	Hoja de trabajo No. 3	Temas: EDO LINEALES
Metodología: Actividad matemática. Explorar, formular preguntas, conjeturar y validar.	Recursos: Lápiz, papel, GeoGebra, Recursos Educativos Abiertos (REA).	Fecha: Semana 8. _____________ ________________________

ENFOQUE DE COMPETENCIAS
¿Cómo pongo en juego los conocimientos que he adquirido?
¿Qué problemas puedo resolver con esos conocimientos?

INSTRUCCIONES.
Atienda la presentación preliminar del profesor, que le dará pautas para desarrollar el plan de trabajo.

MOTIVACIÓN.

La mayoría de los problemas que se resuelven con *Matemáticas aplicadas* se aproximan inicialmente con un modelo lineal del tipo $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$**,** para el cual se cuenta con resultados teóricos estructurados, que facilitan la comprensión del problema y los primeros acercamientos a las posibles soluciones. Este tipo de modelo tiene la ventaja adicional, muy relevante hoy en día, de facilitar implementaciones computacionales altamente eficientes. Ya en la práctica, atendiendo a los comportamientos reales de los fenómenos estudiados, el modelo se corrige introduciendo los posibles *factores de error*, que también son estudiados desde diferentes perspectivas teóricas, y admiten experimentaciones numéricas que, en la actualidad, arrojan grados de precisión sumamente confiables.

<u>EDO lineales.</u>

1. En el contexto $y = y(x), x \in I$, una EDO lineal de orden n tiene la estructura:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

(Si $g(x) = 0$ se dice que la ecuación es **homogénea**).

a. Describa con sus palabras las características de las ecuaciones lineales.

R/

1. una ecuación diferencial es lineal cuando la variable dependiente es lineal y sus derivadas y^n, y^{n-1}…, y’ también lo son.
2. los coeficientes de la variable dependiente y sus derivadas dependen de la variable independiente
3. la linealidad solo se le exige a la variable dependiente y sus derivadas

b. Revise las EDO de primer orden con las que usted haya trabajado hasta el momento (por lo menos 5 casos concretos) y clasifíquelas como lineales y no lineales.

R/

1. **y':** $(y)^{1/3}$ no es lineal
2. y**y':** $x-1$ no es lineal
3. **y':** $(x-y)^{1/2}$ no es lineal
4. **y':** $Ln(1+y^2)$ no es lineal
5. **y':** x^2+y^2 no es lineal
6. **y':** $2yx^3 +3x^2$

c. Escriba tres ejemplos de EDO lineales (orden 2, 3 y 4, respectivamente) y tres ejemplos de EDO no lineales explicando, en los últimos casos, dónde falla la linealidad.

