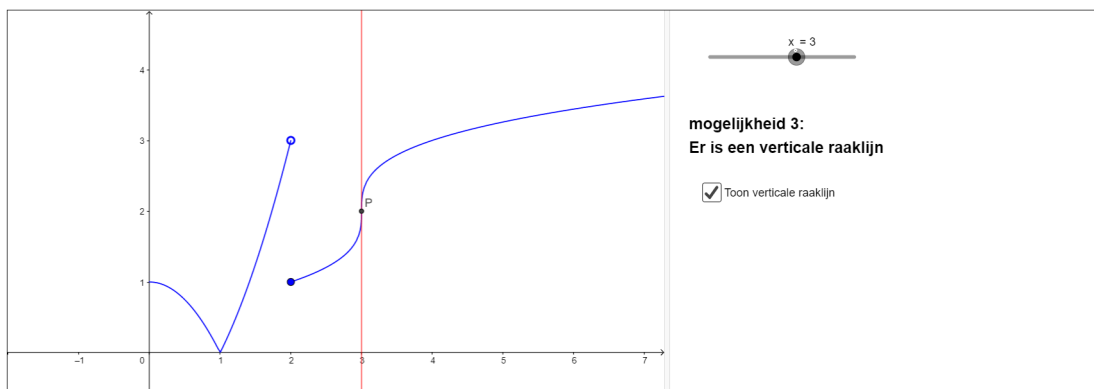


Figure 16: <https://www.geogebra.org/m/qfSuH6rn>

12.2 linkerafgeleide is verschillend van rechterafgeleide

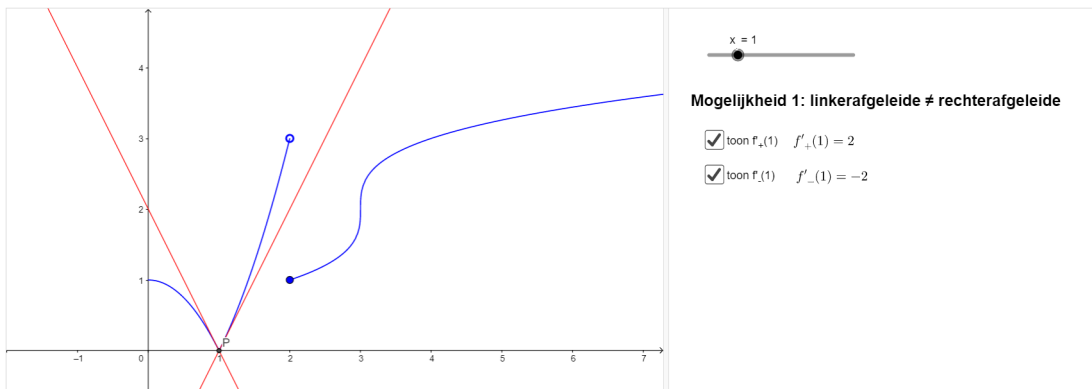


Figure 17: <https://www.geogebra.org/m/qfSuH6rn>

12.3 niet continu

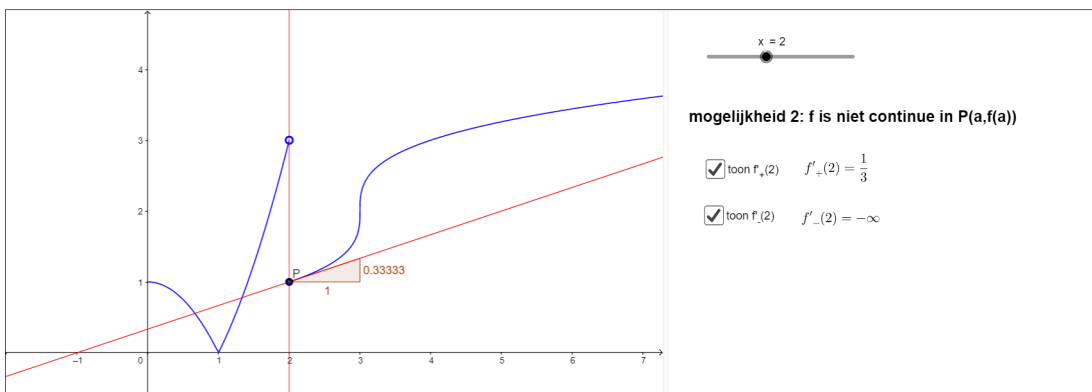


Figure 18: <https://www.geogebra.org/m/qfSuH6rn>

12.4 oefeningen

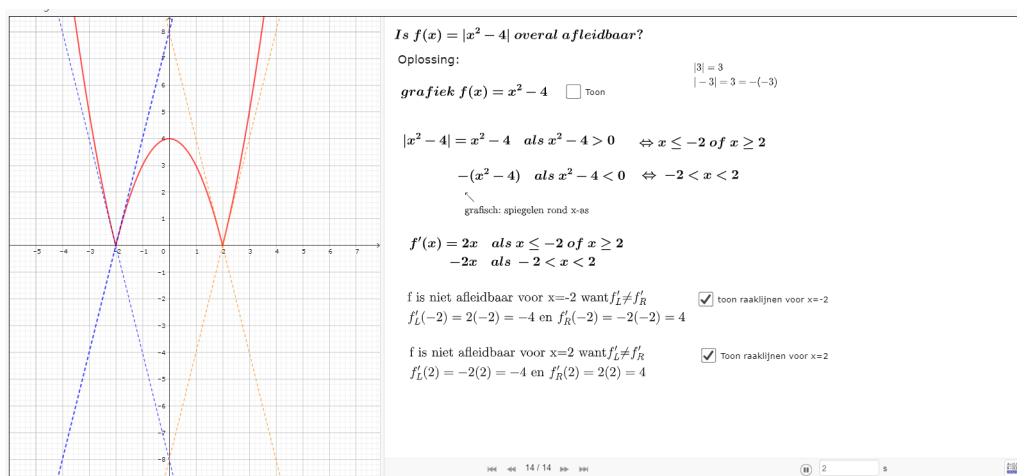


Figure 19: <https://www.geogebra.org/m/qfSuH6rn>

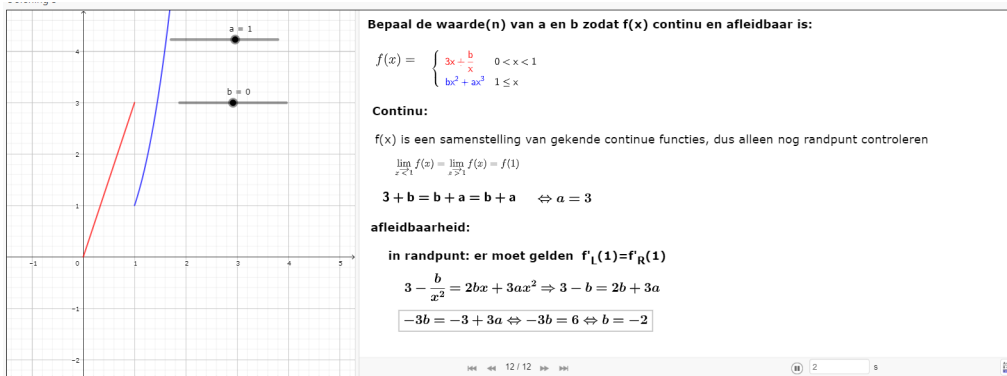


Figure 20: <https://www.geogebra.org/m/qfSuH6rn>

13 continuïteit en afgeleide

Continuïteit en afgeleide

Als f continu is in een interval I, dan is f ook afleidbaar in I
 Fout : neem bijv $f(x) = |x^2 - 1|$

Als f afleidbaar is in een interval I, dan is f ook continu in dat interval I
 juist, bewijs:

geg : $a \in I$ $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ bestaat

TD : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

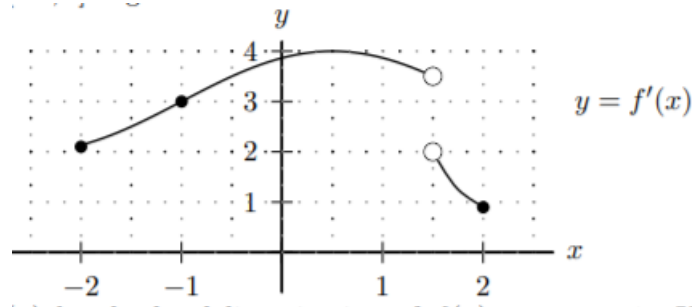
Bewijs : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) + f(a)$
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a)$
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + f(a)$
 $= f'(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + f(a)$
 $= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)$

