Matematická kartografie

Zabývá se:

- Matematickými a geometrickými parametry kartografických děl.
- Převodem údajů z jedné referenční plochy (elipsoid, koule) do druhé (rovina kartografického zobrazení, tj. mapa).

Obě plochy mají **různou** křivost.

Důsledkem rozdílných křivostí při zobrazování => vznik deformací označovaných jako **kartografická zkreslení**.

Matematická kartografie:

- Studuje vlastnosti a zákonitosti kartografických zkreslení.
- Zabývá se teorií kartografických zobrazení.

Kartografické zobrazení

Kartografické zobrazení:

- Odvozeno matematickou cestou.
- Existuje několik stovek kartografických zobrazení.

Kartografická projekce:

- Vznik geometrickou cestou, např. promítáním.
- Známy již ve starověku, např. Ptolemaiovo zobrazení

$$x = f(\varphi, \lambda)$$
$$y = g(\varphi, \lambda)$$

Popsány **zobrazovacími rovnicemi:**

- Souřadnice *x*, *y* obecně funkcí ϕ, λ (u jednoduchých zobrazení jenom funkcí jedné souřadnice).
- Pól je singulární bod v parametrizaci zeměpisnou šířkou a délkou
- Funkce *f*, *g* ne vždy spojité, diferencovatelné

Délkové zkreslení

- **Měřítko délek m:**

Poměr diferenciálních vzdáleností v obraze a originále. Bezrozměrné číslo.

$$m = \frac{dS}{ds}$$

m se ve většině případů blíží 1

- **Zkreslení délek:**

Udává vliv měřítka na délkovou jednotku.

$$\boxed{(m-1)s}$$

Nejčastěji ve tvaru: cm/km, dm/km

>0: Zobrazení prodlužuje délky

<0: Zobrazení zkracuje délky

Příklad:

m = 0.9999985

m – 1 = -0.000015

m - 1/km = -1.5 cm/km.

- **Ekvidistantní zobrazení:**

Nezkresluje délky, ale pouze v určitém směru, např. m_p=1.

Plošné zkreslení

- **Měřítko ploch P**

Poměr diferenciálních plošných elementů v obraze a originálu.

Bezrozměrné.

P ve většině případů >>1

$$P = \frac{dP}{dp}$$

- **Plošné zkreslení:**

Udává vliv měřítka ploch na plošnou jednotku.

Příliš často se nepoužívá.

- **Ekvivalentní (plochojevné zobrazení)**

Nezkresluje plochy.

Použito pro politické mapy světa.

$$\boxed{P = m_p m_r \sin\omega'}$$

P je rovno součinu měřítka délek v poledníku, rovnoběžce a sinu úhlu mezi obrazem poledníku a rovnoběžky.

Úhlové zkreslení

- **Úhlové zkreslení Δω**

Rozdíl úhlu mezi dvěma soustavami křivek v obraze ω´ a úhlem ω jejich obrazů. Nejčastěji se vyjadřuje ve stupních.

$$\boxed{\Delta\omega = \omega' - \omega}$$

- **Konformní (úhlojevná) zobrazení**

Nezkreslují úhly, Δω=0.
Použití v geodézii, mapy velkých měřítek, většina zobrazení pro geodézii jsou konformní.