R/ Lineales

1. $X^2y'' + 2xy = 6$
2. $5e^xy''' + 2y''= -yx$
3. $6y^{(4)}+(y'''/2x) - y = 0$

No lineales

1. $yy'' + 2xy = 0$
2. $(y-1)y''' + 3y^2 = 3xy'$
3. $(x/y) + \tan(y'') = 9$

2. Con toda EDO lineal de orden n, de coeficientes reales, se puede asociar un polinomio de grado n:

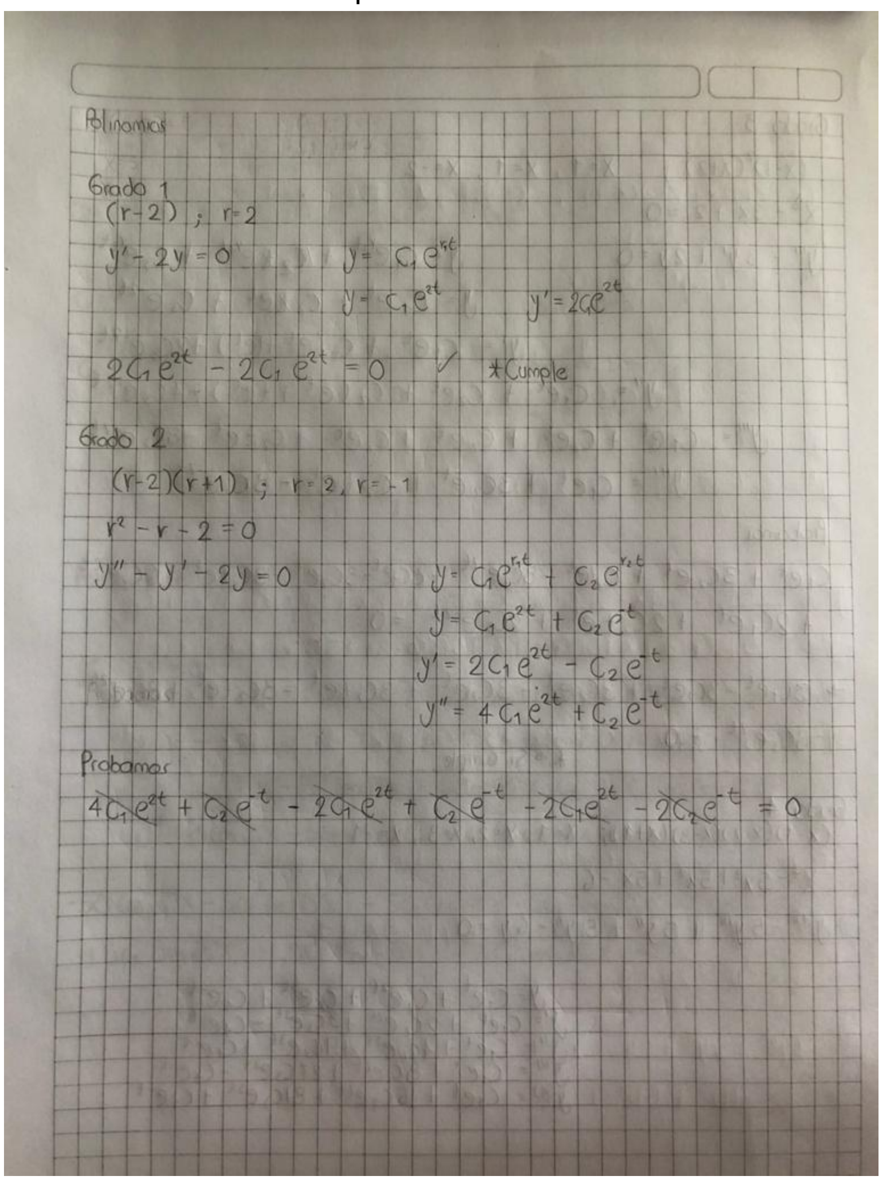
$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \cdots + a_1 r + a_0$$

que, de acuerdo con el *Teorema Fundamental del Álgebra*, podrá factorizarse en la forma:

$$P(r) = a_n (r - r_1)(r - r_2)(r - r_3) \ldots (r - r_n)$$

donde, en general, $r_j = a + b\boldsymbol{i}$ es una raíz compleja.

a. Construya 4 ejemplos de polinomios (de grado 1, 2, 3 y 4, respectivamente), en la forma factorizada, con raíces reales solamente ($b = 0$).
   i. Asocie, con cada ejemplo, la respectiva EDO lineal homogénea.
   ii. Verifique, en cada ejemplo, que para cada raíz r_j la función $y(x) = e^{r_j x}$ satisface la ecuación respectiva.



Polinomios

Grado 1

$(r-2)$; $r=2$

$y' - 2y = 0$ $\quad y = C_1 e^{rt}$

$y = C_1 e^{2t}$ $\quad y' = 2C_1 e^{2t}$

$2C_1 e^{2t} - 2C_1 e^{2t} = 0$ ✓ *Cumple

Grado 2

$(r-2)(r+1)$; $r=2,\ r=-1$

$r^2 - r - 2 = 0$

$y'' - y' - 2y = 0$ $\quad y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$

$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$

$y' = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t}$

$y'' = 4C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$

Probamos

$\cancel{4C_1 e^{2t}} + \cancel{C_2 e^{-t}} - \cancel{2C_1 e^{2t}} + \cancel{C_2 e^{-t}} - \cancel{2C_1 e^{2t}} - \cancel{2C_2 e^{-t}} = 0$

