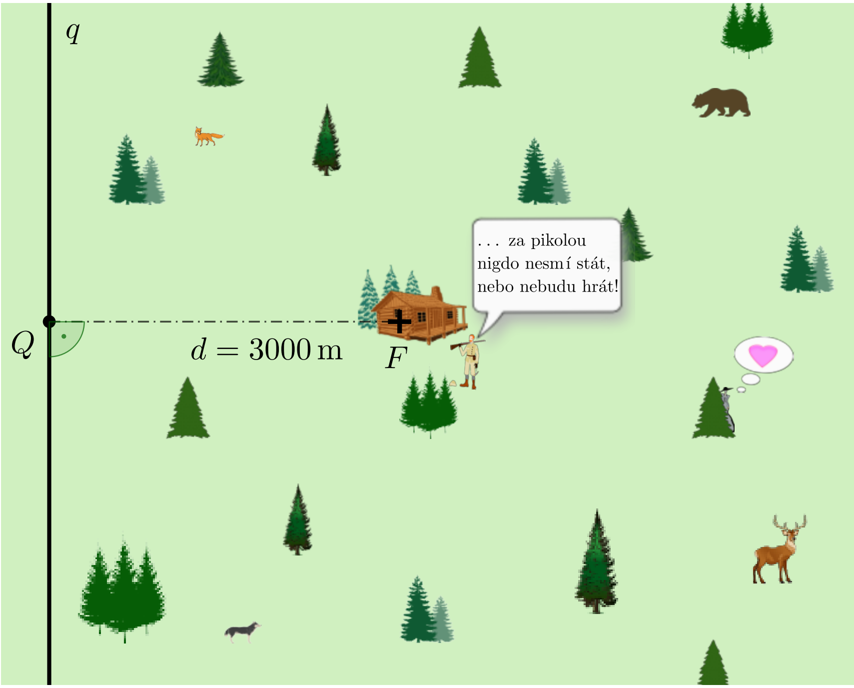
Elipsa ve stínu šumavských hvozdů

Příklad 1: Olčetrhent a Božena

Ve stínu šumavských hvozdů[a] vede přímá cesta q a ve vzdálenosti $d = 3\,\mathrm{km}$ od ní je Olčetrhentův srub F[b] (viz obr.).



Obrázek 1: „Kde je Božena?“

Olčetrhent hraje na schovku s Boženou Němcovou, která mu ve srubu na stole nechala následující vzkaz:

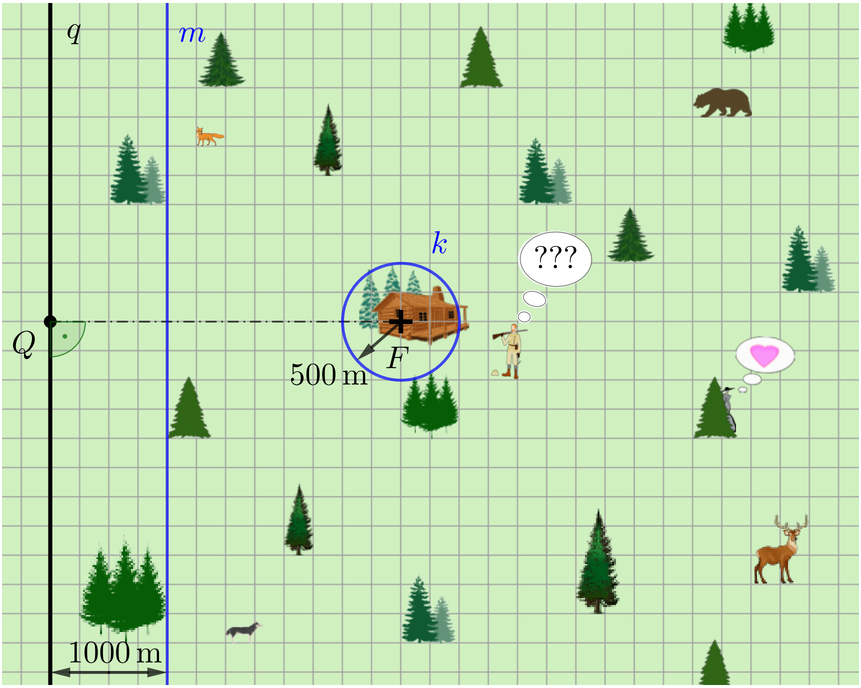
„Šárlí, najdeš mne v místě, pro které platí, že jeho vzdálenost od srubu je vzhledem ku vzdálenosti od cesty v poměru 1 : 2! “

Jak bude Olčetrhent Boženu hledat?