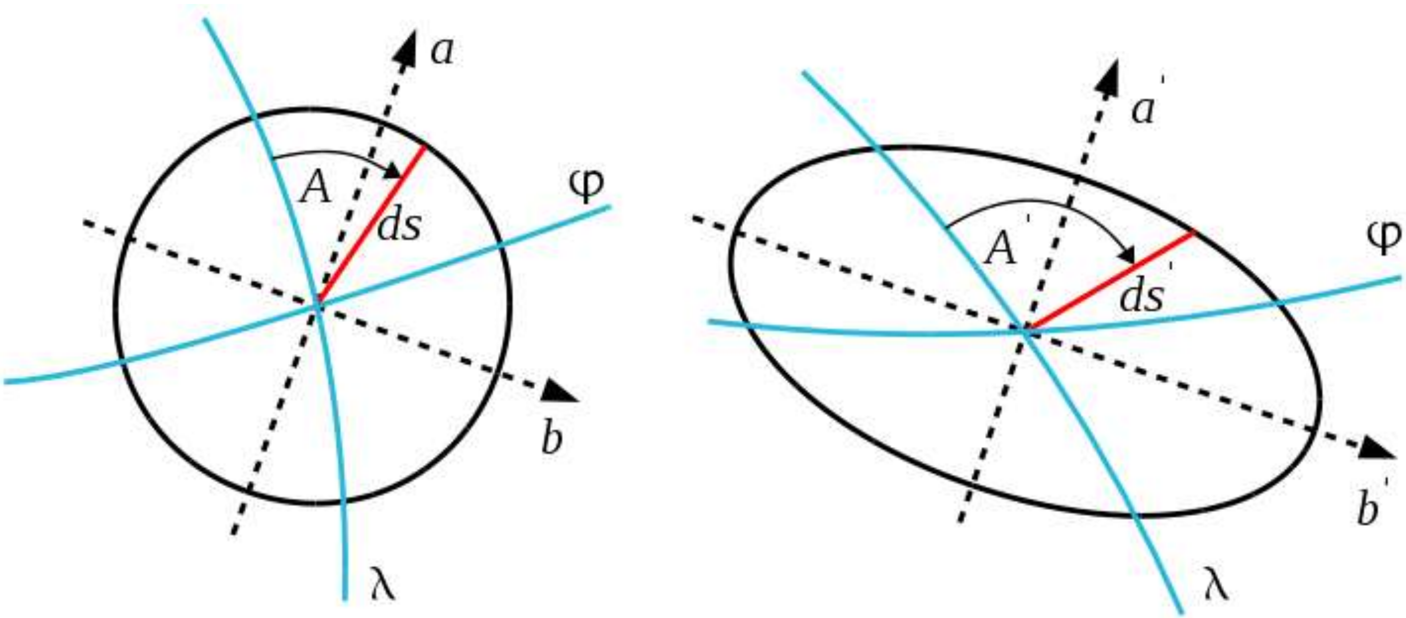
- **Vztah mezi zkreslením délek, úhlů, ploch:**

Konformní zobrazení: maximálně zkreslují plochy.
Ekvivalentní zobrazení: maximálně zkreslují úhly.
Kompenzační (vyrovnávací) zobrazení: zkreslují vše, ale plochy zkreslují m é n ě než konformní zobrazení a úhly zkreslují méně než ekvivalentní zobrazení.

Hlavní paprsky
- extrémné délkové zkreslení

Dva azimuty, pro které hodnota délkového zkreslení extrémní, jsou na sebe kolmé.

- Udávají extrémní hodnoty délkového zkreslení: $a=m_{max}$, $b=m_{min}$ azimutech $A\varepsilon_1$ $A\varepsilon_{2.}$
- Jediné dvojice prvků, které (u nekonformních zobrazení) svírají pravý úhel v obraze i originále.