Grado 3

$(x-1)^2(x+2)\ ; \quad x=1,\ x=1,\ x=-2$

$x^3-3x+2=0$

$y'''-3y'+2y=0$

$$y = C_1e^{r_1t}+C_2te^{r_1t}+C_3e^{r_2t}$$

$$y = C_1e^{t}+C_2te^{t}+C_3e^{-2t}$$

$$y' = C_1e^{t}+C_2(e^{t}+te^{t})-2C_3e^{-2t}$$

$$y'' = C_1e^{t}+C_2e^{t}+C_2(e^{t}+te^{t})+4C_3e^{-2t}$$

$$y''' = C_1e^{t}+C_2e^{t}+C_2e^{t}+C_2e^{t}+C_2te^{t}-8C_3e^{-2t}$$

$$y''' = C_1e^{t}+3C_2e^{t}+C_2te^{t}-8C_3e^{-2t}$$

Probamos:

$$C_1e^{t}+3C_2e^{t}+C_2te^{t}-8C_3e^{-2t}-3C_1e^{t}-3C_2e^{t}-3C_2te^{t}+6C_3e^{-2t}$$
$$+2C_1e^{t}+2C_2te^{t}+2C_3e^{-2t}=0$$

$$\Rightarrow \cancel{3C_1e^{t}}-\cancel{3C_1e^{t}}+\cancel{3C_2e^{t}}-\cancel{3C_2e^{t}}+\cancel{3C_2te^{t}}-\cancel{3C_2te^{t}}+\cancel{8C_3e^{-2t}}$$
$$-\cancel{8C_3e^{-2t}}=0$$

* → Si cumple.

Grado 4

$(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)\ ; \quad x=1,\ x=2,\ x=3,\ x=-1$

$x^4-5x^3+5x^2+5x-6$

$y^{(4)}-5y'''+5y''+5y'-6y=0$

$$y = C_1e^{t}+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}+C_4e^{-t}$$

$$y' = C_1e^{t}+2C_2e^{2t}+3C_3e^{3t}-C_4e^{-t}$$

$$y'' = C_1e^{t}+4C_2e^{2t}+9C_3e^{3t}+C_4e^{-t}$$

$$y''' = C_1e^{t}+8C_2e^{2t}+27C_3e^{3t}-C_4e^{-t}$$

$$y^{(4)} = C_1e^{t}+16C_2e^{2t}+81C_3e^{3t}+C_4e^{-t}$$

$$y^{(4)}+5\underbrace{(-y'''+y''+y')}_{①}-6y=0$$

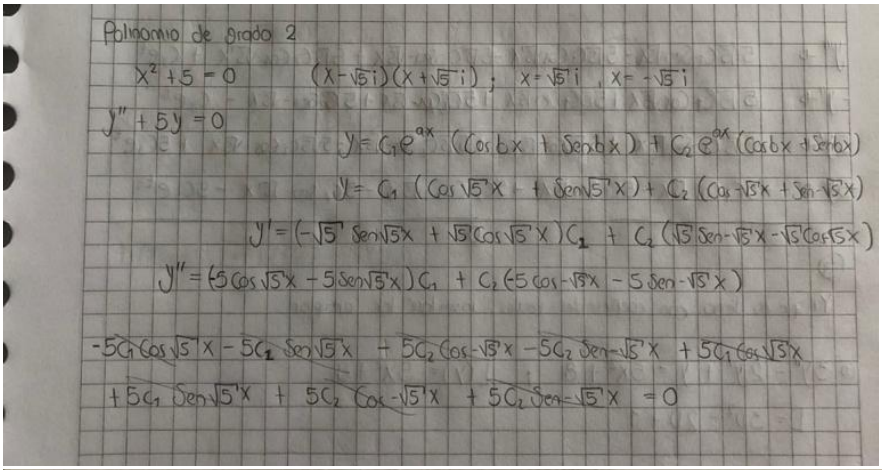
$$① = -\cancel{C_1e^{t}}-8C_2e^{2t}-27C_3e^{3t}+C_4e^{-t}+\cancel{C_1e^{t}}+4C_2e^{2t}+9C_3e^{3t}+\cancel{C_4e^{-t}}$$
$$+C_1e^{t}+2C_2e^{2t}+3C_3e^{3t}-\cancel{C_4e^{-t}}$$

$C_1e^{t}-2C_2e^{2t}-15C_3e^{3t}+C_4e^{-t}=①$, ahora vamos a la original

$$C_1e^{t}+16C_2e^{2t}+81C_3e^{3t}+C_4e^{-t}+5C_1e^{t}-10C_2e^{2t}-75C_3e^{3t}+5C_4e^{-t}$$
$$-6C_1e^{t}-6C_2e^{2t}-6C_3e^{3t}-6C_4e^{-t}=0$$

* Si cumple...

b. Construya dos ejemplos de polinomios (de grado 2 y 3, respectivamente), en la forma factorizada, combinando raíces reales y raíces con parte imaginaria distinta de cero. Repita los procesos i y ii del ítem anterior.