[a]https://www.respekt.cz/tydenik/2012/16/nadpis-clanku-30-2

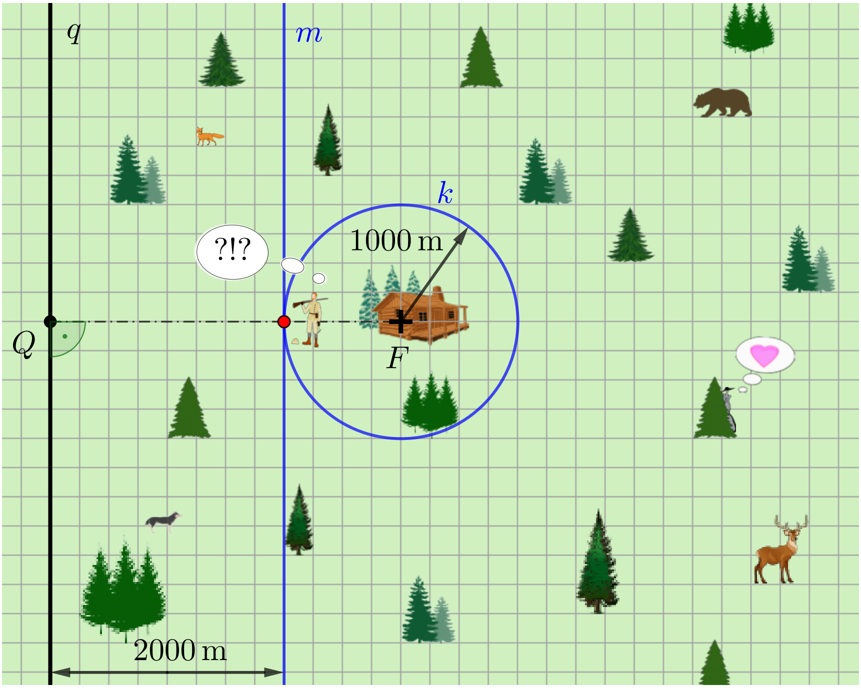
[b]Olčetrhent mu říká *pevnost*, po anglicku *fortress*, odtud onačení F.

Olča si načrtne mapku a použije pro přehlednost mřížku 250×250 m (obr. 2). Řekne si – je-li hledaný bod X vzdálen třeba 500 m od F, musí ležet na kružnici k se středem F a poloměrem 500 m (dva čtverečky v mřížce). Současně musí být jeho vzdálenost od q dvakrát tolik, tedy 1000 m a musí tedy ležet na přímce m rovnoběžné s q ve vzdálenosti 1000 m (4 čtverečky v mřížce). Ale z obrázku je vidět, že takový bod X neexistuje, pač se přímka m s kružnicí k neprotíná!



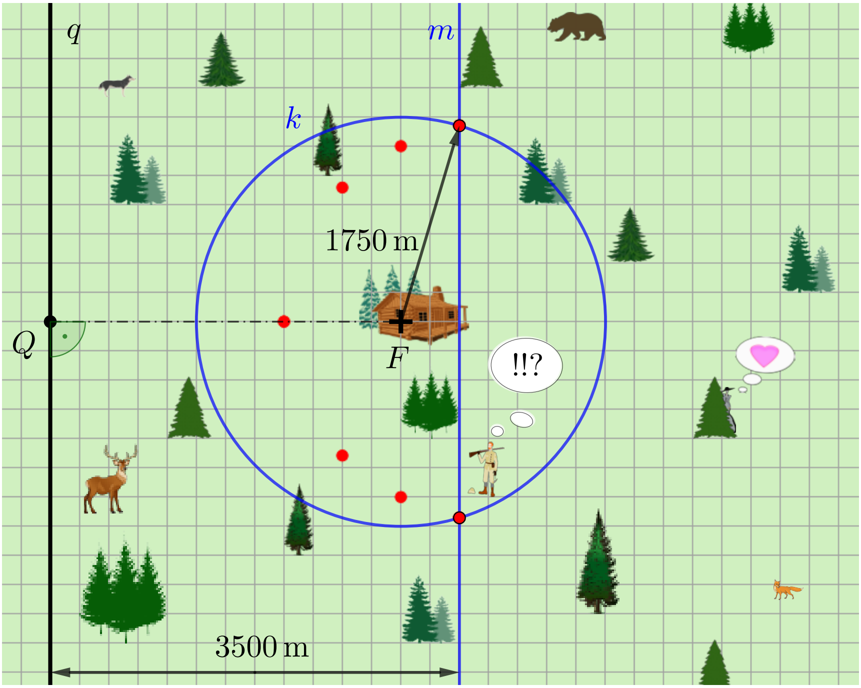
Obrázek 2: Olča začíná přemýšlet.