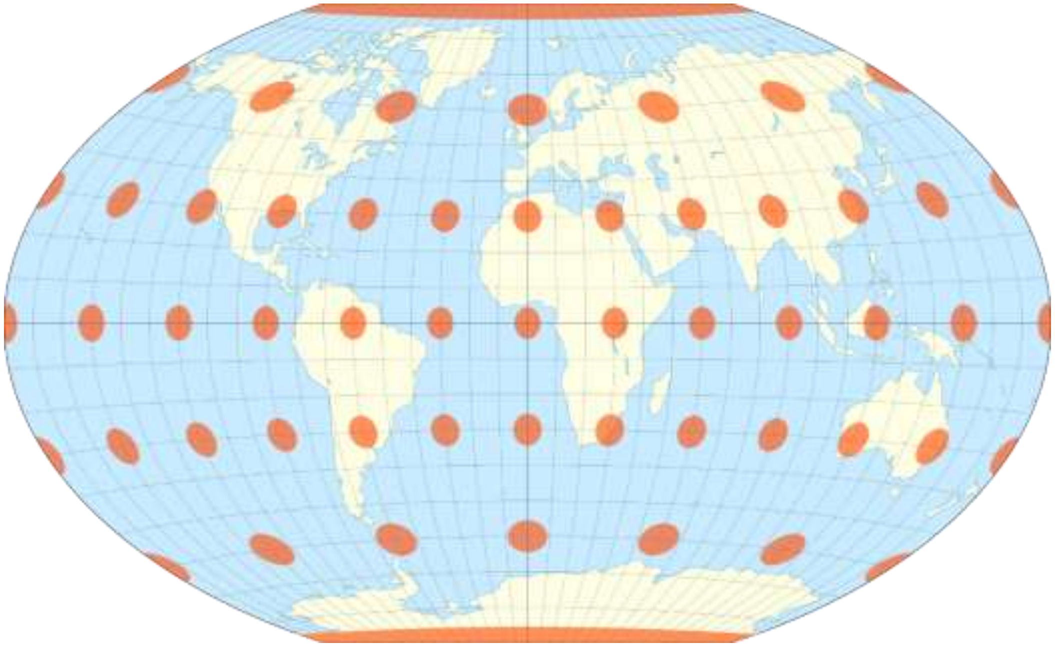


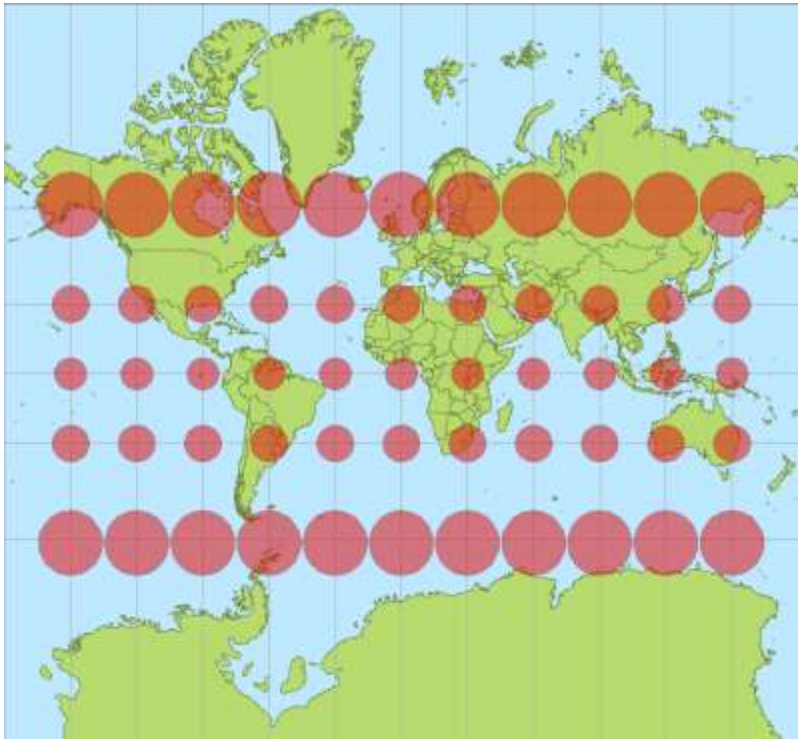
Tissotova indikatrix

Délkové zkreslení v bodě je funkcí azimutu, pohybuje se v intervalu $<m_{min},m_{max}>$.

Obrazem nekonečně malé kružnice je v důsledku zkreslení elipsa.

Označujeme ji jako elipsu zkreslení nebo **Tissotovu indikatrix**.





Rozvinutí válce do roviny

$$x(\lambda, v) = R\lambda$$
$$y(\lambda, v) = v$$

Odpovídající si body mají v parametrizacích stejné křivočaré souřadnice.

$$V(\lambda, v) = [R\cos\lambda, R\sin\lambda, v], M(\lambda, v) = [R\lambda, v]$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = \left[-R\sin\lambda, R\cos\lambda, 0\right], \quad \frac{\partial M}{\partial \lambda} = [R, 0]$$

$$\frac{\partial V}{\partial v} = \left[0, 0, 1\right], \quad \frac{\partial M}{\partial \lambda} = [0, 1]$$

První základní forma plochy je stejná.

$$ds^2 = R^2 \left(d\lambda\right)^2 + \left(dv\right)^2$$

Tissotova indikatrix

$$x(\lambda, v) = R\lambda$$

$$y(\lambda, v) = v$$

Element délky na válci je určen první zákl. formou plochy

Lineární zobrazení TI je určeno obrazem *ds* ve směrech par. křivek válce.

$$ds^2 = R^2 \cdot d\lambda^2 + dv^2$$

$$ds(\lambda, 0) = R \cdot d\lambda$$

$$ds(0, v) = dv$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d\lambda \\ d\phi \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{K} \begin{pmatrix} ds(\lambda, 0) \\ ds(0, \phi) \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = JK \begin{bmatrix} ds(\lambda, 0) \\ ds(0, \phi) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{JK = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

