Ensembles de nombres

Cours

I. LES ENSEMBLES DE NOMBRES

A. *Démonstration*

$\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers.

B. *Cours*

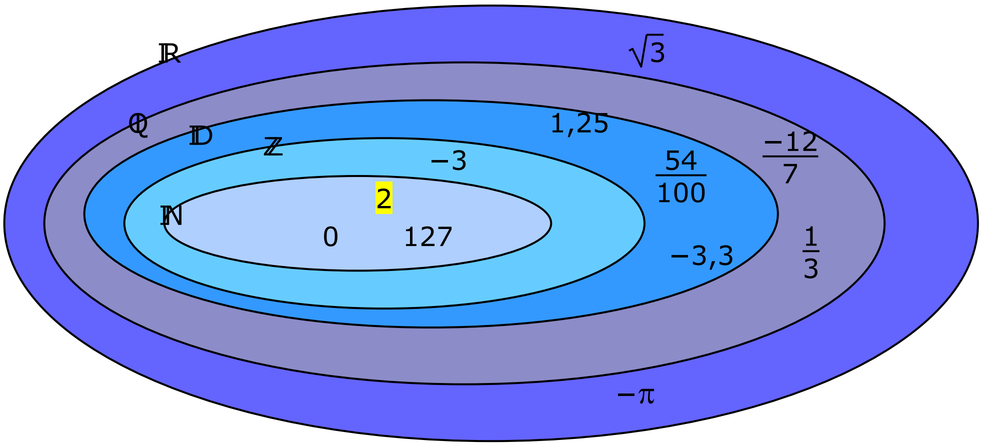
- L'ensemble de tous les nombres connus en seconde s'appelle l'ensemble des nombres réels, il est noté $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$, c'est l'ensemble des nombres entiers sans signe : $\{0,1,2,3\ldots\}$.

Pour les ensembles de nombres on n'est pas obligé d'utiliser le mot nombre. On dira que 2 est un entier, ce qui veut dire que c'est un nombre entier.

- L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$ c'est l'ensemble des nombres entiers avec un signe : $\{\ldots,-2,-1,0,1,2\ldots\}$.
- L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$, c'est l'ensemble des nombres que l'on peut écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

  Un nombre décimal peut s'écrire $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$
- L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. C'est l'ensemble des fractions d'entiers relatifs
- Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont irrationnels

On récapitule toutes ses informations dans le schéma :

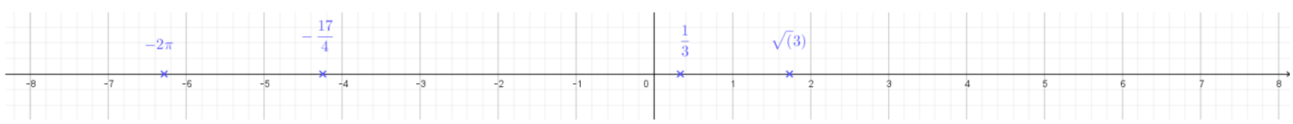


*Tous les nombres qui sont **dans** la ligne sur laquelle est inscrite $\mathbb{D}$ sont des décimaux, par exemple 1,25 ; –3 et 127.*

La nature d'un nombre est le plus petit ensemble de nombre auquel il appartient.
Ainsi 1,25 appartient à $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Sa nature est : décimal.
Un nombre peut avoir plusieurs écritures.
Exemple pour le nombre 2 :

2	*: Ecriture entière*	*+2*	*: Ecriture relative*
2,0	*: Ecriture décimale*	$\frac{8}{4}$	*: Ecriture fractionnaire*
$\sqrt{4}$	*: Ecriture avec un radical*	*200%*	*: Ecriture en pourcentage*
2.10^0	*: Ecriture en notation scientifique*		

Théorème : La droite des réels : à chaque point d'une droite graduée corresponds un nombre réel unique, son abscisse.



II. ENCADREMENT

Démonstration $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

Définition : Lorsque le nombre réel x est plus grand ou égal au décimal $\frac{a}{10^n}$ et strictement plus petit que $\frac{a+1}{10^n}$, on dit que $\frac{a}{10^n}$, $\frac{a+1}{10^n}$ est un encadrement de x à 10^{-n} près (avec n chiffres après la virgule)

On note $\frac{a}{10^n} \leq x < \frac{a+1}{10^n}$

Ainsi $1,41 \leq \sqrt{2} < 1,42$ est un encadrement de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près.

$\frac{a}{10^n}$ est la **valeur approchée par défaut** de x à 10^{-n} près (avec n chiffres après la virgule). On dit aussi la valeur **tronquée**.

$\frac{a+1}{10^n}$ est la **valeur approchée par excès** de x à 10^{-n} près.

De ces deux valeurs, la plus proche de x est la **valeur arrondie** de x à 10^{-n} près

Ainsi $\sqrt{2} \approx 1,41$ est la valeur arrondie à 10^{-2} près.

Attention, on ne peut pas faire de calcul avec des arrondis. Ainsi à 10^{-2} près, $\frac{1}{3} \approx 0,33$ mais $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \approx 0,67$

Utilisation de la calculatrice

On peut fixer le nombre de décimales affichées par la calculatrice. Pour cela on prend le menu z et plutôt que flottant on choisi le nombre de décimales. Le résultat est arrondi.