Budeme-li pomaloučku zvětšovat poloměr kružnice k, bude se m vzdalovat od q dvojnásobnou rychlostí a přibližovat se ke k, až se jí konečně v jednom bodě dotkne (obr. 3 – tam by mohla být Božka schovaná!)



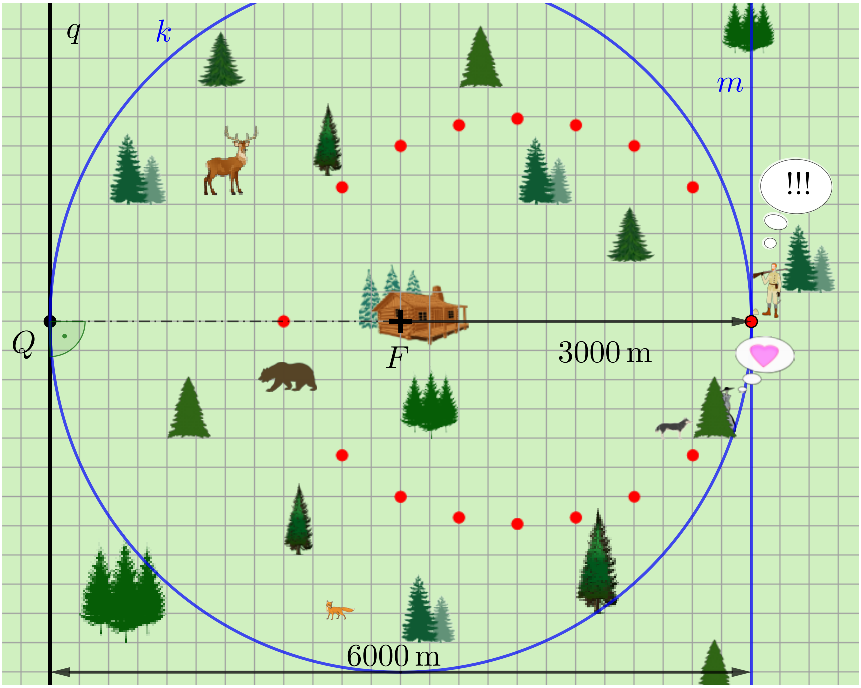
Obrázek 3: „Tady by Božka mohla být,. . . ale není. . . !“

Při dalším zvětšování poloměru kružnice k dostaneme dvojice průsečíků osově souměrných podle přímky QF (obr. 4 – Bože, tam všade by Božka mohla být taky schovaná!).