Polinomio de grado 2

$x^2+5=0 \qquad (x-\sqrt{5}i)(x+\sqrt{5}i)\ ; \quad x=\sqrt{5}i\ ,\ x=-\sqrt{5}i$

$y''+5y=0$

$y=C_1e^{ax}((\cos bx+\operatorname{Sen} bx))+C_2e^{ax}(\cos bx+\operatorname{Sen} bx)$

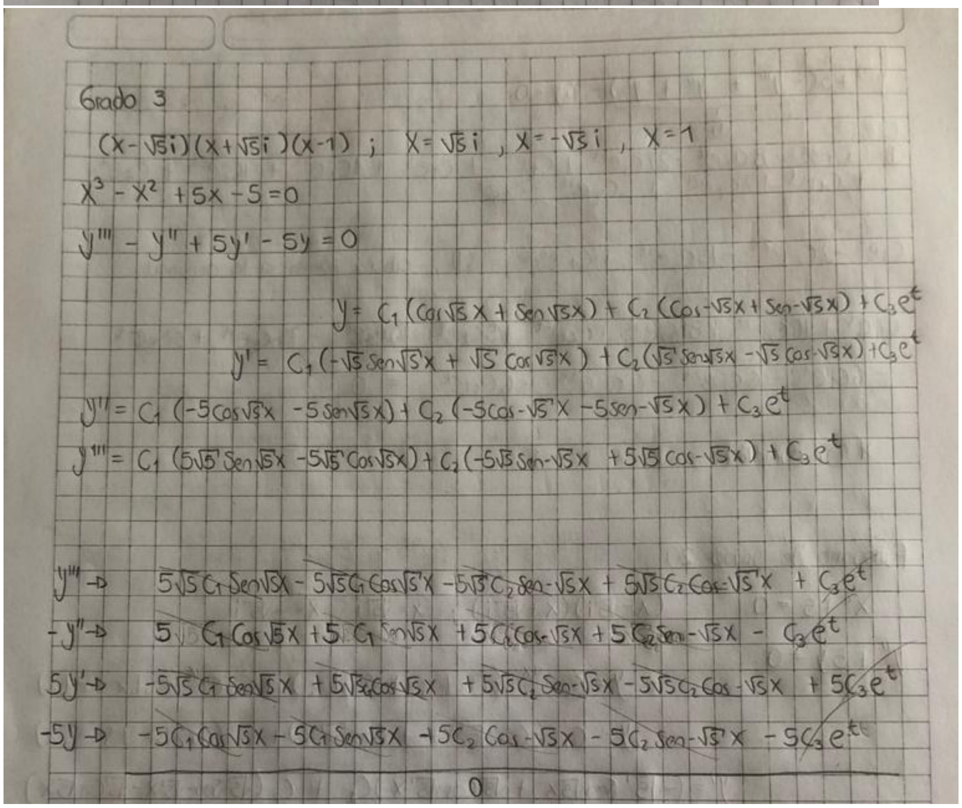
$y=C_1((\cos\sqrt{5}x+\operatorname{Sen}\sqrt{5}x))+C_2((\cos-\sqrt{5}x+\operatorname{Sen}-\sqrt{5}x)$

$y'=(-\sqrt{5}\operatorname{Sen}\sqrt{5}x+\sqrt{5}\cos\sqrt{5}x)C_1+C_2(\sqrt{5}\operatorname{Sen}-\sqrt{5}x-\sqrt{5}\cos\sqrt{5}x)$

$y''=(-5\cos\sqrt{5}x-5\operatorname{Sen}\sqrt{5}x)C_1+C_2(-5\cos-\sqrt{5}x-5\operatorname{Sen}-\sqrt{5}x)$

$-5C_1\cos\sqrt{5}x-5C_1\operatorname{Sen}\sqrt{5}x-5C_2\cos-\sqrt{5}x-5C_2\operatorname{Sen}-\sqrt{5}x+5C_1\cos\sqrt{5}x$

$+5C_1\operatorname{Sen}\sqrt{5}x+5C_2\cos-\sqrt{5}x+5C_2\operatorname{Sen}-\sqrt{5}x=0$