III. INTERVALLES

L'intervalle]– 2 ; 5[est l'ensemble de tous les nombres réels x strictement plus grands que –2 et strictement plus petits que 5. On a donc : $-2 < x < 5$. on écrit :

$x \in]-2 ; 5[\quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 5$

On peut écrire de même :

$x \in [-2 ; 5] \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 5$

$x \in]-2 ; 5] \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x \leq 5$

$x \in [-2 ; 5[\quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq x < 5$

*Lorsque les inégalités sont strictes, les crochets des intervalles sont « **ouverts** » c'est à dire tourné vers l'extérieur. Le nombre indiqué n'est pas dans l'intervalle.*
*Lorsque les inégalités sont larges, les crochets des intervalles sont « **fermés** » c'est à dire tourné vers l'intérieur. Le nombre indiqué est dans l'intervalle.*

L'ensemble de tous les nombres réels x strictement plus grands que 2 est noté] 2 ; +∞ [
Le symbole **+∞** indique qu'il n'y à pas de limite supérieure pour les nombres de l'intervalle. On lit « plus l'infini ».

Remarque : +∞ indique que l'on peut prendre des valeurs strictement supérieures à n'importe quel grand nombre le crochet de l'intervalle est donc toujours « ouvert ».

$x \in]\, 2 ; +\infty [$ veut dire la même chose que $2 < x$

on peut écrire de même :

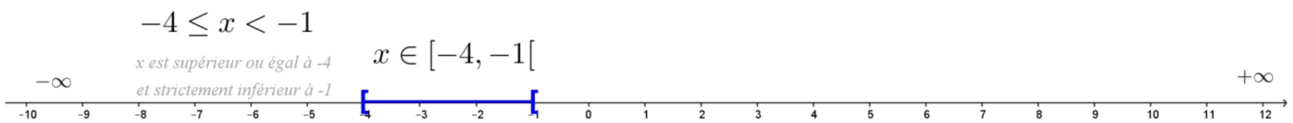
$x \in [\, 2 ; +\infty [$ veut dire la même chose que $2 \leq x$

$x \in]-\infty ; 2\,]$ veut dire la même chose que $x \leq 2$

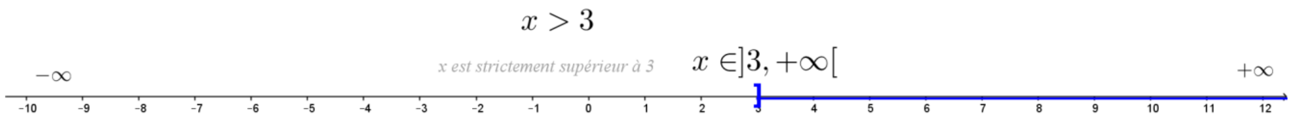
$x \in]-\infty ; 2\, [$ veut dire la même chose que $x < 2$

Le passage de la notation des intervalles à la représentation sur la droite graduée se fait simplement en plaçant les nombres qui servent de bornes aux intervalles :

<u>Exemple 1 :</u>



<u>Exemple 2 :</u>

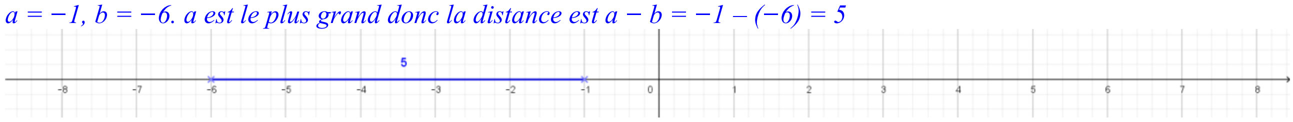


Remarquer que l'on place +∞ et –∞ aux extrémités de l'axe

IV. <u>VALEUR ABSOLUE ET DISTANCE</u>

Définition : Soient deux nombres réels a et b. On appelle **distance** entre a et b la différence entre le plus grand et le plus petit.
Suivants les cas la distance est donc égale à $a - b$ ou $b - a$.

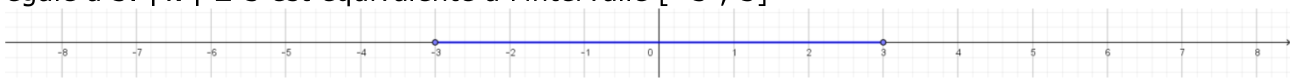
Exemples :
$a = -2$, $b = 7$. b est le plus grand donc la distance est $b - a = 7 - (-2) = 9$
$a = 3$, $b = -5$. a est le plus grand donc la distance est $a - b = 3 - (-5) = 8$
$a = -1$, $b = -6$. a est le plus grand donc la distance est $a - b = -1 - (-6) = 5$



Définition : On appelle **valeur absolue** d'un nombre réel x sa distance à 0. On la note $| x |$
Pour prendre la valeur absolue d'un nombre il suffit d'enlever son signe.
Ecrire que $|x| = 3$ veut donc dire que $x = 3$ ou $x = -3$.

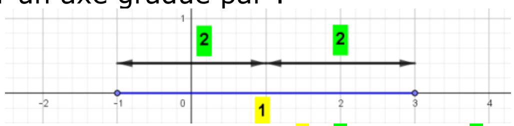
Attention il est faux d'écrire $| x | = x$, car x peut être un nombre négatif.
Si x est un nombre négatif, $| x | = -x$, car $- x$ veut dire l'opposé x de qui est ici un nombre positif.

L'inéquation $| x | \leq 3$ est l'ensemble de tous les points dont la distance à 0 est inférieure ou égale à 3. $| x | \leq 3$ est équivalente à l'intervalle $[-3 ; 3]$



L'ensemble de tous les points tels que $| x | \leq 3$ est représenté par le segment bleu.

L'inégalité $|x - 1| \leq 2$ peut se lire « x est à une distance de 1 inférieure ou égale à 2 ». Elle peut aussi se représenter sur un axe gradué par :



$|x - 1| \leq 2$ est donc équivalent à $x \in [-1 ; 3]$ *(car $-1 = 1 - 2$ et $3 = 1 + 2$)*