Obrázek 4: „Ty ve, těch možností je ňák hodně!“

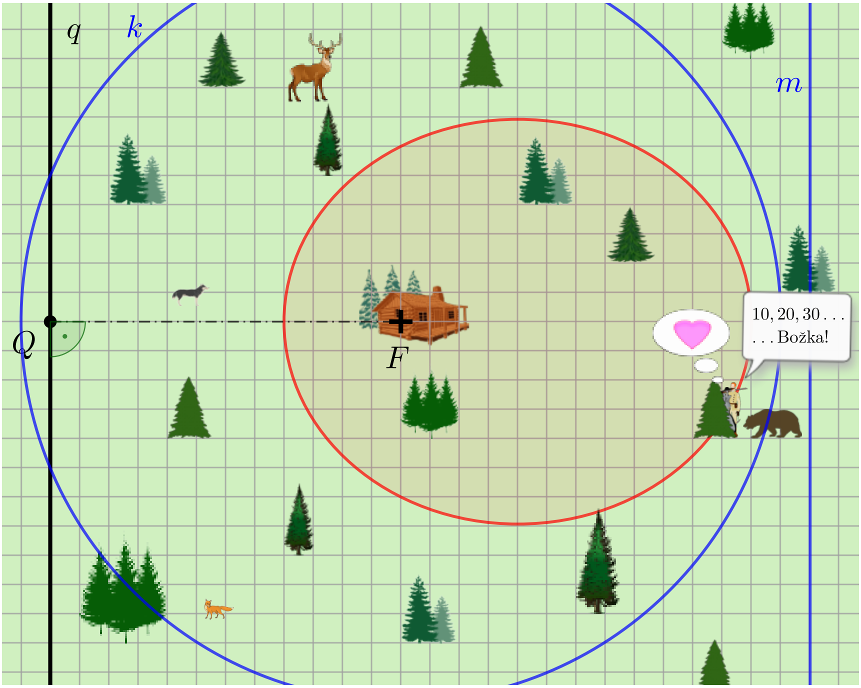
Nakonec se přímka m bude dotýkat k opět jen v jednom bodě (obr. 5) a pak jí uteče a další průsečíky už vznikat nebudou.



Obrázek 5: „Není to snad' elipsa?“

A Olčetrhent už ví, že Božena musí být někde na křivce, která náramně připomíná **elipsu**.

Stačí, aby ji oběhl dokola a jistě brzy na Božku narazí (obr. 6). Doufám, že má nabitou medvědobijku!



Obrázek 6: Olča obstál (zatím)!

Příklad 2: Olčetrhentův důkaz lásky

Po návratu do srubu dostane Olčetrhent od Boženy další úkol – má dokázat, že ji opravdu miluje – a to tak, že něco kvalitního uvaří a dále, že dokáže, že křivka, na které měl Boženu hledat, je opravdu elipsa. Umíš to dokázat i ty?

Zavedeme souřadnou soustavu s osou y v přímce q, počátkem D a osou x v přímce QF (obr. 7).

Vzdálenosti měřme nyní v kilometrech. Souřadnice bodu F

jsou potom zřejmě $F[3;0]$. Pro bod $X[x;y]$ platí dle Božčina papírku

$$\frac{|XF|}{|Xq|} = \frac{1}{2} \tag{a}$$

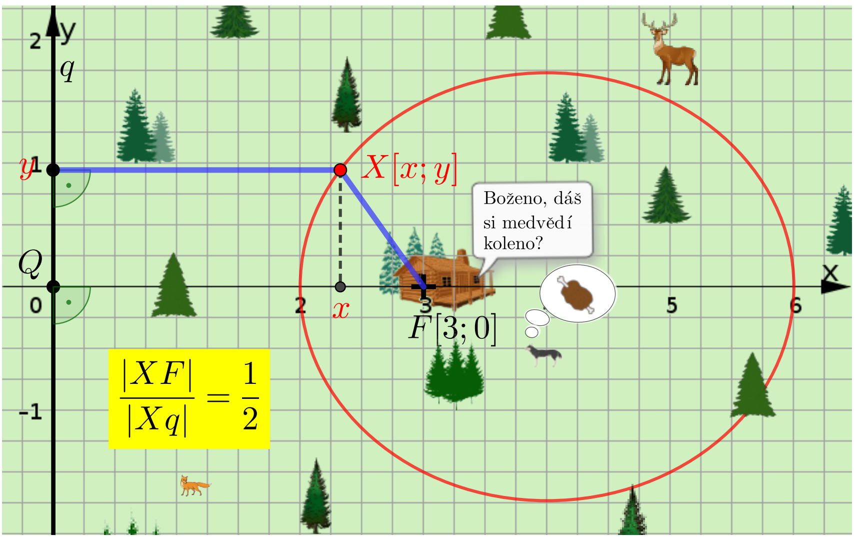
Odtud máme ekvivalentní rovnici

$$2|XF| = |Xq| \tag{b}$$

Přitom dle obrázku platí $|XF| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ a $|Xq| = x$. Po dosazení do (b) máme

$$\boxed{2\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = x} \tag{c}$$

Dostali jsme rovnici Boženiny křivky. Nyní ji ekvivalentně upravíme do tvaru středové rovnice elipsy!



