38 A G. A n t o n i G a u d í

AG. Reglades de Gaudí

Les superfícies reglades permeten fer superfícies amb línies rectes. És per això que són tan utilitzades en arquitectura, tant amb pedra com amb fusta o formigó (en aquest últim cas, les línies rectes es converteixen en els llistons d'encofrat). Les genials formes aconseguides per Gaudí són generalment amb superfícies reglades. Les que amb més freqüència va utilitzar són les que es desenvolupen en les següents aplicacions:

38.11 AG. Reglades de Gaudí. Hiperboloide circular d'una fulla  Fig. 38.57

38.12 AG. Reglades de Gaudí. Hiperboloide el·líptic d'una fulla  Fig. 38.58

38.13 AG. Reglades de Gaudí. Paraboloide hiperbòlic  Fig. 38.59

38.14 AG. Reglades de Gaudí. Helicoide  Fig. 38.60

38.11 AG. Reglades de Gaudí. Hiperboloide circular d'una fulla

Fórmula implícita. La fórmula implícita de l'hiperboloide circular és $(x^2+y^2)/r^2-z^2/c^2= 1$ on r és el radi de la gola o coll, és a dir, la part més estreta de l'hiperboloide coincident amb l'origen de coordenades, i c és el que dona amplitud a la superfície (fig. 38.61). A l'aplicació apareixen els punts lliscants h1 i h2, que són les altures superior i inferior a la gola que permeten definir els radis r1 i r2 en aquestes altures.

Superfície paramètrica. L'expressió paramètrica d'un hiperboloide circular és:

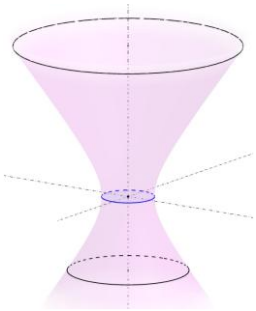
$x(u,v)= r\cdot\cosh(u)\cdot\cos(v)$
$y(u,v)= r\cdot\cosh(u)\cdot\sin(v)$
$z(u,v)= c\cdot\sinh(u)$

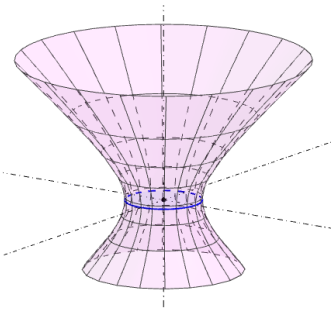
equacions que es poden introduir directament a la instrucció 'Superficie' de GeoGebra per obtenir la superfície de l'hiperboloide circular d'una fulla. Amb el punt lliscant r es defineix el radi de la gola i amb els de 'Cercle 1' i 'Cercle 2' la progressió segons l'eix Z i segons l'eix -Z respectivament (fig. 38.62). Es pot comprovar que els talls amb plans verticals són cercles i amb plans verticals hipèrboles, totes elles iguals.

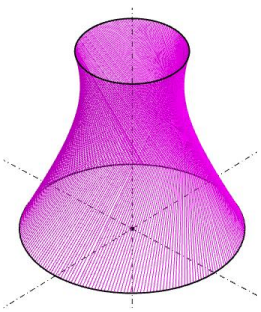
Reglada. Rastre. Aquesta modalitat permet fer superfícies reglades segons hipèrboles circulars de forma perible (és a dir que no es poden conservar) segons el rastre que produeix una recta en moure's en l'espai, cosa que únicament permet el programa GeoGebra. Es defineixen dos cercles de radis r1 i r2 i la distància entre ells d. El segment format per dos punts mòbils A i B, A

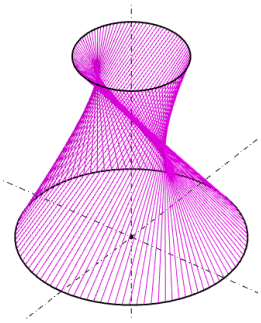
sobre el cercle de radi r1 i B sobre el cercle de radi r2, permeten concretar la inclinació en l'espai del segment generatriu A-B (fig. 38.63). Aquesta modalitat de creació de superfícies és molt important atès que és la que s'utilitzava a les maquetes de guix dels hiperboloides utilitzats a la Sagrada Família.

Reglada. El programa GeoGebra permet dibuixar superfícies reglades, en aquest cas permanents, a base de crear una seqüència de segments. Aquesta es mou entre dos cercles de radis r1 i r2 que es troben a una distància d entre ells. A més, un punt lliscant permet introduir una certa inclinació als segments (fig. 38.64). S'ha considerat un nombre de generatrius n= 100.


