Problemas sobre optimización

CURSO	**TEMA**	**WWW.DANIPARTAL.NET**
2ºBach CCSS	Tema 1: Funciones, límites y derivadas	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

A un paciente con diabetes se le monitoriza durante un día completo, suministrándole un medicamente a las 00:00 horas para observar su reacción. La función que aproxima la cantidad de glucosa en sangre (mg/dl) del paciente, en cada instante t (horas), es:

$$\boldsymbol{f(t)=\begin{cases}\frac{5}{6}\left(\frac{t^3}{3}-12\,t^2+108\,t+108\right) & si\ \ 0\le t\le 12\\ t^2-40\,t+546 & si\ \ 12<t\le 24\end{cases}}$$

a) Halle en qué periodos de tiempo el nivel de glucosa va aumentando.

b) ¿En qué momentos del día el paciente tiene los niveles más alto y más bajo de glucosa en sangre y a cuánto ascienden?

c) ¿En qué momentos, después del mediodía, el paciente tiene 155 mg/dl?

a) La derivada mide el crecimiento de la función. Dejamos abiertos los puntos frontera, ya que no hemos demostrado que la función derivada sea continua en esos puntos.

$$f'(t)=\begin{cases}\frac{5}{6}(t^2-24t+108)\ si\ \ 0<t<12\\ 2t-40\ \ si\ \ 12<t<24\end{cases}$$

La condición necesaria de extremo relativo implica anular la primera derivada. Por lo tanto:

$$t^2-24t+108=0\rightarrow t=6\in(0,12), t=18\notin(0,12)$$

$$2t-40=0\rightarrow t=20\in(12,24)$$

Evaluamos la derivada en los siguientes intervalos:

$$(0,6)\rightarrow f'(1)=\frac{5}{6}(1-24+108)>0\rightarrow f(t)\ estrictamente\ creciente$$

$$(6,12)\rightarrow f'(10)=\frac{5}{6}(100-240+108)<0\rightarrow f(t)\ estrictamente\ decreciente$$

$$(12,20)\rightarrow f'(15)=30-40<0\rightarrow f(t)\ estrictamente\ decreciente$$

$$(20,24)\rightarrow f'(22)=44-40>0\rightarrow f(t)\ estrictamente\ creciente$$

En $t=6$ encontramos un máximo relativo. En $t=20$ un mínimo relativo.

b) Los extremos absolutos se obtienen estudiando la imagen de los extremos relativos y de los puntos frontera.

$$f(0)=90\ (mínimo\ absoluto\ a\ las\ 0\ horas)$$

$$f(6)=330\ (máximo\ absluto\ a\ las\ 6\ horas)$$

$$f(12)=210$$

$$f(20)=146$$

$$f(24)=162$$

c) Después del mediodía implica $t>12$. En ese tramo, buscamos cuando la función es igual a 155.

$$t^2-40\,t+546\ =155$$

$$t^2-40\,t+391\ =0$$

$$t=17\ horas, t=23\ horas$$

PROBLEMA 2

a) El índice de audiencia de un programa de radio se puede modelizar por una función del tipo:

$$\boldsymbol{f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c, \qquad t \in [0, 60]}$$

Donde t es el tiempo medido en minutos y $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Se sabe que cuando comienza el programa el índice de audiencia es 20 puntos y que a los 40 minutos se alcanza el máximo índice de audiencia, que es 36 puntos. Determine a, b, c y represente gráficamente la función obtenida.

b) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$\boldsymbol{g(x) = ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \text{ , } h(x) = (2x-1)e^{x^2-x}}$$

a) Al inicio, en $t = 0\ minutos$, el índice es 20. Por lo tanto:

$$f(0) = 20 \rightarrow c = 20$$

A los 40 minutos se alcanza el máximo, que vale 36 puntos. Por lo tanto:

$$f(40) = 36 \rightarrow a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + 20 = 36 \rightarrow 1600a + 40b = 16 \rightarrow 200a + 5b = 2$$

Además, en una función parabólica, el máximo absoluto también es máximo relativo. Por lo que se cumple que la primera derivada evaluada en $t = 40\, minutos$ debe ser igual a cero.

$$f'(t) = 2at + b$$

$$f'(40) = 0 \rightarrow 80a + b = 0$$

Así obtenemos un sistema 2x2.

$$\begin{cases} 200a + 5b = 2 \\ 80a + b = 0 \end{cases} \rightarrow 200a - 400a = 2 \rightarrow a = -\frac{1}{100} \rightarrow b = \frac{4}{5}$$