Obrázek 7: Jak já vždycky říkám,
„Souřadná soustava je takový to naše zlato, něco jako chmel!“

Obě strany rovnice jsou **nezáporné**, takže můžeme rovnici **ekvivalentně** umocnit[a]:

$$\begin{aligned} 4(x-3)^2 + 4y^2 &= x^2 \\ 4x^2 - 24x + 36 + 4y^2 &= x^2 \\ 3x^2 - 24x + 4y^2 + 36 &= 0 \\ 3(x^2 - 8x) + 4y^2 + 36 &= 0 \\ 3(x-4)^2 - 48 + 4y^2 + 36 &= 0 \\ 3(x-4)^2 + 4y^2 &= 12 \end{aligned}$$

Po vydělení dvanácti dostáváme

$$\boxed{\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1} \tag{d}$$

To je vskutku SREL! Podstatné je, rovnice (c) a (d) jsou ekvivalentní, pač jsme používali výhradně ekvivalentní úpravy. To znamená, že množina schovek, kterou definovala Božena na svém papírku, je **rovna** množině bodů, kterou nazýváme elipsa[b]. Z rovnice (d) vidíme, že

$$\boxed{a = 2} \qquad \boxed{b = \sqrt{3}} \qquad \boxed{S[4; 0]}$$

Pač $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, je lineární excentricita

$$\boxed{e = 1}$$

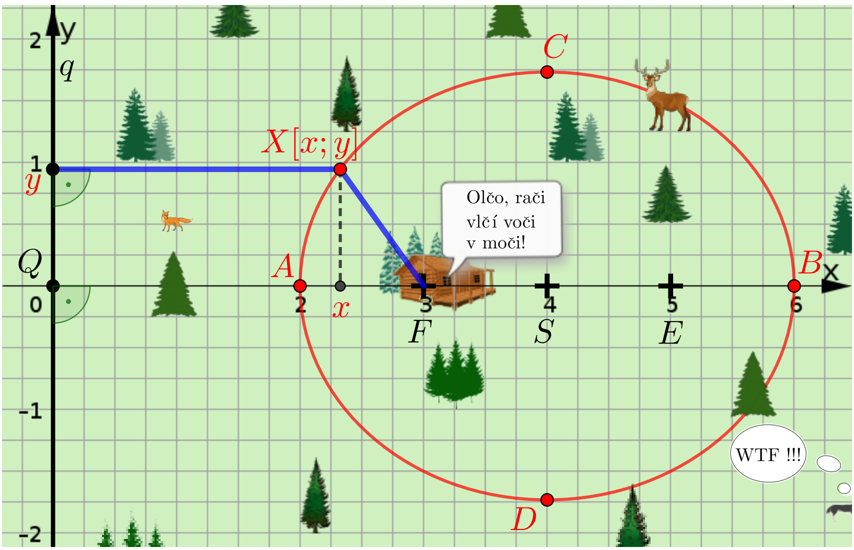
a ohniska jsou

$$\boxed{E = [5; 0]} \qquad \boxed{F = [3; 0]}$$

Tedy srub leží v jednom z ohnisek. Numerická excentricita je $\epsilon = \frac{e}{a}$, tedy

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2}}$$

A heleme se, numerická excentricita vyšla stejná, jako poměr $\frac{|XF|}{Xq}$, který nám Božka zadala při popisu své množiny schovek. Je to náhoda? Záhy vokážeme, že není.



Obrázek 8: Jak já vždycky říkám:
„Mít srub v ohnisku je lepší, než mít vodu na plicích!“

[a] Odborně řečeno *prdnout na kvadrát.*

[b] Kdyby naše úpravy byly jen důsledkové, tak by každá Boženina schovka ležela jistě na elipse, ale mohly by existovat body elipsy, které do Boženiny množiny nepatří, pač bychom věděli pouze, že $M_{\text{Bož}} \subset M_{\text{eli}}$.