Fig. 38.61


Fig. 38.62


Fig. 38.63


Fig. 38.64

38.12 AG. Reglades de Gaudí. Hiperboloide el·líptic d'una fulla

Fórmula implícita. La fórmula implícita de l'hiperboloide el·líptic és $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)-(z^2/c^2)= 1$, on a i b són els semieixos segons l'eix de les X i de les Y de l'el·lipse que defineix la gola o coll, és a dir, la part més estreta de l'hiperboloide coincident amb l'origen de coordenades. c és el que dona amplitud a la superfície (fig. 38.65). A l'aplicació apareixen els punts lliscants h1 i h2, que són les altures superior i inferior a la gola que permeten definir els semieixos a1 i b1, a2 i b2 de les el·lipses, respectivament, en aquestes altures.

Superfície paramètrica. L'expressió paramètrica d'un hiperboloide el·líptic és:

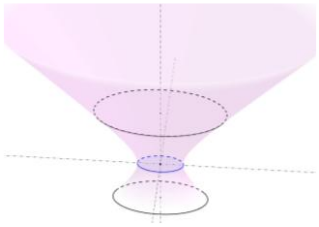
$x(u,v)= a\cdot\cosh(v)\cdot\cos(u)$
$y(u,v)= b\cdot\cosh(v)\cdot\sin(u)$
$z(u,v)= c\cdot\sinh(v)$

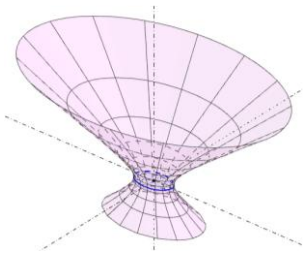
equacions que es poden introduir directament a la instrucció 'Superficie' de GeoGebra per obtenir la superfície de l'hiperboloide el·líptic d'una fulla. Amb els punts lliscants a i b es defineixen els semieixos de l'el·lipse segons l'eix de les X i segons l'eix de les Y, respectivament, de la gola i amb els de 'El·lipse 1' i 'El·lipse 2', la progressió segons l'eix Z i segons l'eix -Z (fig. 38.66). Es pot comprovar que els talls amb plans verticals són el·lipses i amb plans verticals hipèrboles, totes elles diferents (segons simetries).

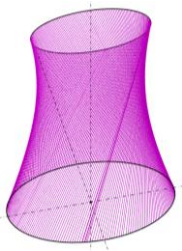
Reglada. Rastre. Aquesta modalitat permet fer superfícies reglades segons hipèrboles el·líptiques de forma perible (és a dir que no es poden conservar) segons el rastre que produeix una recta en moure's en l'espai, cosa que únicament permet el programa GeoGebra. Es defineixen dues el·lipses. Cadascuna d'elles amb la seva distància focal f1 i f2 i els semieixos b1 i b2 segons l'eix de les Y. I també la distància entre elles d. Això permet calcular els semieixos a1 i a2 de les el·lipses segons l'eix de les X. El segment format per dos punts mòbils A i B, A sobre l'el·lipse de distància focal f1 i B sobre l'el·lipse de distància focal f2, permeten concretar la inclinació en l'espai del segment generatriu A-B (fig. 32.67). Aquesta modalitat de creació de

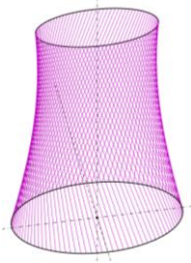
superfícies és molt important atès que és la que s'utilitzava a les maquetes de guix dels hiperboloides utilitzats a la Sagrada Família.

Reglada. El programa GeoGebra permet dibuixar superfícies reglades, en aquest cas permanents, a base de crear una seqüència de segments. Com a la modalitat anterior es defineixen els valors d'f1, b1, f2, b2 i d. I també es calculen els valors d'a1 i a2. A més, un punt lliscant permet introduir una certa inclinació als segments (fig. 38.68). S'ha considerat un nombre de generatrius n= 100.


Fig. 38.65


Fig. 38.66


Fig. 38.67


Fig. 38.68

38.13 AG. Reglades de Gaudí. Paraboloide hiperbòlic

Fórmula implícita. La fórmula implícita d'un paraboloide hiperbòlic és $z= x^2/a^2-y^2/b^2$ on a i b són les curvatures segons l'eix de les X i de les Y respectivament (fig. 38.69).