Obtenemos la parábola:

$$f(t) = -\frac{1}{100}t^2 + \frac{4}{5}t + 4$$

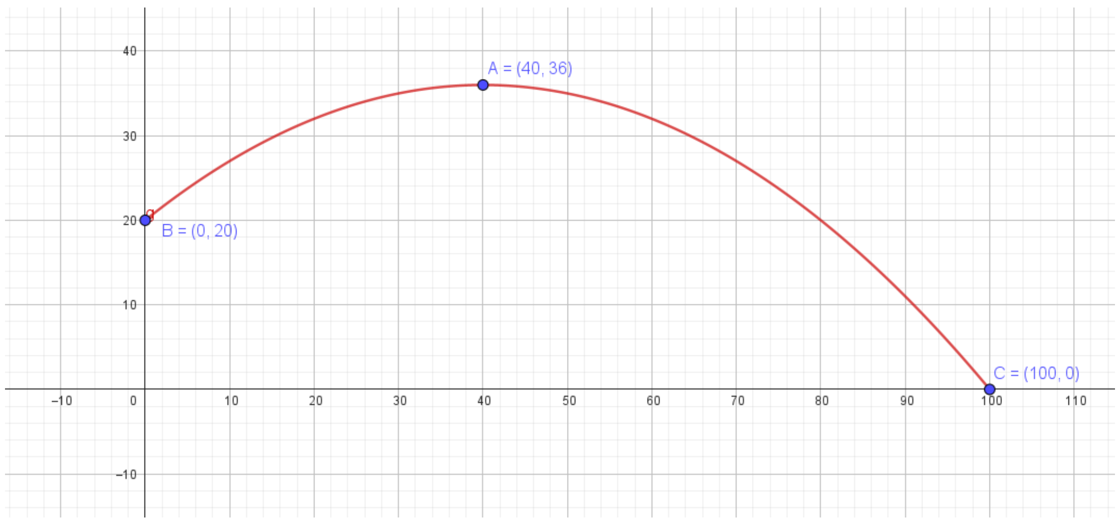
Conocemos el corte con el eje vertical: (0, 20).

Conocemos las coordenadas del máximo: (40, 36)

Podemos obtener los puntos de corte con el eje horizontal igualando la función a cero:

$$-\frac{1}{100}t^2 + \frac{4}{5}t + 4 = 0 \rightarrow t = -20, t = 100$$

Tiene sentido real el tiempo positivo, por lo que debemos representar la gráfica de la función a partir del tiempo $t = 0$. Además, no tiene sentido un índice negativo, por lo que la gráfica de la parábola cóncava llegará hasta el punto (100,0).



b) $g(x) = ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

$$g'(x) = \frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \cdot \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$g'(x) = \frac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)} \rightarrow g'(x) = \frac{4x}{x^4-1}$$

$h(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$

$$h'(x) = 2 \cdot e^{x^2-x} + (2x-1) \cdot e^{x^2-x} \cdot (2x-1)$$

$$h'(x) = e^{x^2-x} \cdot (2 + (2x-1) \cdot (2x-1))$$

$$h'(x) = e^{x^2-1} \cdot (2 + 4x^2 - 1) \rightarrow h'(x) = e^{x^2-1} \cdot (1 + 4x^2)$$

PROBLEMA 3

El nivel de concentración de un alumno universitario durante un examen viene dado por la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2 \cdot t + 10 & 0 \leq t \leq 2,5 \\ t^2 + a \cdot t + b & 2,5 < t \leq 5 \end{cases}$$

Donde t es el tiempo en horas y a y b son números reales.

a) ¿Con qué nivel de concentración el alumno comienza el examen? Determine los valores de a y b para que la función f sea continua y derivable en $t = 2,5$.

b) Para $a = -8$ y $b = 22,5$, esboce la gráfica de la función f, estudiando previamente la monotonía y calculando en qué momentos se alcanzan los niveles máximo y mínimo de concentración.

a) Al inicio del examen, $t = 0$, el alumno comienza con un nivel de atención:

$$f(0) = 10$$

La función es continua en un punto frontera si se cumplen las siguientes condiciones:

$$Existe\ f(2,5) \to f(2,5) = -(2,5)^2 + 2 \cdot 2,5 + 10 \to f(2,5) = 8,75$$

$$L^- = \lim_{x \to (2,5)^-} (-t^2 + 2t + 10) = 8,75$$

$$L^+ = \lim_{x \to (2,5)^+} (t^2 + at + b) = 6,25 + 2,5a + b$$

$$L^- = L^{=L} \to 8,75 = 6,25 + 2,5a + b \to 2,5 = 2,5a + b$$

$$f(2,5) = L \to 8,75 = 8,75$$

Además, la función será derivable en los puntos frontera si coinciden las derivadas laterales. Al derivar la función a trozos, dejamos abiertos los puntos frontera (a la espera de demostrar que la función es derivable en ellos).