Pojďme předchozí příklad vyřešit **úplně obecně**.

Příklad 3: Olčetrhentův důkaz obecně

V rovině je dána přímka q a bod F, který na ní neleží. Dále je dáno kladné číslo ε, které je **menší než** 1.

Dokažte, že množinou všech bodů X v rovině, pro které platí

$$\frac{|XF|}{|Xq|} = \varepsilon$$

je **elipsa**, jejíž jedno ohnisko je F a numerická excentricita je ε!

Poznámka: Všimněme si, že požadujeme ε kladné – to je jasné, pač je to poměr dvou vzdáleností, nemůže to být záporné a nula by byla triviální, pač by to byl jediný bod splývající s F (to by Božka byla ve srubu).

Ale také požadujeme ε **menší** než jedna, to už samozřejmé není – vždyť Božka mohla taky klíďo píďo zvolit poměr $\frac{|XF|}{|Xq|}$ rovný **jedné** nebo **větší** než jedna!

Později vokážeme, že pokud Božka zvolí $\varepsilon = 1$, nevznikne elipsa, ale **parabola** a pro $\varepsilon > 1$ vznikne **hyperbola**. To jsou křivice, které budeme dělat samolitr později.

Jinač postupujeme stejně jako v minulém příkladě. Opět zavedeme souřadnou soustavu, vzdálenost $|Fq|$ označíme d (obr. 9). Bod F má souřadnice $F[d; 0]$. Pro bod $X[x; y]$ platí dle zadání

$$\frac{|XF|}{|Xq|} = \varepsilon \tag{a}$$

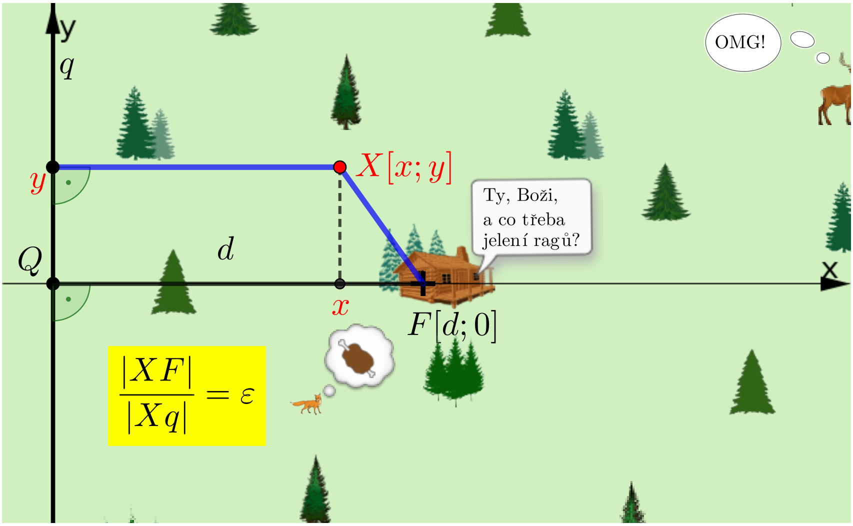
Odtud máme ekvivalentní rovnici

$$|XF| = \varepsilon \cdot |Xq| \tag{b}$$

Přitom dle obrázku platí $|XF| = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$ a $|Xq| = x$. Po dosazení do (b) máme

$$\boxed{\sqrt{(x-d)^2+y^2} = \varepsilon \cdot x} \tag{c}$$

Nyní tuto rovnici ekvivalentně upravíme do tvaru středové rovnice elipsy!



Obrázek 9: Moc a síla analytické methody!

Obě strany rovnice jsou **nezáporné**, takže můžeme rovnici **ekvivalentně** umocnit[a]:

$$\begin{aligned}
(x-d)^2+y^2 &= \varepsilon^2 x^2 \\
x^2-2dx+d^2+y^2 &= \varepsilon^2 x^2 \qquad \text{(d)} \\
(1-\varepsilon^2)x^2-2dx+d^2+y^2 &= 0 \\
(1-\varepsilon^2)\left(x^2-\frac{2d}{1-\varepsilon^2}x\right)+d^2+y^2 &= 0
\end{aligned}$$

$$(1-\varepsilon^2)\left(x-\frac{d}{1-\varepsilon^2}\right)^2-\frac{d^2}{1-\varepsilon^2}+d^2+y^2=0$$

$$(1-\varepsilon^2)\left(x-\underbrace{\frac{d}{1-\varepsilon^2}}_{m}\right)^2+y^2=\frac{d^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$$

$$(1-\varepsilon^2)(x-m)^2+y^2=\frac{d^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$$

