Blaschke's Frage & Darboux Cycliden c

Diese Aktivität ist eine Seite des ***geogebra-books*** ***[Moebiusebene](#)*** ***13. März 2020***

W. Blaschke und **G. Bol** haben **1938** die Frage nach allen ***6-Eck-Netzen*** aus ***Kreisen*** (*hexagonal web*, *3-web of circles*) gestellt,
- Literatur **[BLA_BOL]**.

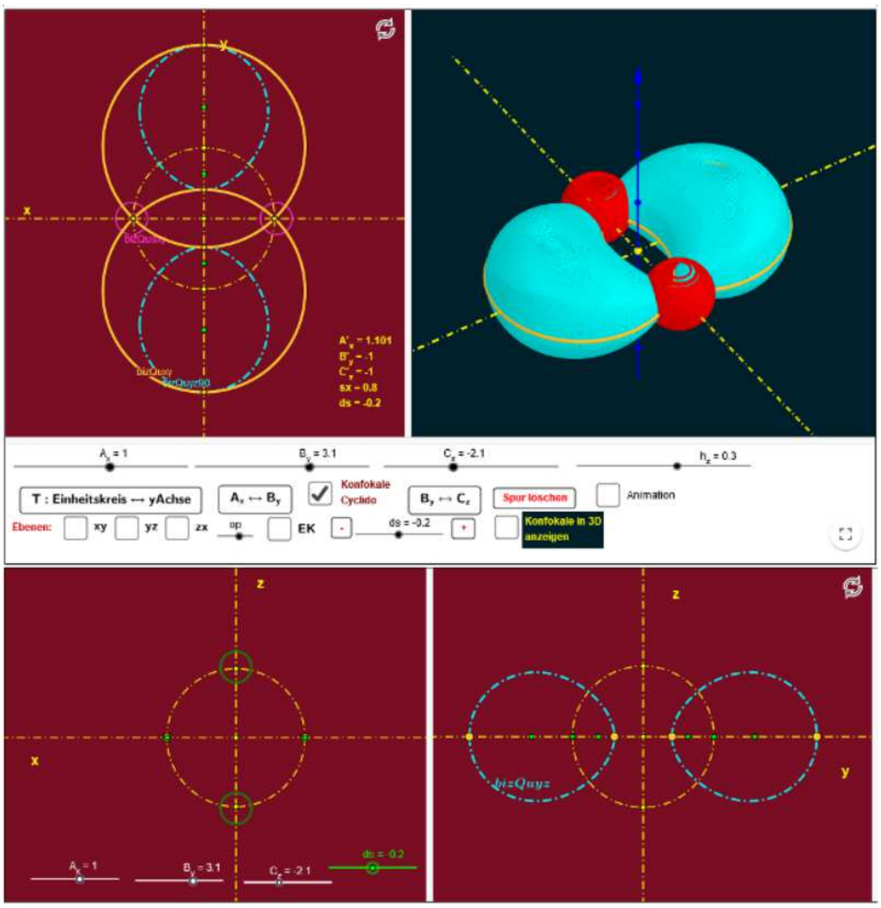
- Man bestimme und charakterisiere alle ***Sechseck-Gewebe***, die sich aus drei ***Kreisscharen*** bilden lassen!

3 ***Geradenbüschel*** bilden stets ein ***6-Eck-Netz***. Möbiusgeometrisch sind ***Geraden*** spezielle ***Kreise***: auf der **RIEMANN**schen Zahlenkugel sind es genau die ***Kreise***, die durch den "Nordpol" ∞ gehen.
Der Satz von **GRAF** und **SAUER** Lit. **[GRA_SA]** besagt, dass 3 ***Geradenscharen*** genau dann ein ***6-Eck-Netz*** bilden, wenn sie Tangenten einer ***Kurve 3. Klasse*** sind.
Alle ***6-Eck-Netze*** aus 3 ***Kreisbüschel*** wurden von uns **1982** aufgelistet und mit *Zirkel, Lineal und Tuschefeder* zu Papier gebracht Lit. **[FÜW]**. Leider ist der rechnerische Nachweis sehr umständlich, eine zündende Idee wäre erfreulich; zitiert wird in diesem Zusammenhang meist eine Arbeit von **A. M. SHELEKHOV 2007** Lit. **[SHEL].**
Im vorliegenden ***ge*** ***gebra-book*** werden diese speziellen ↪ ***6-Eck-Netze*** aus ***Kreisbüscheln*** aufgelistet und dargestellt.
W. WUNDERLICH (Lit. **[WUNW]**) hat ***1938*** gezeigt, dass sich aus den ***doppelt-berührenden Kreisen*** von bestimmten ***bizirkularen Quartiken*** ***6-Eck-Netze*** aus ***Kreisen*** bilden lassen.
Man vergleiche zu diesem Thema das ***geogebra-book*** ***Sechseck-Netze***
und die vorangegangenen Kapitel dieses ***books***.

