Sección 3.5

5. Resolver $y'' + y' + y = \text{sen}^2 x$ y observamos que $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\rightarrow y'' + y' + y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ (1)

Sea $y_p(x) = A + B\cos 2x + C\,\text{sen}\, 2x$

$y_p'(x) = -2B\,\text{sen}\, 2x + 2C\cos 2x$

$y_p''(x) = -4B\cos 2x - 4C\,\text{sen}\, 2x$

ya que $y_p(x)$ satisface la ecuación (1)

$y_p'' + y_p' + y_p = A + (B + 2C - 4B)\cos 2x + (C - 2B - 4C)\,\text{sen}\, 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$\rightarrow A = \frac{1}{2}$ $\qquad A = \frac{1}{2}$ $\qquad y_p(x) = A + B\cos 2x + C\,\text{sen}\, 2x$

$2C - 3B = -\frac{1}{2}$ $\rightarrow B = \frac{3}{26}$ $\rightarrow y_p(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{26}\cos 2x - \frac{1}{13}\,\text{sen}\, 2x$

$-2B - 3C = 0$ $\qquad C = -\frac{1}{13}$ $\qquad y_p(x) = \frac{1}{26}(13 + 3\cos 2x - 2\,\text{sen}\, 2x)$

la solucion general a la ecuación (1) es

$y(x)\; y_c(x) + y_p(x)$

$y(x)\; e^{-\frac{1}{2}}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] + \frac{1}{26}(13 + 3\cos 2x - 2\,\text{sen}\, 2x$

Donde la solucion diferencial homogenea asociada se obtuvo como sigue:

$y'' + y' + y = 0$ $\qquad$ ecuación homogenea asociada

ecuacion auxiliar $\rightarrow r^2 + r + 1 = 0$

$r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$y_c(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$

19. Resolver $y^{(5)} + 2y^{(3)} + 2y'' = 3x^2 - 1$

primero obtenemos la solucion de la ecuacion homogenea asociada

$$y^{(5)} + 2y^{(3)} + 2y'' = 0$$

Con la ecuación auxiliar $r^5 + 2r^3 + 2r^2 = 0$

multiplicidad dos

Cuyas raices son $r = 0$

$r = -0.77$

$r = 0.38 \pm 1.56i$

Por lo que la solucion de la ecuación homogenea asociada es:

$$y_c(x) = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 e^{-0.77x} + e^{0.38x}(C_4 \cos 1.56x + C_5 \operatorname{Sen} 1.56x)$$

$$y_c(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-0.77x} + e^{0.38x}(C_4 \cos(1.56x) + C_5 \operatorname{Sen}(1.56x))$$

La propuesta para una solución particular a la ecuación no homogenea seria sabiendo que $f(x) = 3x^2 - 1$

$$y_p(x) = A + Bx + Cx^2$$

y como los terminos resaltados se encuentran duplicados en la solución $y_c(x)$, entonces debemos multiplicar por x^s s el menor entero, tal que ya no encontremos duplicación de terminos de $y_p(x)$ en $y_c(x)$; esto se logra escogiendo $s = 2$:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4; \quad \text{asi que}$$

$y_p'(x) = 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3$

$y_p''(x) = 2A + 6B + 12Cx^2$

$y_p^{(3)}(x) = 6B + 24Cx$

$y_p^{(4)}(x) = 24C$

$y_p^{(5)}(x) = 0$

Asi que reemplazando en la e.d.o.

$$y_p^{(5)} + 2y_p^{(3)} + 2y_p'' = 3x^2 - 1$$

$$0 + 2(6B + 24Cx) + 2(2A + 6Bx + 12Cx^2) = 3x^2 - 1$$

$$(24C)x^2 + (12B + 48C)x + (12B + 4A) = 3x^2 - 1$$

por lo cual podemos concluir al comparar termino a termino que

$24C = 3 \longrightarrow C = 1/8$

$12B + 48C = 0 \longrightarrow B = -\frac{1}{2}$

$\longrightarrow -6 + 4A = -1$

$A = \frac{5}{4}$

Asi que queda establecido la forma de $y_p(x)$

$$y_p(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^4$$

25. Debemos encontrar la forma apropiada de $y_p(x)$

$$y'' + 3y' + 2y = x(e^{-x} - e^{-2x})$$
$$y'' + 3y' + 2y = x(e^{-x} - e^{-2x})$$
$$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x} - xe^{-2x}$$