Zlomek ve druhé závoře jsme pro přehlednost označili jako m (bude to zřejmě x-ová souřadnice středu naší elipsy). Pač pravá strana v poslední rovnici je nenulová, můžeme rovnici tímto vejrazem vydělit:

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{\frac{d^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{d^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}}=1}$$

Zelený zlomek je na beton **kladný** a můžeme ho označit jako a^2:

$$\boxed{a^2=\frac{d^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}} \tag{e}$$

Červený zlomek je **také** na beton **kladný**, pač jsme si vytýčili, že $\varepsilon<1$ a můžeme ho označit jako b^2:

$$\boxed{b^2=\frac{d^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}} \tag{f}$$

Tím pádem jsme vskutku dostali rovnici elipsy:[b].

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{g}$$

Vydělením (f) a (e) dostáváme

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2 \tag{h}$$

Pač Pravá strana (h) je menší než jedna, je $b < a$, takže elipsa je **ležatá**.

Z (h) vyjádříme ε:

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$
$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{e^2}{a^2}$$

Odtud

$$\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}$$

Vidíme, že vskutku platí, že číslo ε je **numerická excentricita**!

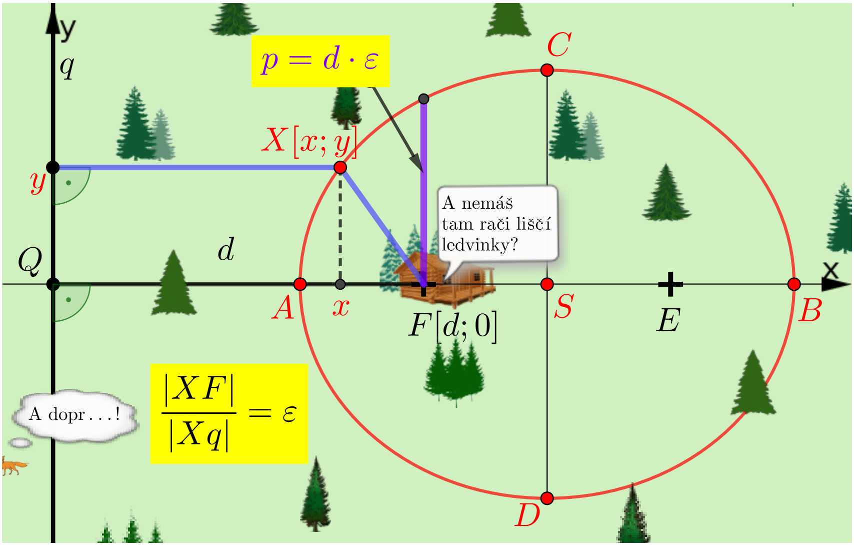
Podívejmež se ještě na *semi-latus rectum*, čiliž *parametr elipsy* p. Víme, že $p = \frac{b^2}{a}$, tedy dle (e) a (f)

$$p = \frac{\frac{d^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}}{\frac{d\varepsilon}{1-\varepsilon^2}}$$

Odtud

$$\boxed{p = d\varepsilon}$$

Pač $\varepsilon < 1$, je $p < d$[c]



Obrázek 10

[a]Odborně řečeno *frknout to na druhou.* Všimněme si, že pokud by bylo $\varepsilon = 1$, tak se v (d) odečtou kvadráty x^2 na levé a pravé straně a vyjde rovnice **paraboly** – tu teprvá budeme dělat.

[b] Všimněme si, že pokud bychom měli $\varepsilon > 1$, byl by červený zlomek záporný, takže bychom ho označili jako $-b^2$ a dostali bychom rovnici **hyperboly** $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – tu teprvá zavedeme.

[c]U paraboly bude $\varepsilon = 1$ a díky tomu bude $p = d$. U hyperboly bude $\varepsilon > 1$ a díky tomu bude $p > d$.