$$f'(t) = \begin{cases} -2t + 2 & 0 < t < 2,5 \\ 2t + a & 2,5 < t < 5 \end{cases}$$

$$f'(2,5^-) = -2 \cdot 2,5 + 2 \to f'(2,5^-) = -3$$

$$f'(2,5^+) = 2 \cdot 2,5 + a \to f'(2,5^+) = 5 + a$$

$$f'(2,5^-) = f'(2,5^+) \to -3 = 5 + a \to -8 = a$$

Una vez fijado el valor de a, podemos sacar el valor de b.

$$2,5 = 2,5(-8) + b \to b = 22,5$$

b) La monotonía de la función se estudia obteniendo los puntos críticos, y evaluando la derivada en diferentes intervalos. La condición necesaria de extremo relativo implica anular la primera derivada. Por lo tanto:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2 \cdot t + 10 & 0 \leq t \leq 2,5 \\ t^2 - 8 \cdot t + 22,5 & 2,5 < t \leq 5 \end{cases}$$

$$f'(t) = \begin{cases} -2t + 2 & 0 < t < 2,5 \\ 2t - 8 & 2,5 < t < 5 \end{cases}$$

$$(0, 2.5) \to -2t + 2 = 0 \to t = 1 \in (0, 2.5)$$

$$(2.5, 5) \to 2t - 8 = 0 \to t = 4 \in (2.5, 5)$$

Con los extremos de los intervalos de definición y con el punto crítico, miramos el signo de la derivada:

$$(0, 1) \to t = 0.5 \to f'(0.5) = -2(0.5) + 2 > 0 \to f(t)\ estrictamente\ creciente$$

$$(1, 2.5) \to t = 2 \to f'(2) = -2(2) + 2 < 0 \to f(t)\ estrictamente\ decreciente$$

$$(2.5, 4) \to t = 3 \to f'(3) = 2(3) - 8 < 0 \to f(t)\ estrictamente\ decreciente$$

$$(4, 5) \to t = 4.5 \to f'(4.5) = 2(4.5) - 8 > 0 \to f(t)\ estrictamente\ creciente$$

Extremos relativos:

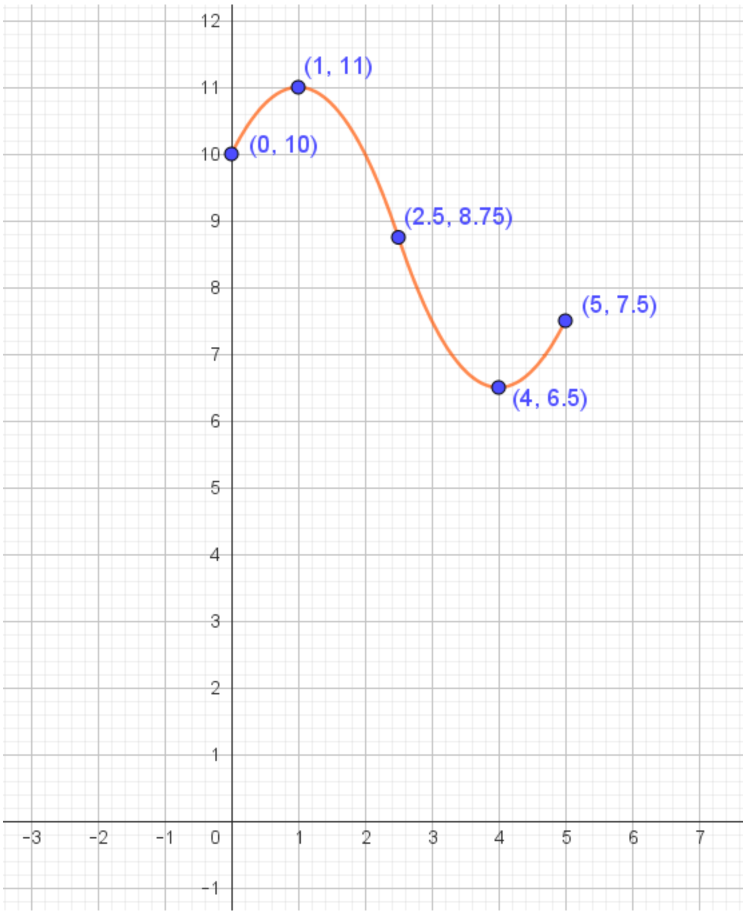
$$t = 1 \to imagen \to f(1) = -(1)^2 + 2(1) + 10 \to f(1) = 11 \to punto\ (1, 11)\ máximo\ relativo$$

$$t = 4 \to imagen \to f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 22.5 \to f(4) = 6.5 \to punto\ (4, 6.5)\ mínimo\ relativo$$