První základní forma kulové plochy

$$\boxed{\begin{aligned} x &= R \cdot \cos\phi \cdot \cos\lambda \\ y &= -R \cdot \sin\phi \\ z &= R \cdot \cos\phi \cdot \sin\lambda; \\ \lambda \in \left\langle 0, 2\pi \right); &\quad \phi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \end{aligned}}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = \left(-R \cdot \cos\phi \cdot \sin\lambda, 0, R \cdot \cos\phi \cdot \cos\lambda\right)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \phi} = \left(-R \cdot \sin\phi \cdot \cos\lambda, -R\cos\phi, -R \cdot \sin\phi \cdot \sin\lambda\right)$$

$$ds^2 = R^2 \cdot \cos^2\phi \cdot d\lambda^2 + R^2 \cdot d\phi^2$$

Tissotova indikatrix

Element délky na sféře je určen první zákl. formou plochy

$$ds^2 = R^2 \cdot \cos^2\phi \cdot d\lambda^2 + R^2 \cdot d\phi^2$$

$$ds(\lambda,0) = R \cdot \cos\phi \cdot d\lambda$$

$$ds(0,\phi) = R \cdot d\phi$$

Lineární zobrazení TI je určeno obrazem *ds* ve směrech rovnoběžek a poledníků.

$$\begin{pmatrix} d\lambda \\ d\phi \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{R\cos\phi} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R} \end{pmatrix}}}_{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} ds(\lambda,0) \\ ds(0,\phi) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} d\lambda \\ d\phi \end{pmatrix} = JK \begin{pmatrix} ds(\lambda,0) \\ ds(0,\phi) \end{pmatrix}$$

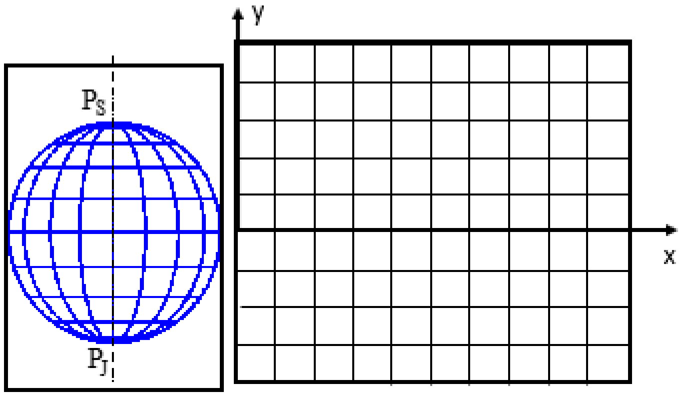
Ekvidistantní v polednících (Marinovo)

$$x = R \cdot \lambda$$

$$y = R \cdot \phi$$

Zkreslení ve směru rovnoběžek

m_r = délka v mapě/ délka ve skutečnosti = $2\pi R / 2\pi R\cos\phi$



Jakobián J

$$J = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{R\cos\phi} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = JK \begin{bmatrix} ds(\lambda, 0) \\ ds(0, \phi) \end{bmatrix}$$