Grado 3

$(x-\sqrt{5}i)(x+\sqrt{5}i)(x-1)\ ; \quad x=\sqrt{5}i\ ,\ x=-\sqrt{5}i\ ,\ x=1$

$x^3-x^2+5x-5=0$

$y'''-y''+5y'-5y=0$

$y=C_1(\cos\sqrt{5}x+\operatorname{Sen}\sqrt{5}x)+C_2(\cos-\sqrt{5}x+\operatorname{Sen}-\sqrt{5}x)+C_3e^t$

$y'=C_1(-\sqrt{5}\operatorname{Sen}\sqrt{5}x+\sqrt{5}\cos\sqrt{5}x)+C_2(\sqrt{5}\operatorname{Sen}\sqrt{5}x-\sqrt{5}\cos-\sqrt{5}x)+C_3e^t$

$y''=C_1(-5\cos\sqrt{5}x-5\operatorname{Sen}\sqrt{5}x)+C_2(-5\cos-\sqrt{5}x-5\operatorname{Sen}-\sqrt{5}x)+C_3e^t$

$y'''=C_1(5\sqrt{5}\operatorname{Sen}\sqrt{5}x-5\sqrt{5}\cos\sqrt{5}x)+C_2(-5\sqrt{5}\operatorname{Sen}-\sqrt{5}x+5\sqrt{5}\cos-\sqrt{5}x)+C_3e^t$

$y'''\rightarrow\ 5\sqrt{5}C_1\operatorname{Sen}\sqrt{5}x-5\sqrt{5}C_1\cos\sqrt{5}x-5\sqrt{5}C_2\operatorname{Sen}-\sqrt{5}x+5\sqrt{5}C_2\cos-\sqrt{5}x+C_3e^t$

$-y''\rightarrow\ 5C_1\cos\sqrt{5}x+5C_1\operatorname{Sen}\sqrt{5}x+5C_2\cos-\sqrt{5}x+5C_2\operatorname{Sen}-\sqrt{5}x-C_3e^t$

$5y'\rightarrow\ -5\sqrt{5}C_1\operatorname{Sen}\sqrt{5}x+5\sqrt{5}C_1\cos\sqrt{5}x+5\sqrt{5}C_2\operatorname{Sen}-\sqrt{5}x-5\sqrt{5}C_2\cos-\sqrt{5}x+5C_3e^t$

$-5y\rightarrow\ -5C_1\cos\sqrt{5}x-5C_1\operatorname{Sen}\sqrt{5}x+5C_2\cos-\sqrt{5}x-5C_2\operatorname{Sen}-\sqrt{5}x-5C_3e^t$

0

c. Explique, en sus palabras, por qué es intuitivamente razonable suponer que las funciones exponenciales son soluciones de EDO lineales homogéneas.

Porque para estas EDO lineales homogéneas podemos sacar un polinomio al cual le podemos sacar sus raíces, y teniendo las raíces se puede calcular el conjunto de todas las soluciones para el EDO.

3. Con toda EDO lineal de orden n, de coeficientes reales, se puede asociar un *operador* de *dimensión* n:

$$L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \cdots + a_1D + a_0$$

donde D es el operador diferencial $\frac{d}{dx}$. Por ejemplo, la EDO $2y'' - y' + 3y = x + 5$ se escribe en *lenguaje de operadores* como $L(y) = x + 5$, con

$$L = 2D^2 - D + 3$$

a. Reescriba en el lenguaje de operadores los ejemplos de EDO lineales que ha construido en los puntos anteriores de esta hoja de trabajo

③

Ya que no tengo con coeficientes reales, inventaré los ejemplos

① $3y'' - 2y' + y = 5x^2 + 8$; $L(y) = 5x^2 + 8$

$L = 3D^2 - 2D + 1$

② $9y''' + 5y'' + 2y = x + 9$; $L(y) = x + 9$

$L = 9D^3 + 5D^2 + 2$

.

③ $y''' - 2y'' + 9y' + 5y = 16x^2 - 2x + 1$; $L(y) = 16x^2 - 2x + 1$

$L = D^3 - 2D^2 + 9D + 5$

d

b. Muestre que el operador $L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \cdots + a_1 D + a_0$ satisface las propiedades de linealidad que usted aprendió en el estudio de transformaciones lineales en su curso de álgebra lineal.