Bei der Beschäftigung mit der Frage nach den ***Kreis-Netzen*** wird man immer wieder mit den ***bizirkularen Quartiken*** konfrontiert.
Dies umso mehr, wenn man sich den ***räumlichen 6-Eck-Netzen*** aus ***Kreisen*** auf Flächen zuwendet. In manchen Übersichtsartikeln zu diesem Kontext wird behauptet, dass für alle Flächen - von der **Kugel** abgesehen - diese Frage gelöst sei. Dabei wird Bezug genommen auf den Artikel "*Darboux Cyclides and Webs from Circles*" von **H. POTTMANN**, **LING SHI** und **M. SKOPENKOV (2012** Lit. **[POT_et_ali])**.
Aufmerksam gelesen kann man aus dem Artikel nur folgern, dass auf ***Darboux Cycliden*** sämtliche ***hexagonalen Kreisnetze*** ermittelt sind. Die Autoren betonen, dass sie ihrer **Vermutung**, dass "Flächen, welche mit 3 oder mehr Kreisscharen überdeckt sind, ***Darboux Cycliden*** sind" - weiter nachgehen werden: ... that any surface which carries three families of circles is a ***Darboux Cyclid***; - die Kugel wird dabei selbstredend ausgeschlossen: "The problem of determining all ***hexagonal webs*** from ***circles*** in the plane (or equivalently on the sphere) turned out to be verry difficult", so die genannten Autoren.

- Was sind ***Darboux Cycliden***?

Bild vom Applet



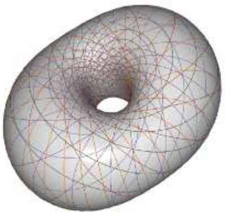
Darboux Cycliden

Nach dem französischen Mathematiker **Gaston DARBOUX** sind neben anderem ein ***Satz***, eine ***Summe*** und eben
diese ***Flächen 4. Ordnung*** mit einer Gleichung des folgenden Typs benannt:

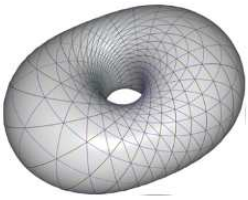
Dieser Flächentyp ist invariant unter ***Möbiustransformationen*** des Raumes. Viele bekannte interessante -, aber auch manche weniger geläufige Flächen zählen dazu: alle ***Quadriken***, alle möglichen ***Torus-Formen*** und damit die *wikipedia*-bekannten **DUPIN**schen Cycliden. Die unten zu sehenden Flächen haben es noch nicht zu wikipedia geschafft!

DARBOUXsche Cycliden sind nicht nur im übertragenen Sinne die ***räumlichen*** Fortsetzungen der ebenen oder sphärischen ***bizirkularen Quadriken***
$\lambda \cdot (x^2+y^2)^2 + (\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \cdot (x^2+y^2) + \gamma \cdot x^2 + \delta \cdot xy + \epsilon \cdot y^2 + \mu \cdot x + \nu \cdot y + \kappa = 0$.
Dieses ***geogebra-book*** **Möbiusebene** hat sich ausführlich mit diesem Kurventyp beschäftigt, viele der Eigenschaften dieser Kurven lassen sich einfach auf den Raum übertragen.
DARBOUXsche Cycliden haben seltsamerweise einen längeren Dornröschen-Schlaf hinter sich. Das Interesse ist erwacht von seiten der "Freiform-Archithektur".
Sucht man Literatur über ***bizirkulare Quartiken***, so findet man überwiegend Lehr-Bücher über ***Starkstrom-Technik***.
Warum dies? Wesentlich an ***bizirkularen Quartiken*** ist, dass sie als ***konfokale Quartiken*** auftreten, wie man dies von ***konfokalen Kegelschnitten*** kennt: Sie entstehen, wenn zwei ***Kreisbüschel*** sich "überlagern": die Kurven schneiden sich immer orthogonal (man denke an elektro-magnetische Wellen!)
Nun sind diese ***Wellen*** ja eigentlich nicht ***eben***, sondern räumlich! Daher dürften diese ***Cycliden*** auch die Starkstrom-Techniker, oder eigentlich jeden interessieren, der mit ***Wellen*** im Raum zu tun hat.