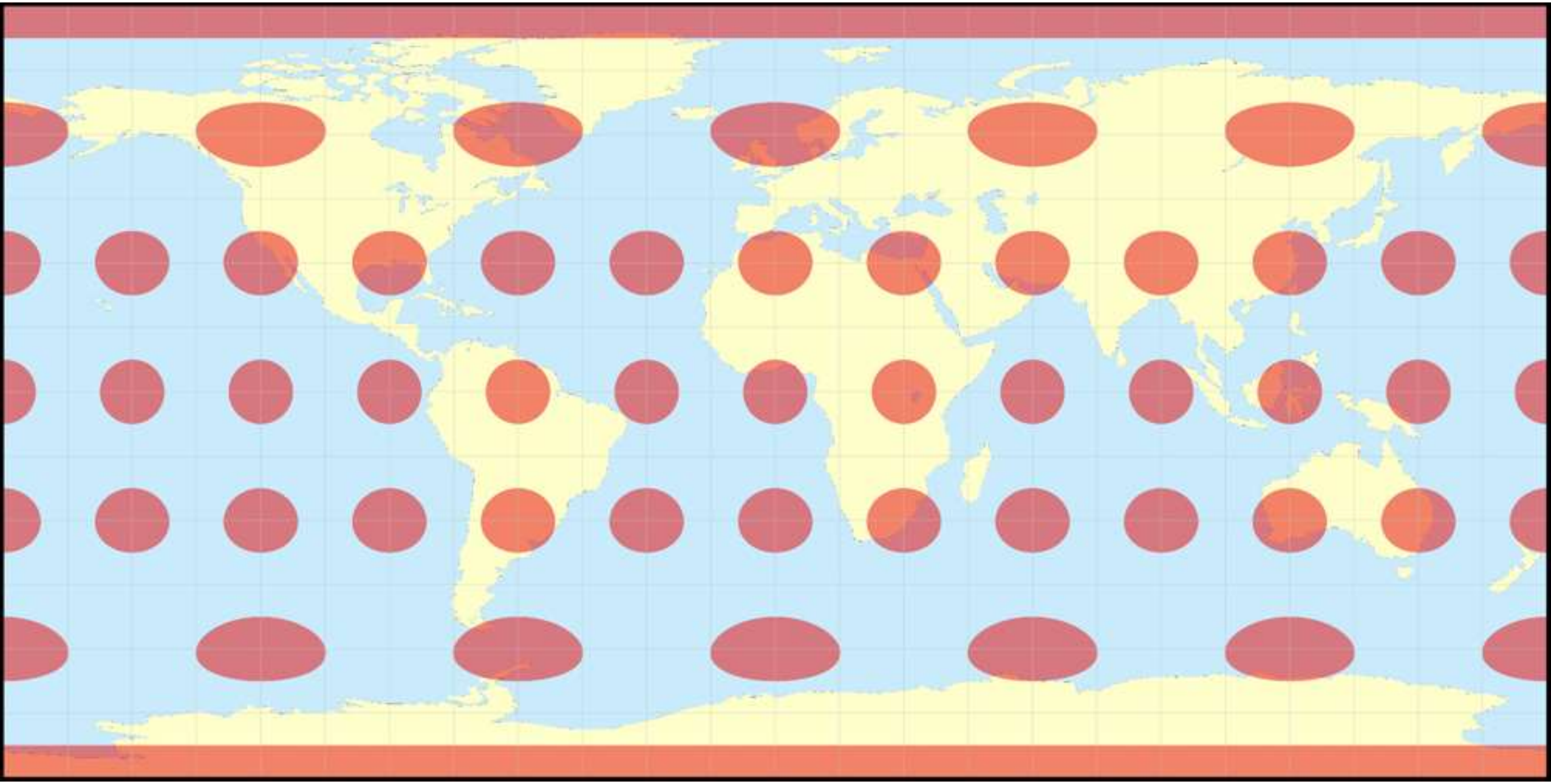
ve směru rovnoběžek: $dx = \boxed{\dfrac{1}{\cos\phi}} ds(\lambda, 0)$

ve směru poledníků: $dy = ds(0, \phi)$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cos\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds(\lambda, 0) \\ ds(0, \phi) \end{pmatrix}$$

$$m_r = \frac{1}{\cos\phi}, m_p = 1,$$

Tissotovy indikatrix
Marinova zobrazení (Equirectangular)



Wikipedia: File:Equirectangular with Tissot's Indicatrices of Distortion.svg

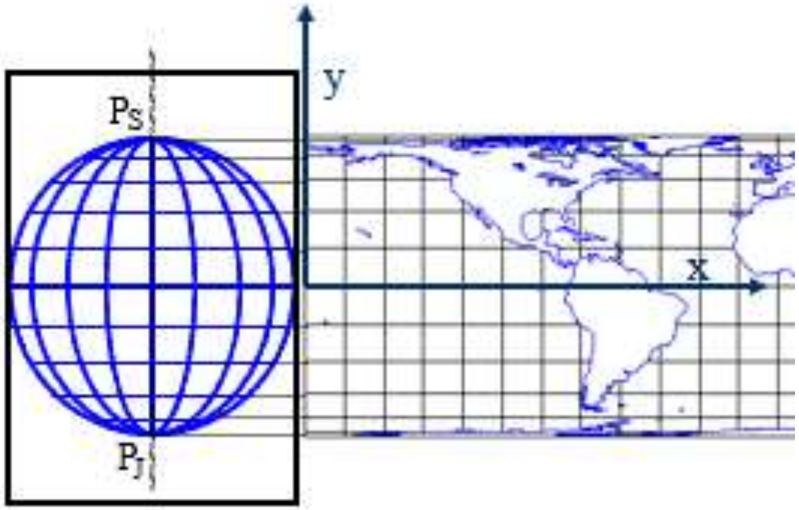
Plochojevné (Lambertovo)

$$x = R \cdot \lambda$$

$$y = R \cdot \sin\phi$$

Jakobián J

$$J = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R\cos\phi \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{R\cos\phi} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R} \end{pmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = JK \begin{bmatrix} ds(\lambda,0) \\ ds(0,\phi) \end{bmatrix}$$