La función es continua en el punto frontera $t = 2.5$, siendo la imagen en ese punto: $f(2.5) = 8.75$.

En $t = 0$ la imagen vale 10. Mientras que en $t = 5$ la función vale 7.5.

Solo debemos dibujar la función en el intervalo $[0, 5]$. En ese intervalo, debido a las coordenadas del máximo y del mínimo relativo, no encontramos cortes con el eje horizontal.


(1, 11)
(0, 10)
(2.5, 8.75)
(5, 7.5)
(4, 6.5)

PROBLEMA 4

El número de litros por metro cuadrado que llovió en un determinado lugar viene dado por la función siguiente:

$$Q(t) = \frac{-t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10$$

Donde t es el tiempo en días que va desde t=1 (lunes) hasta t=8 (lunes de la semana siguiente).

a) Determina en qué día de la semana llovió más y en qué día llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovió esos días?

b) Representa gráficamente la función durante los 8 días.

a) Los días en los que llovió más y en los que llovió menos, dentro de un intervalo, son los extremos absolutos. Para obtenerlos, debemos calcular la imagen de los extremos del intervalo y la imagen de los extremos relativos.

$Q' = \frac{-3}{8}t^2 + 3t - \frac{9}{2} \to Q' = 0 \to t = 2,\ t = 6$ puntos críticos

$$Q'' = \frac{-3}{4}t + 3$$

$Q''(2) > 0 \to t = 2$ es un mínimo relativo $\to$ coordenadas $(2, Q(2)) = (2{,}6)$

$Q''(6) < 0 \to t = 6$ es un máximo relativo $\to$ coordenadas $(6, Q(6)) = (6{,}10)$

Evaluamos los extremos del intervalo en la función.

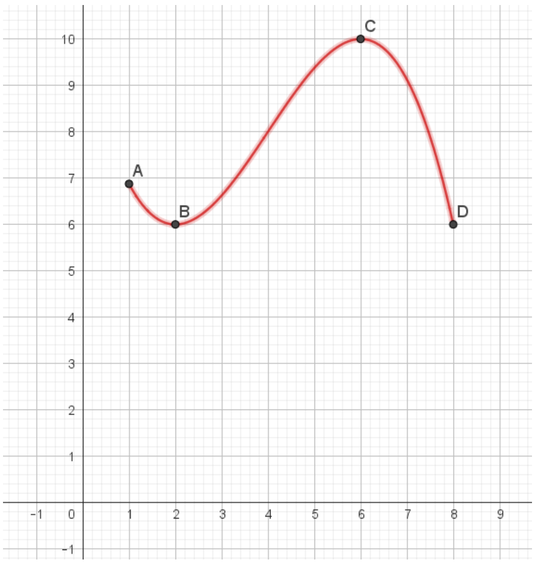
$(1, Q(1)) = (1{,}6{,}875)$

$(8, Q(8)) = (8{,}6)$

El día de mayor precipitación (máximo absoluto) es $t = 6$ (sábado), con una lluvia de 10 litros por metro cuadrado.

El día de menor precipitación (mínimo absoluto) es $t = 2$ (martes) y $t = 8$ (lunes de la otra semana), ambos con 6 litros por metro cuadrado.

b) La función es polinómica. Por lo que es continua en toda la recta real. Tenemos los valores de las imágenes en el inicio y en el fin del intervalo [1,8] y en los extremos relativos. Conocemos también los extremos absoluto. La función es suave por ser polinómica y no presenta asíntotas por ser un polinomio.



PROBLEMA 5

Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día. La función $v(t)$ nos indica, el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo t, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función $v(t)$ se conoce que su variación instantánea es:

$$\boldsymbol{v'(t) = t^2 - 5t + 6, \quad t\epsilon[0, 6]}$$

Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función v, y las abscisas de los extremos relativos.