$L = a_n D_n + a_{n-1} D_{n-1} + \dots + a_1 D_1 + a_0$ $\quad a_n \neq 0$

$L_y = a_n D^n_y + a_{n-1} D^{n-1}_y + \dots + a_1 D^1_y + a_0 y$ $\quad D = \frac{d}{dx}$

$= a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$

—//—

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$

Por esto...

$L = g(x)$

F_1 y F_2 son funciones

a y b son constantes

$L(aF_1 + bF_2) = aL(F_1) + bL(F_2)$

$a_n D(aF_1 + bF_2)^n + a_{n-1} D(aF_1 + bF_2)^{(n-1)} + \dots + a_1 D(aF_1 + bF_2)' + a_0(aF_1 + bF_2)$

$a_n(DaF_1^n + DbF_2^n) + a_{n-1}(DaF_1^{(n-1)} + DbF_2^{(n-1)}) + \dots + a_1(DaF_1 + DbF_2) + a_0(aF_1 + bF_2)$

$a_n DaF_1^n + a_n DbF_2^n + a_{n-1} DaF_1^{(n-1)} + a_{n-1} DbF_2^{(n-1)} + \dots + a_1 DaF_1 + a_1 DbF_2 \dots$

$b(a_n DF_2^n + a_{n-1} DF_2^{(n-1)} + \dots + a_0 F_2) + a(a_n DF_1^n + a_{n-1} DF_1^{(n-1)} + \dots + a_0 F_1)$

$bL(F_2) + aL(F_1) \rightarrow aL(F_1) + bL(F_2)$

c. Muestre que el *Núcleo de* L*:* $N_L = \{y\text{: } L(y) = 0\}$, conjunto de soluciones de la EDO homogénea asociada a L, es un *Subespacio vectorial* del espacio de funciones n veces derivables.

$L = N_L = \{ y: L(y) = 0 \}$

$L(y) = 0$

$a_n D_n y + a_{n-1} D_{n-1} y + \dots + a_0 y = 0$

$L(y_1) = 0$ $\quad$ y_1 y y_2 son derivables

$L(y_2) = 0$ $\quad$ $a \rightarrow$ Contante $\quad a \neq 0$

$L(a y_1 + b y_2) = 0$

$a_n D(a y_1 + b y_2)^n + a_{n-1} D(a y_1 + b y_2)^{n-1} + \dots + a_0 (a y_1 + b y_2) = 0$

$a_n (D a y_1^n + D b y_2^n) + a_{n-1} (D a y_1^{(n-1)} + D b y_2^{(n-1)}) + \dots + a_0 (a y_1 + b y_2) = 0$

$a_n D a y_1^n + a_n D b y_2^n + a_{n-1} D a y_1^{(n-1)} + a_{n-1} D b y_2^{(n-1)} + \dots + a_0 a y_1 + a_0 b y_2 = 0$

$a(a_n D y_1^n + a_{n-1} D y_1^{(n-1)} + \dots + a_0 y_1) + b(a_n y_2^n + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \dots + a_0 y_2) = 0$

$a \underset{\downarrow\,0}{L(y_1)} + b \underset{\downarrow\,0}{L(y_2)}$

$0 + 0 = 0$

Resolución y formulación de problemas

1. Utilizando propiedades de las potencias de la unidad imaginaria $\boldsymbol{i}$ y combinando adecuadamente las series de Taylor de las funciones e^x, $\cos(x)$ y $sen(x)$, reconstruya el siguiente resultado:

$$e^{ix} = \cos(x) + isen(x).$$

1.

$$e^{ix} = \operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sen} x$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$$

Caso $t = ix$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots + \frac{(ix)^n}{n!}$$

$$i^2 = -1 \;,\quad i^3 = -i \;,\quad i^4 = 1 \;,\quad i^5 = i$$

$$i^{(2n)} = (-1)^n$$

$$i^{(2n+1)} = (-1)^n i$$

$$e^{ix} = \left(1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots + \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \dots\right) + \left(ix + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} \dots + \frac{(ix)^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\right)$$

$$e^{ix} = \left(1 + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \dots + \frac{i^{2n}x^{2n}}{(2n)!}\right) + i\left(x + \frac{i^2x^3}{3!} + \frac{i^4x^5}{5!} + \dots + \frac{i^{2n}x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\right)$$

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right)$$

$$e^{ix} = \operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sen} x$$

2. Escriba una prueba del siguiente resultado estudiado en álgebra lineal: *La solución general del Sistema de Ecuaciones Lineales no homogéneo* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, *se puede escribir como* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_h} + \boldsymbol{x_p}$, donde $\boldsymbol{x_h}$ es la solución general del sistema homogéneo asociado y $\boldsymbol{x_p}$ es una solución particular del sistema no homogéneo. ¿Usted considera que existe un resultado análogo para el problema no homogéneo en EDO $L(y) = g(x)$? Explique sus consideraciones e intuiciones.