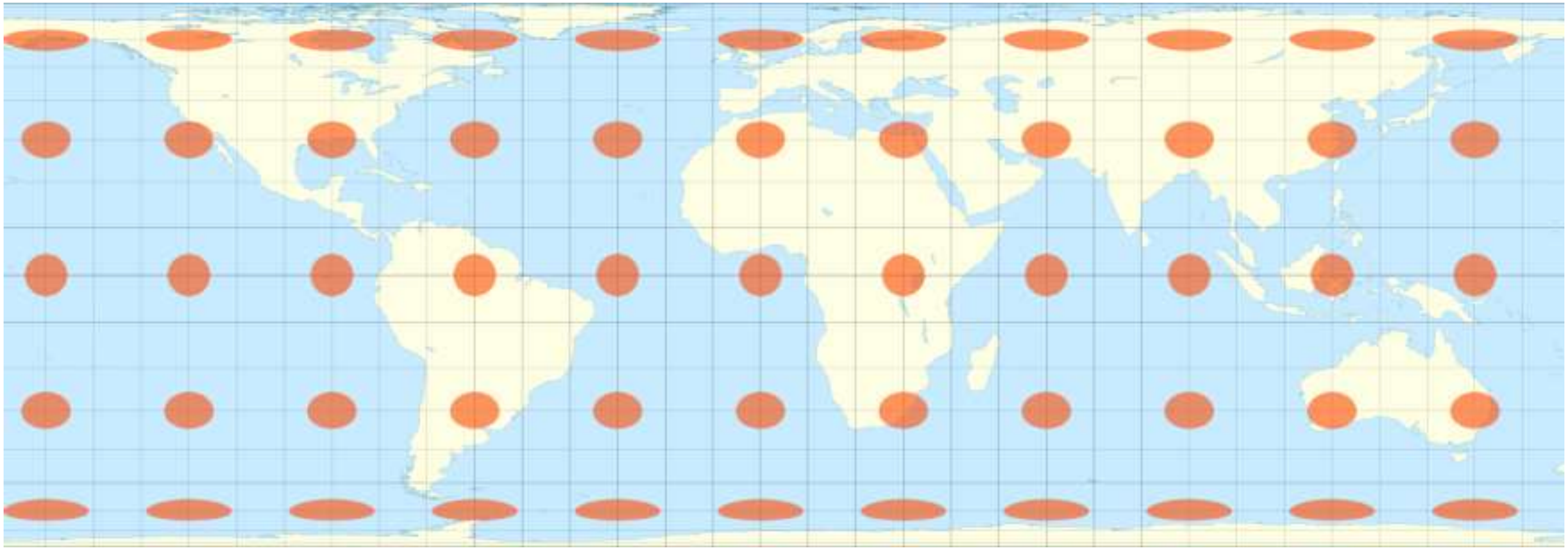
ve směru rovnoběžek: $dx = \dfrac{1}{\cos\phi} ds(\lambda,0)$

ve směru poledníků: $dy = \cos\phi \cdot ds(0,\phi)$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cos\phi} & 0 \\ 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds(\lambda,0) \\ ds(0,\phi) \end{pmatrix}$$

$$m_p = \cos\phi; \quad m_r = \frac{1}{\cos\phi}$$

Tissotovy indikatrix Lambertova plochojevného zobrazení



Konformní (Mercatorovo)

Musíme mít Jakobián takový, aby $m_p = m_r = \frac{1}{\cos\phi}$

$$x = R \cdot \lambda$$

$$y = R \cdot \ln\left(\frac{1}{\cos\phi} + \tan\phi\right)$$

$$y = R \cdot \ln\left(\tan\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$J = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{R}{\cos\phi}} \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} \frac{1}{R\cos\phi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{R}{\cos\phi}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{dx} \\ \boldsymbol{dy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{JK} \begin{bmatrix} \boldsymbol{ds(\lambda, 0)} \\ \boldsymbol{ds(0, \phi)} \end{bmatrix}$$