Conocemos la derivada de la función v. Por lo que la igualamos a cero para sacar los puntos críticos. Además, como la derivada es un polinomio, significa que la función original también es un polinomio, por lo que la función es continua en toda la recta real.

$$v' = 0 \rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \rightarrow t = 2, t = 3 \ \in [0,6]$$

Miramos el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

$$[0,2) \rightarrow t = 1 \rightarrow v'(1) = 1 - 5 + 6 > 0 \rightarrow v(t) \ estrictamente \ creciente$$

$$(2,3) \rightarrow t = 2.5 \rightarrow v'(1) = (2.5)^2 - 5 \cdot 2.5 + 6 < 0 \rightarrow v(t) \ estrictamente \ decreciente$$

$$(3,6] \rightarrow t = 5 \rightarrow v'(5) = 5^2 - 5 \cdot 5 + 6 > 0 \rightarrow v(t) \ estrictamente \ creciente$$

$$t = 2 \rightarrow máximo \ relativo$$

$$t = 3 \rightarrow mínimo \ relativo$$

PROBLEMA 6

Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo.
Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

La condición necesaria de extremo relativo es primera derivada igual a cero.

$$c' = 0 \rightarrow c' = e^{-t/2} + te^{-t/2}(-1/2) \rightarrow e^{-t/2} + te^{-t/2}(-1/2) = 0 \rightarrow e^{-t/2}(1 - \tfrac{t}{2}) = 0$$

La exponencial nunca se anula, por lo que la única solución posible resulta:

$1 - \frac{t}{2} = 0 \rightarrow t = 2\, horas \rightarrow$ punto crítico

Aplicamos la condición suficiente evaluando el signo de la segunda derivada en el punto crítico.

$$c'' = e^{-t/2}(-1/2) + e^{-t/2}(-1/2) + te^{-t/2}(1/4)$$

$c''(2) = \frac{-e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1}}{2} + \frac{e^{-1}}{2} = \frac{-e^{-1}}{2} < 0 \rightarrow t = 2\, horas$ es un máximo relativo

La concentración que se alcanza en el momento de máximo relativo será la imagen de la función $c(t)$ para $t = 2\, horas$.

$$c(2) = 2e^{-1} = \frac{2}{e} \simeq 0{,}74$$

La función $c(t)$solo presenta un extremo relativo, por lo que al ser continua en toda la recta real por ser producto de polinomio y exponencial, el máximo relativo también será absoluto. Como la concentración máxima resulta $0{,}74\, mg/ml < 1\, mg/ml$, en ningún momento hay riesgo para el paciente.

PROBLEMA 7

Los beneficios de una empresa en sus primeros 8 años de vida, en millones de euros, vienen dados por la función:

$$\boldsymbol{B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9}$$

Donde t es el tiempo transcurrido en años.

a) Estudia la monotonía y los extremos de $B(t)$.

b) Representa gráficamente la función en el intervalo [0, 8] y explicar en este intervalo la evolución de los beneficios.

a) El dominio de la función es toda la recta real, por ser un polinomio. Derivamos para estudiar la monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento).

$$B' = \frac{3t^2}{4} - 6t$$

La condición necesario de extremo relativo es primera derivada nula.

$$B' = 0$$

$$\frac{3t^2}{4} - 6t = 0$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = 8$$

Tenemos dos puntos críticos. Evaluamos el signo de la derivada en el interior de los siguientes intervalos:

$$(-\infty, 0) \rightarrow por\ ejemplo\ t = -10 \rightarrow B'(1-10) = \frac{300}{4} + 60 > 0 \rightarrow B\ estrictamente\ creciente$$

$$(0,8) \rightarrow por\ ejemplo\ t = 1 \rightarrow B'(1) = \frac{3}{4} - 6 < 0 \rightarrow B\ estrictamente\ decreciente$$

$$(8, +\infty) \rightarrow por\ ejemplo\ t = 10 \rightarrow B'(10) = \frac{300}{4} - 60 > 0 \rightarrow B\ estrictamente\ creciente$$

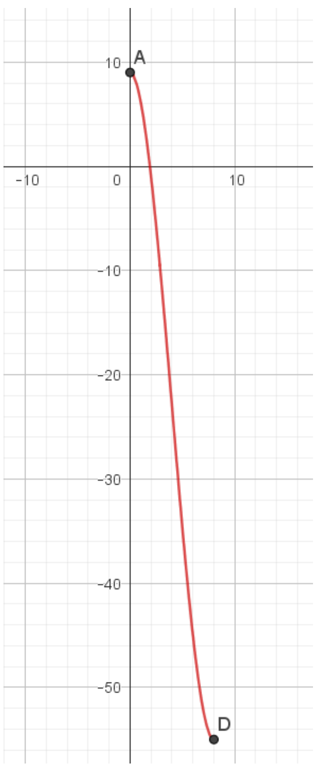
Por lo tanto, en $t = 0$ encontramos un máximo relativo y en $t = 10$ un mínimo relativo.