Resolución de problemas

2.

$A_x = b$, Con solución general $X = X_n + X_p$

$X_n \to$ Solución del sistema homogeneo ; $A(X_n) = 0$

$X_p \to$ Solución particular ; $A(X_p) = b$

$X_n + X_p \to$ Solución de $Ax = b$

$$A(X_n + X_p) = b$$
$$A(X_n) + A(X_p) = b$$
$$0 + b = b$$
$$b = b$$

$\cdot \ A(X_n) = 0$

$X_n + X_p \to$ Solución ✓

$L(y) = g(x)$ $\quad y = y_c + y_p$

$y_c \to$ Solución del sistema homogeneo $L(y) = 0$

$$L(y_c) = 0$$

$y_p \to$ Solución particular del sistema $L(y) = g(x)$

$$L(y_p) = g(x)$$

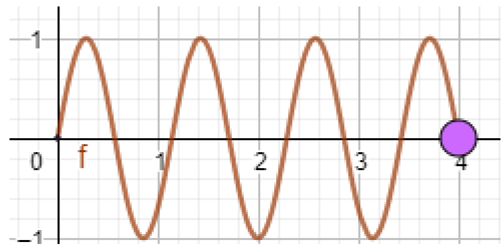
$y_c + y_p \to$ Solución del sistema $L(y) = g(x)$

$$L(y_c + y_p) = g(x)$$
$$L(y_c) + L(y_p) = g(x)$$
$$0 + g(x) = g(x)$$
$$g(x) = g(x)$$

Entonces $L(y_c + y_p) = g(x)$

Proyecto 2.

1. **Osciladores armónicos.**
   a. En la imagen siguiente se muestra la gráfica en GeoGebra de una función
   $$f(x) = sen(ax), \qquad 0 \leq x \leq b, \qquad a, b \in \mathbb{R}\ (b = 4\ para\ el\ ejemplo)$$

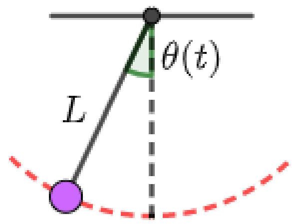


La gráfica de 7 picos, en este caso, la identificaremos como un resorte de 7 *bucles*. El resorte está anclado en el origen y tiene adherida en el extremo del último bucle una masa, representada por un punto configurado de tamaño grande en GeoGebra. Al asociar el número b a un deslizador se podrá simular por animación un sistema masa-resorte en movimiento.
Construya un aplicativo en GeoGebra con las características siguientes:
El usuario selecciona: i) os valores de la masa, la constante de elasticidad y el número de bucles del resorte. ii) los datos iniciales de un PVI de segundo orden asociado al sistema masa resorte libre no amortiguado. iii) a constante de amortiguación y los datos iniciales de un PVI de segundo orden asociado al sistema masa resorte libre amortiguado.

.

El aplicativo entrega como salida la animación del sistema masa resorte, en posición vertical, asociando al valor del extremo b del intervalo la función solución del PVI de segundo orden correspondiente.

b. En la imagen siguiente se muestra un punto parametrizado en GeoGebra de tal manera que recorre un arco de circunferencia de radio L, para simular un péndulo anclado al origen de coordenadas.



Utilice este tipo de construcción para modelar en GeoGebra el movimiento de un péndulo, asociando al ángulo $\theta(t)$ la función solución de un PVI de segundo orden relacionado con este tipo de movimiento oscilatorio. Debe incluir en su modelo las opciones de variar la información pertinente al problema.

2. **Resonancia.**
   Los movimientos oscilatorios *forzados* pueden entrar en *Resonancia*. Lea en el texto sobre este fenómeno.
   a. Modele en GeoGebra un resorte que entre en Resonancia.
   b. Investigue una aplicación práctica del fenómeno de Resonancia en problemas de ingeniería.