Figure 21: <https://www.geogebra.org/m/xqp6dj2p>

14 oefeningen

- Bereken m.b.v. de definitie de afgeleide in de aangegeven punten
 - $f(x) = -x^2 + 3x - 4$, $P(1, f(1))$
 - $f(x) = \sqrt{2x - 4}$, $P(10, f(10))$
 - $f(x) = \frac{3}{x+1}$, $P(-2, f(-2))$
- Bereken de afgeleide van onderstaande functies m.b.v. de rekenregel
 - $g(x) = 10x^5 - 7x^3 + 4x^{-6}$
 - $x(t) = 4t^3 - 3t^2 + 5t - 7$
 - $f(x) = x \cdot \sqrt{x} + 4x^5 - 8x + 9$
- Bereken de vergelijking van de raaklijn in het gegeven punt
 - $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$, $a = -2$
 - $f(x) = x^3 + 2\sqrt{x}$, $a = 1$
 - $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 9$
 - $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -1$
- Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan $f(x) = x^2$ die ook door het punt $Q(3, 8)$ gaat.
- Bepaal de rico van de raaklijn aan $y = \sqrt{x}$ die de x-as snijdt in $P(-1, 0)$

6. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan $y = x\sqrt{x}$ die evenwijdig is met de rechte $y = 3x + 1$
7. Geef een benaderende lineaire benadering voor:
- $\sqrt{4.05}$
 - $\sqrt[3]{8.4}$
 - $\sqrt{16,03}$ met behulp van $f(x) = \sqrt{x+9}$
8. Gegeven is de grafiek van $f'(x)$. Gebruik deze samen met het feit dat $f(-1) = 4$ om een lineaire benadering te geven voor $f(-0.5)$