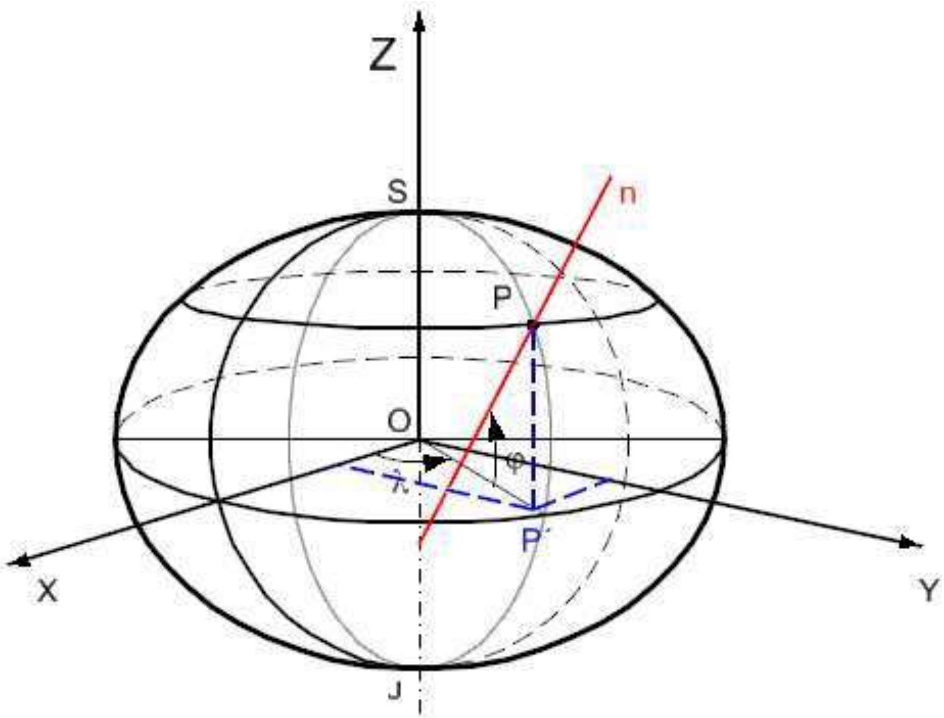
ve směru rovnoběžek: $dx = \frac{1}{\cos\phi} ds(\lambda, 0)$

ve směru poledníků: $dy = \frac{1}{\cos\phi} \cdot ds(0, \phi)$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos\phi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds(\lambda, 0) \\ ds(0, \phi) \end{pmatrix}$$

$$m_p = m_r = \frac{1}{\cos\phi}$$

Parametrizace elipsoidu zem. šířkou ϕ a délkou λ



$$X = \left(N(\phi) + h\right)\cos\phi\cos\lambda$$
$$Y = \left(N(\phi) + h\right)\cos\phi\sin\lambda$$
$$Z = \left(\frac{b^2}{a^2}N(\phi) + h\right)\sin\phi$$

$$N(\phi) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}},$$

h – výška nad referenčním elipsoidem

N(ϕ) - poloměr křivosti normálového řezu ve směru rovnoběžky zem. šířky ϕ.

První základní forma elipsoidu

Shodná parametrizace referenčního elipsoidu na Wikipedii:
záměna souřadnice *z-y, e* je numerická excentricita

$$\hat{X}(\lambda, \phi) = \begin{bmatrix} N \cos\lambda \cos\phi \\ -N(1-e^2)\sin\phi \\ N \sin\lambda \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{R}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\phi)}}$$

$$M = \frac{R(1-e^2)}{(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{\frac{3}{2}}}$$

Čísla M, N jsou převrácené hodnoty hlavních křivostí
M – poloměr křivosti meridiány
N – poloměr normálové křivosti ve směru rovnoběžky
Element délky je určen první zákl. formou plochy

$$ds^2 = (N \cos\phi)^2 d\lambda^2 + M^2 d\phi^2$$

Tissotova indikatrix

Element délky na elipsoidu je určen první zákl. formou plochy

$$ds^2 = (N\cos\phi)^2 d\lambda^2 + M^2 d\phi^2$$

Lineární zobrazení TI je určeno obrazem *ds* ve směrech rovnoběžek a poledníků.