Der Grund dieser Aktivität? In dem oben genannten Artikel werden die ***Kreisscharen*** auf ***Darboux Cycliden*** charakterisiert:



Auf einer ***Darboux Cyclide*** können bis zu **6** verschiedene ***Kreisscharen*** liegen!
Wir erlauben uns, ein Bild aus dem im Internet zugänglichen Artikel als Hinweis auf diesen erstaunlichen Sachverhalt zu verwenden.



Wir hätten gerne die impliziten Flächen in ***geogebra*** dargestellt, doch 2. ten Grades scheint eine Grenze zu sein.
Die impliziten Kurven in der yz-Ebene und in der zx-Ebene darzustellen, gelingt uns auch nicht.
Eigentlich sollte im unteren Applet die Situation in der zx-Ebene bzw. in der yz- Ebene dargestellt werden.
Leider übersteigt die Anleitung zum Übertrag von Daten von Applet zu Applet unsere Fähigkeiten.

Erklärung zum Applet oben:
Wie für ***bizirkulare Quartiken*** in der Ebene lassen sich die zugehörigen Flächen im Raum projektiv als Schnitt der ***Möbiusquadrik*** mit einer 2. Quadrik erzeugen - jetzt allerdings weniger der Anschauung zugänglich in einem 4-dimensionlen Raum.
Im günstigsten Falle besitzt dieser Schnitt 5 ***Symmetrien***: das sind 5 paarweise orthogonale ***Symmetrie-Kugeln***, eine davon ist imaginär.
Wählt man die reellen ***Symmetrie-Kugeln*** als die 3 Koordinaten-Ebenen und die ***Einheitskugel***, so reduziert sich die Flächengleichung auf die Form:

- $(x^2+y^2+z^2)^2 - 2 \cdot A_x \cdot x^2 - 2 \cdot B_y \cdot y^2 - 2 \cdot C_z \cdot z^2 + 1 = 0$

Erkennbar schneidet diese Fläche jede der ***Koordinaten-Ebenen*** (sogar die ***Einheitskugel!)*** in einer ***bizirkularen Quartik*** in Normalform, wegen der ***Symmetrien*** liegen die ***Brennpunkte*** auf einer der Koordinaten-Achsen oder auf dem ***Einheitskreis*** der Ebene.
Wenn die ***Scheitel*** der Kurve auf einer Achse liegen, so lassen sich die ***Scheitelkoordinaten*** und die ***Brennpunktskoordinaten***
aus den biquadratischen Gleichungen mit einfachem "Quadratische Gleichung lösen"-Wissen bestimmen.