b) Si acotamos el estudio de la gráfica al intervalo [0,8] los extremos relativos se convierten en absolutos, con imágenes:

$$B(t = 0) = 9\ millones\ de\ euros$$

$$B(t = 8) = -55\ millones\ de\ euros$$

El máximo de beneficios se obtiene para el instante inicial $t = 0$, decayendo la gráfica hasta llegar a unas perdidas de 55 millones de euros en $t = 8\ años$ (gráfica estrictamente decreciente en el intervalo $(0,8)$).



PROBLEMA 8

Una empresa que fabrica bolsos estima que los costes de producción para x unidades son:

$$C(x) = 0.2x^2 - 50x + 2500$$

Si cada bolso se vende a 90 euros, se pide:

a) Determinar la función beneficio (ingresos menos coste) en función de x (número de unidades producidas), asumiendo que se vende todo lo que se produce.

b) ¿Cuántas unidades deben venderse para que los beneficios sean máximos?

c) Hallar el valor de dichos beneficios máximos.

a) El beneficio es la resta de los ingresos menos los costes.

Ingreso: $90x$

Costes: $C(x)$

Función beneficio:

$$B(x) = 90x - (0.2x^2 - 50x + 2500)$$
$$B(x) = -0.2x^2 + 130x - 2500$$

b) Optimizamos esta función, calculando su derivada. Como es un polinomio, su dominio es toda la recta real. Aunque solo tiene sentido físico para valores de x positivos (no tiene sentido una fabricación negativa de bolsos).

$$B' = -0.4x + 130$$
$$B' = 0$$
$$-0.4x + 130 = 0$$
$$x = 325\ unidades\ (punto\ crítico)$$

Evaluamos el punto crítico en la segunda derivada:

$$B'' = -0.4$$
$$B''(x = 325) = -0.4 < 0$$

Como la segunda derivada evaluada en el punto crítico es negativa, significa que el punto crítico $x = 325$ es un máximo relativo. Como es el único extremos relativo de la función, también será máximo absoluto.

c) El beneficio máximo se obtiene con la imagen en la función $B(x)$ del valor $x = 325$.

$$B(x) = -0.2x^2 + 130x - 2500$$
$$B(325) = -0.2(325)^2 + 130(325) - 2500 \rightarrow B(325) = 18.625€$$

PROBLEMA 9

En una granja dedicada a la cría de pollos, el peso de los mismos en función de la edad viene dado por la función:

$$\boldsymbol{P(x)=\begin{cases}-x^2+bx \ \ si\ 0\le x\le 21\\ c\ \ si\ \ x>21\end{cases}}$$

Donde x representa la edad en días y P el peso en gramos. Se sabe que la función es continua y que a los 14 días un pollo pesa 2198 gramos.

a) Determinas las constantes b y c.

b) Representar gráficamente el peso en función de x.

a) La función debe ser continua en los puntos frontera.

$$\exists f(21)=-(21)^2+b(21)\to f(21)=-441+21b$$

$$L^-=-441+21b$$

$$L^+=c$$

$$L^-=L^+=L\to -441+21b=c$$

$$f(21)=L\to -441+21b=-441+21b\ (Tautología)$$

Sabemos que para $x=14$ la imagen vale 2198 gramos:

$$f(14)=2198\to -(14)^2+b(14)=2198\to -196+14b=2198\to b=171$$

Sustituyendo en la condición de continuidad:

$$-441+21(171)=c$$

$$c=3150$$

b) La función queda $P(x)=\begin{cases}-x^2+171x\ \ si\ 0\le x\le 21\\ 3150\ si\ \ x>21\end{cases}$

En el intervalo [0,21] tenemos una parábola cóncava. A partir de los 21 días, tenemos una recta horizontal.

El vértice de la parábola lo obtenemos con: $x_{vértice}=-\frac{b}{2a}=\frac{-171}{2(-1)}=85.5$. Este valor del vértice queda fuera del intervalo [0,21]. En este intervalo la gráfica será estrictamente creciente, por ser anterior al vértice de la parábola cóncava (que sería un máximo relativo).