Siendo la ecuación auxiliar $r^2 + 3r + 2 = 0$
con sus raíces $r = -1$ y $r = -2$

$$\rightarrow y_c(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

y como $f(x) = xe^{-x} - xe^{-2x}$; la solución particular y_p debe en principio ponerse como combinación lineal de todas las funciones en $f(x)$ y sus derivadas que sean L.I.

$$\rightarrow y_p(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + Ce^{-2x} + Dxe^{-2x}$$

Sin embargo los términos subrayados están duplicados en la solución complementaria; así que debemos multiplicar respectivamente cada función L.I con sus derivadas por x^{s_1} y x^{s_2} con s_1 y s_2 los menores enteros positivos de tal manera que ya no estén duplicados en $y_c(x)$ esto se puede si $s_1 = 2$ y $s_2 = 2$

$$\rightarrow y_p(x) = (Ae^{-x} + Bxe^{-x})x^2 + (Ce^{-2x} + Dxe^{-2x})x^2$$
$$y_p = Ax^2e^{-x} + Bx^3e^{-x} + Cx^2e^{-2x} + Dx^3e^{-2x}$$

39. Resolver el pvi $y^{(3)} + y'' = x + e^{-x}$ donde $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$ y $y''(0) = 1$

resolvemos la EDO homogénea asociada
$y^{(3)} + y'' = 0$ cuya ecuación auxiliar es $r^3 + r^2 = 0$
$r^2(r+1) = 0$ con raíces
$r = 0$ multiplicidad dos
$r = -1$

$$\rightarrow y_c(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 e^{-1x}$$
$$y_c(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$$

Para proponer la forma de $y_p(x)$ tenemos en cuenta que $f(x) = x + e^{-x}$
entonces en principio $y_p(x) = Ax + B + Ce^{-x}$

Pero los términos subrayados están duplicados en la solución complementaria; así que debemos multiplicar respectivamente cada función L.I con sus derivadas x^{s_1} y x^{s_2}; donde s_1 y s_2 son los menores enteros positivos de tal forma que ya no estén duplicados en $y_c(x)$ esto se puede si $s_1 = 2$ y $s_2 = 1$

$\rightarrow y_p = (Ax + B)x^2 + (Ce^{-x})x^1$

$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cxe^{-x}$

$\rightarrow y_p'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + Ce^{-x} - Cxe^{-x}$

$y_p''(x) = 6Ax + 2B - Ce^{-x} - [Ce^{-x} + Cxe^{-x}(-1)]$

$= 6Ax + 2B - 2Ce^{-x} + Cxe^{-x}$

$y_p^{(3)}(x) = 6A + 2Ce^{-x} + Ce^{-x} + Cxe^{-x}(-1)$

$= 6A + 3Ce^{-x} - Cxe^{-x}$

Si reemplazamos esto en la edo

$y_p^{(3)} + y_p'' = x + e^{-x}$

$(6A + 3Ce^{-x}) + (6Ax + 2B - 2Ce^{-x} + Cxe^{-x}) = x + e^{-x}$

$(6A)x + (3C - 2C)e^{-x} + (-C + C)xe^{-x} + (6A + 2B) = x + e^{-x}$

Al comparar termino a termino podemos determinar que:

$6A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{6}$

$C = 1$

$6A + 2B = 0 \longrightarrow 1 + 2B = 0$

$B = -\frac{1}{2}$

$\rightarrow y_p(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xe^{-x}$

de esta forma tenemos que la solución general será:

$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xe^{-x}$

para satisfacer el PVI debemos encontrar las constantes c_1; c_2; c_3 pero primero encontramos

$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xe^{-x}$

$y'(x) = c_2 - c_3 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x + e^{-x} - xe^{-x}$

$y''(x) = c_3 e^{-x} + x - 1 - e^{-x} - [e^{-x} + xe^{-x}(-1)]$

$= c_3 e^{-x} + x - 1 - 2e^{-x} + xe^{-x}$

Así que tenemos que

$y(0) = 1 \rightarrow c_1 + c_3 = 1 \longrightarrow c_1 + 4 = 1 \rightarrow c_1 = -3$

$y'(0) = 0 \rightarrow c_2 - c_3 + 1 = 0 \longrightarrow c_2 - 4 + 1 = 0 \rightarrow c_2 = 3$

$y''(0) = 1 \rightarrow c_3 - 1 - 2 = 1 \rightarrow c_3 = 4$

Por lo cual la solución al PVI es

$y(x) = -3 + 3x + 4e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xe^{-x}$