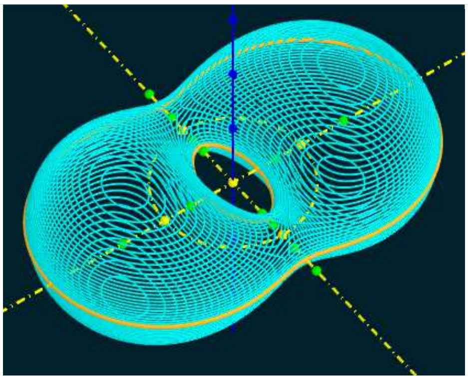
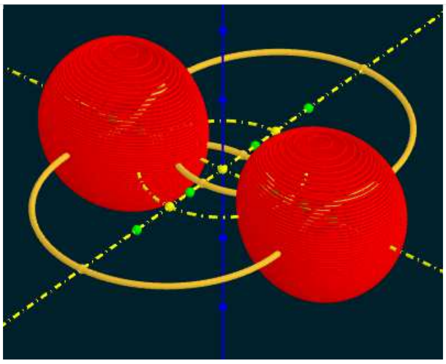
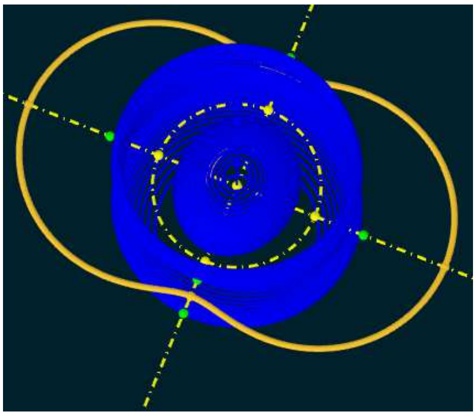
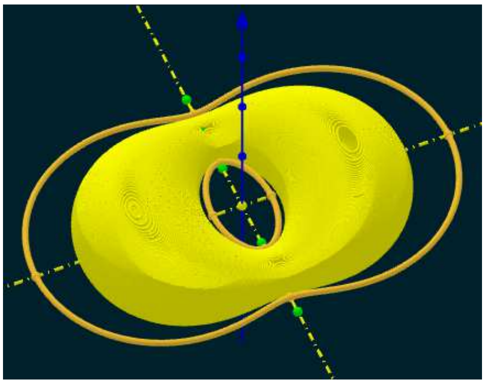
- $(x^2+y^2)^2 - x^2 \cdot \left(s^2 + \frac{1}{s^2}\right) + y^2 \cdot \frac{(f^4+1)\cdot(s^4+1) - 4 \cdot f^2 \cdot s^2}{(s^4+1)\cdot f^2 - (f^4+1)\cdot s^2} + 1 = 0$

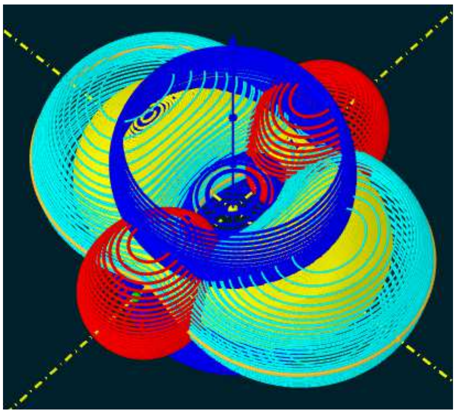
Erstaunlicherweise haben wir in der wunderschönen Arbeit über die ***Darboux Cycliden*** (siehe oberhalb des Applets!) keinerlei Hinweis auf ***Brennpunkte*** dieser Flächen gefunden - damit auch keinen Hinweis, dass diese Flächen zu ***konfokalen Flächensystemen*** gehören, die den Raum ausfüllen wie die ***konfokalen Kegelschnitte*** die Ebene.
Im Raum bekannt sind die ***konfokalen Quadriken***. ↪ *wikipedia,* wo auch ein Bild zu finden ist; siehe ↪ die Aktivität.

Fast nur als ***Erfahrungswert - ohne Beweis***: eine solche ***Darboux Cyclide*** mit 5 ***Symmetrien*** besitzt 3 * 4 ***Brennpunkte*** auf den ***Symmetrie-Ebenen*** oder ***- Kugeln***. Diese liegen auf Koordinaten-Achsen oder Einheitskreisen. 2 * 4 liegen zusammen auf einer Achse!! (Warum?)
Im Applet oben sind einfache räumliche ***Möbiustransformationen*** möglich (Ebenen-Tausch, Tausch der ***Einheitskugel*** mit einer Koordinaten-Ebene)

Liegen die 2 Quadrupel-Paare nach geeigneten ***Transformationen*** der ***Brennpunkte*** auf der x-Achse, so kann man mit dem Applet einige ***konfokale Darboux Cycliden*** mit ziemlich viel Geduld höhenlinienweise zeichnen lassen.