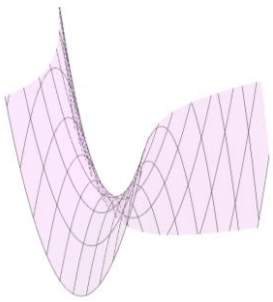
Superfície paramètrica. L'expressió paramètrica d'un hiperboloide el·líptic és:

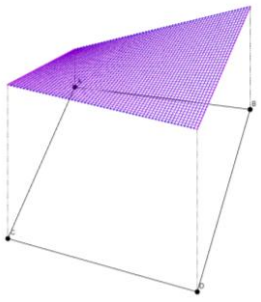
$x(u,v)= u$
$y(u,v)= v$
$z(u,v)= u^2-v^2$

equacions que es poden introduir directament a la instrucció 'Superficie' de GeoGebra per obtenir la superfície del paraboloide hiperbòlic. Els límits de la superfície es defineixen amb quatre punts lliscants que la concreten segons els eixos X, -X, Y i -Y. Es pot comprovar que els talls amb plans verticals són, en tot cas, paràboles (fig. 38.70).

Reglada. El programa GeoGebra permet dibuixar superfícies reglades, a base de crear una seqüència de segments. Es donen quatre punts mòbils en el pla X-Y que són A, B, C i D i les seves coordenades. Es creen quatre punts lliscants que definiran les altures d'aquests punts: hA, hB, hC i hD. També es dona el nombre de generatrius segons l'eix x, nx i segons l'eix y, ny. (fig. 38.71).


Fig. 38.69


Fig. 38.70


Fig. 38.71

38.14 AG. Reglades de Gaudí. Helicoide

Fórmula implícita. La fórmula implícita d'un helicoide és z= c·arctan(y/x). En GeoGebra la fórmula és tan inestable, que és impossible dibuixar-la.

Superfície paramètrica. L'expressió paramètrica d'un helicoide és:

x(u,v)= a·cos(t)
y(u,v)= b·sin(t)
z(u,v)= c·t

expressió que, amb els seus respectius punts lliscants, pot definir el radi interior r,i, l'exterior r,e, l'altura h i les progressions segons l'eix Z i l'ex -Z (fig. 38.72).

Reglada. Rastre. Aquesta modalitat permet fer superfícies reglades segons helicoides de forma perible (és a dir que no es poden conservar) segons el rastre que produeix una recta en moure's en l'espai, cosa que únicament permet el programa GeoGebra. Amb punts lliscants s'indiquen els valors del radi exterior r,e, del radi interior r,i, de l'altura h, de l'inici de l'helicoide α i, finalment, del nombre de voltes n (el qual es dona amb un decimal). Així es creen dibuixos com el que es veu a la figura 38.73.

Reglada. El programa GeoGebra permet dibuixar superfícies reglades a base de crear una seqüència de segments. En aquest cas, es permet considerar una planta el·líptica. per la qual cosa es defineix la dimensió segons l'eix X, dy i segons l'eix Y, dy. I es creen igualment dos punts lliscants addicionals per indicar els valors de l'altura h i per definir les generatrius. El resultat és una figura com la que es veu a la figura 38.74.

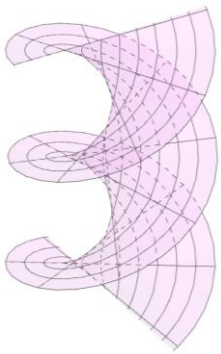


Fig. 38.72

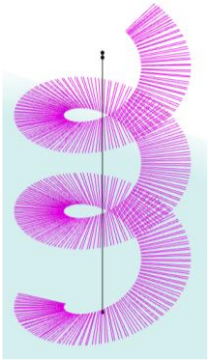


Fig. 38.73

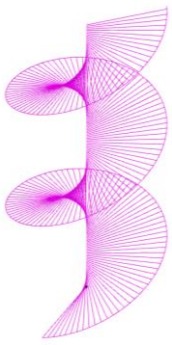


Fig. 38.74

Les aplicacions que s'acaben de comentar, així com algunes de les fotografies incloses, tenen com a referència el llibre '*La Sagrada Familia. De Gaudí al CAD*' de Josep Gómez-Jordi Coll-Juan C. Melero-Mark C. Burry, editat el 1996 per Edicions UPC de la Universitat Politècnica de Catalunya.