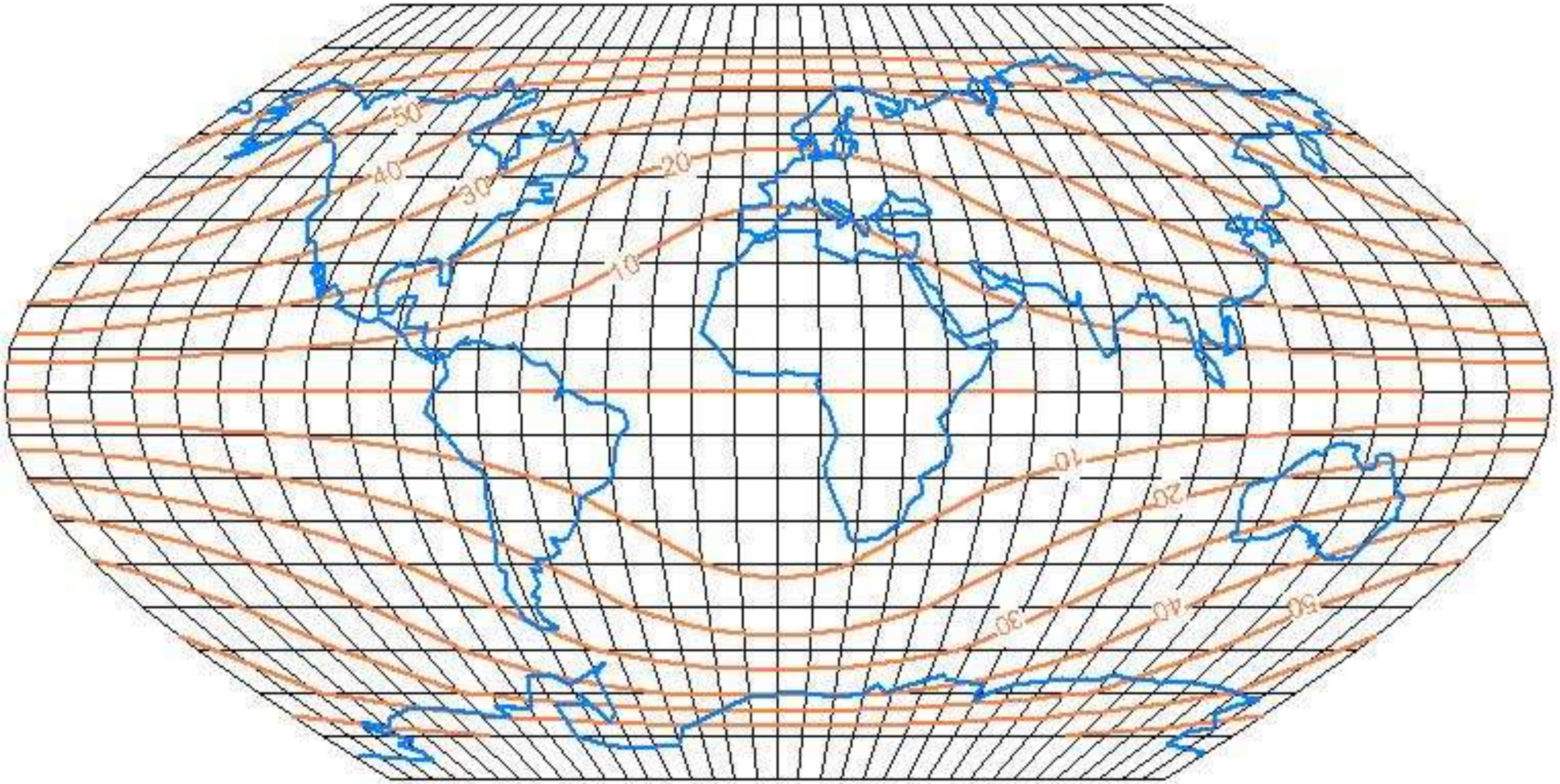
$$\begin{bmatrix} d\lambda \\ d\phi \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} ds(\lambda,0) \\ ds(0,\phi) \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} \frac{1}{N\cos\phi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\phi \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = JK \begin{bmatrix} ds(\lambda,0) \\ ds(0,\phi) \end{bmatrix}$$

Ukázka úhlových ekvideformát [Eckertova sinusoidálního zobrazení]



Plochojevné zobrazení, poledníky se zobrazí jako sinusoidy.

Kartografická zkreslení závisí na:

- Typu kartografického zobrazení.
- Poloze zobrazovací plochy.
- Tvaru zobrazovaného území.
- Vzdálenosti bodu od základního poledníku či nezkreslené rovnoběžky.

Kartografická zkreslení a vnímání mapy:

- *Korektní vizuální vjem mapy*

Zkreslení délek, ploch, úhlů do 8%.

- *Vizuální porovnání dvou map*

Zkreslení délek, ploch, úhlů do 3%.

- *Kartometrická analýza map*

Zkreslení délek, ploch, úhlů do 0.5%.