Bilder, die mit dem obigen Applet erstellt wurden:



Zum Bild oben: Die Torus-ähnliche ***Cyclide (cyan)***, die zweiteilige ***Cyclide (rot)*** und die zweiteilige (ineinanderliegende) ***Cyclide (blau)*** sind ***konfokal*** und sie schneiden sich ***orthogonal***. Die *gelbe Cyclide* liegt ganz innerhalb der ***blauen Cyclide*** ("parallel").
Durch jeden ***Punkt*** des Raumes (von den ***Brennpunkten*** abgesehen) gehen genau 3 paarweise orthogonale ***Cycliden*** der ***konfokalen Cyclidenschar***. Die Flächen werden "gezeichnet" aus den Höhenlinien in z-Richtung. Die ***Cycliden*** schneiden die Ebenen $z = const$ in ***bizirkularen Quartiken***.
Diese können in ***ge gebra*** implizit gezeichnet (mit x-y-Gleichung)

und in z-Richtung auf die gewünschte Höhe verschoben werden.
Leider lassen sich die Schnitte mit den anderen Koordinatenebenen nicht in diesen implizit "zeichnen".

Wie ermittelt man Kreise auf ***Darboux Cycliden***?
In dem zitierten Artikel findet man den Hinweis, dass ***doppelt berührende Kugeln*** die Fläche in zwei oder in einem ganz in der Fläche liegenden Kreisen schneiden.
Die ***Darboux Cycliden*** schneiden die ***Symmetrie-Ebenen*** in ***bizirkularen Quartiken***. Zu den ***doppelt berührenden Kreisen*** dieser Quartiken gehören aus Symmetriegründen ***Kugeln***, welche die ***Cyclide*** doppelt berühren.
Es muss fast nicht erwähnt werden: ***möbiusgeometrisch*** sind **Ebenen** ***Kugeln***!

Die ***Schnittkreise*** mit der ***Cyclide*** zerfallen oft in doppelt zählende ***Punktkreise***, das sind die Berührpunkte.
In vielen Fällen erhält man aber tatsächlich ***Kreise*** auf der ***Cyclide***!

Bekannte Beispiele:

- Berührebenen an einschalige ***Hyperboloide*** schneiden diese in den erzeugenden Geraden.
  ↪ Kreise auf Hyperboloiden
- Die ***VILLACEAU***-Kreise der ***Ring-Tori*** entstehen als Schnitt mit berührenden Ebenen.
  ↪ rotierende Kreise
- Die Kreise auf ***Ellipsoiden*** entstehen als Schnitt mit Berührkugeln.
  ↪ Kreise auf Ellipsoiden

*Vermutlich lassen sich weitere Eigenschaften der **bizirkularen Quartiken** auf die **Cycliden** übertragen:*

- Die Anzahl der ***Symmetrien*** bestimmt die Anzahl der verschiedenen ***doppelt berührenden Kreisscharen***. Zu jede dieser Kreisscharen gehört eine Schar doppelt berührender ***Kugeln***.
- Die doppelt berührenden Kreise und damit die ***Quartik*** selber sind ***Winkelhalbierende*** der ***Brennkreise***, also der Kreise, die durch jeweils zwei zusammengehörende ***Brennpunkte*** gehen.

- Die ***Quartik*** läßt sich mit Hilfe der ***Leitkreise*** "konstruieren". Die ***Leitkreise*** dürften auch für die ***Cycliden*** eine Rolle spielen.
- Konfokale bizirkulare Quartiken sind die Lösungskurven ***spezieller elliptischer Differentialgleichungen***. Diese Eigenschaften dürften im Raum eine Entsprechung besitzen!

In der Ebene lassen sich die ***Quartiken*** einfach durch die Lage der ***Brennpunkte*** charakterisieren:

- 4 verschiedene ***konzyklische*** ***Brennpunkte*** ergeben 2-teilige ***Quartiken*** mit 4 Symmetrien.
- 4 verschiedene ***Brennpunkte***, die symmetrisch auf 2 orthogonalen Kreisen liegen, ergeben 1-teilige ***Quartiken*** mit 2 Symmetrien.
- Fallen 2 ***Brennpunkte*** zusammen, so ergeben sich die möbiusgeometrischen Bilder von ***konfokalen Kegelschnitten***.
- Ein 3-facher ***Brennpunkt*** ergibt entsprechend ***konfokale Parabeln*** mit einer Symmetrie.
- 2 doppelt zählende ***Brennpunkte*** ergeben ***Kreisbüschel***
- ein 4-fach zählender ***Brennpunkt*** ist der Berührpunkt eines ***parabolischen Kreisbüschels***.