Allgemeine Form und Scheitelpunktform

Bisher kenne Sie quadratische Funktion in der **Scheitelpunktform:**

$$f(x) = A \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

Dabei ist A der Streckungs- oder Stauchungsfaktor und $S(x_S|y_S)$ der Scheitelpunkt.

Häufig sind quadratische Funktionsterme aber in der **allgemeinen Form** gegeben. Die allgemeine Form sieht so aus:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Beispiel:

$$f(x) = -3x^2 + 5x - 2$$

In diesem Beispiel ist $a = -3, b = 5$ und $c = -2$.

Sie lernen nun, wie man **zwischen beiden Formen wechseln** kann.

1. **Von der Scheitelpunktform zur allgemeinen Form**
   a. Beispiel:
   $$f(x) = 2 \cdot (x - 5)^2 + 1$$
   Nach der binomischen Formel ist
   $$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$$
   Damit verändert sich der Funktionsterm zu
   $$f(x) = 2 \cdot (x^2 - 10x + 25) + 1 | \text{Klammer multiplizieren}$$
   $$f(x) = 2x^2 - 20x + 50 + 1 | \text{Zusammenfassen}$$
   $$f(x) = 2x^2 - 20x + 51$$
   b. Arbeitsschritte:
      i. Binomische Formel anwenden
      ii. Ausmultiplizieren
      iii. Zusammenfassen
   c. Übungen: Formen Sie in die allgemeine Form um. Beschreiben Sie den Graphen, ohne zu zeichnen.
      i. $f(x) = -3 \cdot (x + 5)^2 - 7$
      ii. $g(x) = \frac{1}{4} \cdot (x - 8)^2 + 2$
      iii. $h(x) = -\frac{5}{6} \cdot (x - 3)^2 - 1$
2. **Von der allgemeinen Form zu Scheitelpunktform**
   a. Beispiel:
   $$f(x) = 3x^2 + 24x + 53$$
   Division der Funktionsgleichung durch den Faktor vor dem x^2:
   $$f(x) = 3x^2 + 24x + 53 | :3$$
   $$\frac{1}{3} \cdot f(x) = x^2 + 8x + \frac{53}{3}$$
   Subtraktion der Konstanten auf beiden Seiten der Funktionsgleichung:
   $$\frac{1}{3} \cdot f(x) = x^2 + 8x + \frac{53}{3} | -\frac{53}{3}$$
   $$\frac{1}{3} \cdot f(x) - \frac{53}{3} = x^2 + 8x$$

Addition der quadratischen Ergänzung auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\frac{1}{3}\cdot f(x)-\frac{53}{3}=x^2+8x|+16,\text{ weil }(x+4)^2=x^2+8x+16$$
$$\frac{1}{3}\cdot f(x)-\frac{53}{3}+16=x^2+8x+16|\text{binomische Formel}$$
$$\frac{1}{3}\cdot f(x)-\frac{53}{3}+16=(x+4)^2$$

Umformen der Funktionsgleichung, bis $f(x)$ wieder allein auf einer Seite steht:

$$\frac{1}{3}\cdot f(x)-\frac{53}{3}+16=(x+4)^2|\cdot 3$$
$$f(x)-33+48=3\cdot(x+4)^2|\text{Zusammenfassen}$$
$$f(x)-5=3\cdot(x+4)^2|+5$$
$$f(x)=3\cdot(x+4)^2+5$$

b. Arbeitsschritte
   i. Division der Funktionsgleichung durch den Faktor vor dem x^2
   ii. Subtraktion des konstanten Glieds auf beiden Seiten der Funktionsgleichung
   iii. Quadratische Ergänzung auf beiden Seiten der Gleichung addieren
   iv. Binomische Formel anwenden
   v. Funktionsgleichung so lange umformen, bis $f(x)$ wieder auf einer Seite steht.

c. Übungen: Formen Sie in die Scheitelpunktform um
   i. $f(x)=3x^2-12x+21$
      - zur Kontrolle: $3(x-2)^2+9$
   ii. $g(x)=-\frac{1}{4}x^2+4x-15$
      - zur Kontrolle: $-\frac{1}{4}(x-8)^2-15$
   iii. $h(x)=\frac{1}{2}x^2+6x+6$
      - zur Kontrolle: $\frac{1}{2}(x+6)^2-12$
   iv. $k(x)=15x^2-780x+140$
      - zur Kontrolle: $15(x-26)^2-10000$
   v. Geben Sie den Scheitelpunkt der Funktion $q(x)=4x^2+3x+2$ an.
      - zur Kontrolle: $S\left(-\frac{3}{8}\middle|\frac{23}{16}\right)=S(-0{,}375|1{,}4375)$