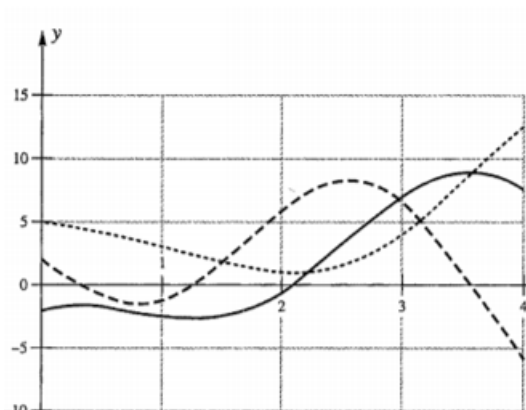


9. Geef een afschatting voor de absolute en relatieve fout van de inhoud van een kubus als een zijde 30cm gemeten wordt, met een foutenmarge van 0.1 cm.
10. Ga na voor welke x-waarden volgende functies niet afleidbaar zijn:
- $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$
 - $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$
 - $f(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$
 - $f(x) = |x^2 - x|$
11. Voor hoeveel waarden van x, met $x \in [0, 2]$ is $f(x) = |x - \frac{1}{2}| + |x - 1| + \tan(x)$ niet afleidbaar?
12. Bepaal de waarde(n) van de parameters zodat volgende functies met meervoudig voorschrift in hun domein continu en afleidbaar zijn:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - a & x < 1 \\ -x^2 + bx + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{B}{x} & 0 < x < 1 \\ Bx^2 + Ax^3 & 1 \geq x \end{cases}$$

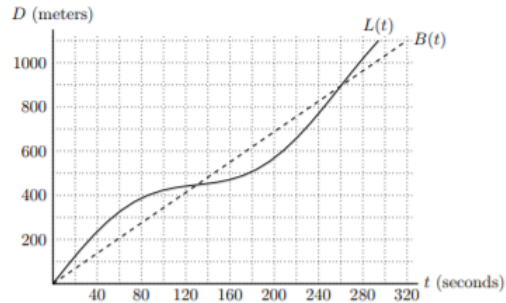
13. Bepaal in elke grafiek $f(x)$, $f'(x)$ en $f''(x)$



-
-

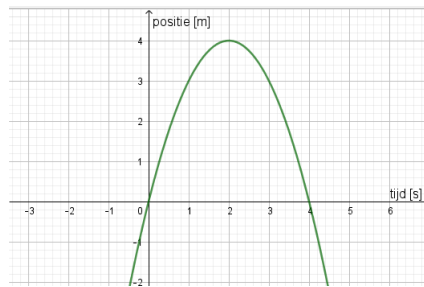
14. Beantwoord onderstaande vragen

6. [11 points] Link and Boots decided to have a race down a straight portion of Pauline Boulevard that is 1.1 kilometers long. Let $L(t)$ and $B(t)$ be Link's and Boots's respective distances from their starting point t seconds after the race began. A graph of $L(t)$ and $B(t)$ is shown below.



- a. [1 point] Who won the race? (Circle your answer.)
- Link
 Boots
- b. [2 points] Estimate the times at which Link and Boots were running at the same speed.
- c. [3 points] Estimate Link's average velocity over the first 100 seconds of the race. Include units.
- d. [3 points] Estimate Link's instantaneous velocity 40 seconds after the race began. Include units.
- e. [2 points] 160 seconds after the race began, is Link's acceleration positive, negative, or equal to zero? (Circle your answer.)
- positive
 negative
 zero

15. Gegeven is onderstaande $x(t)$ - grafiek:



De versnelling is het grootst op

- (a) $t = 2$ s
 (b) $t = 0$ s
 (c) $t = 0$ en $t = 4$ s
 (d) overall even groot
16. Gegeven $x(t) = t^2 - 3t + 4$
- (a) Bepaal de gemiddelde snelheid in het interval $[1, 3]$
 (b) Bepaal de ogenblikkelijke snelheid voor $t = 2$

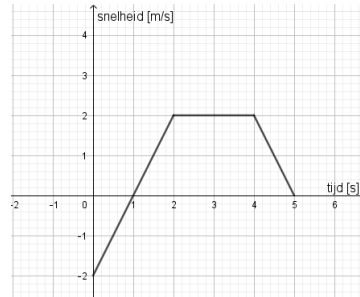
17. Gegeven $x(t) = t - t^2, 0 \leq t \leq 5$

(a) Waar bevindt zich dit puntdeeltje na 2 sec t.o.v. een waarnemer in de oorsprong?

(b) Bepaal de gemiddelde snelheid in het interval $[0, 5]$

(c) Bepaal $a(3)$. Wat wordt hiermee bedoelt?

18. Gegeven is onderstaande $v(t)$ - *grafiek* over het interval $[0, 5]$ Bepaal de $a(t)$ - *grafiek* in hetzelfde interval.



15 taken

1. definitie afgeleide
2. toepassingen op definitie