Verloop van functies m.b.v. afgeleide beschrijven

www.karelappeltans.be

March 30, 2024

Contents

1 Doelstelling

Hoe kan de grafiek van een functie, bijvoorbeeld $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ bekomen worden m.b.v. de afgeleide functie(s)?

2 Voorafgaande stellingen

2.1 Middelwaardestelling (van Lagrange)

Stel dat f continue is op een gesloten interval $[a, b]$ en afleidbaar op het open interval $]a, b[$. Dan bestaat er minstens een $c \in]a, b[$ zodat

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Bewijs: /

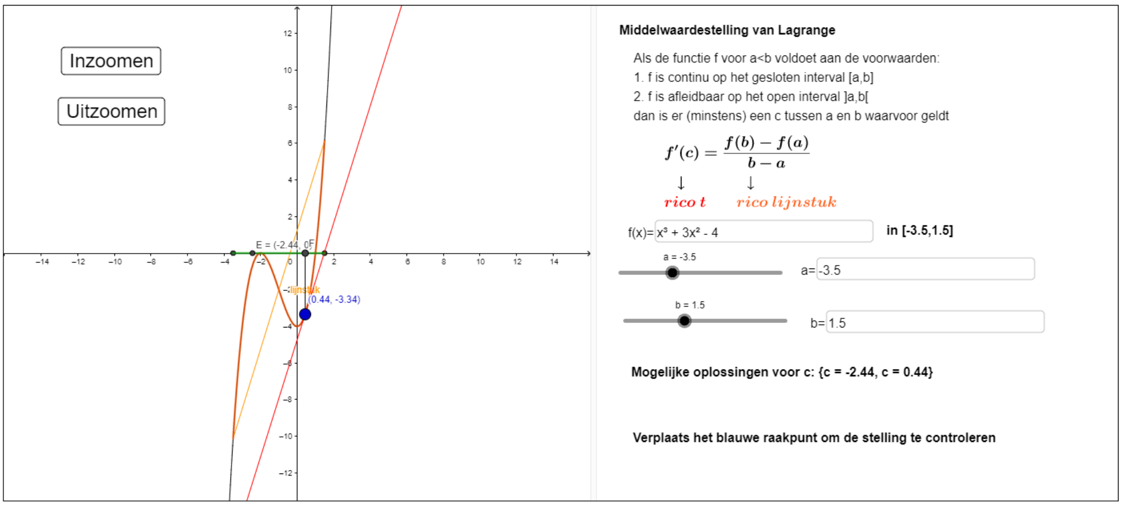


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/dKUFet34

2.2 Stelling van Rolle

Stel dat f continue is op een gesloten interval $[a, b]$ en afleidbaar op het open interval $]a, b[$ met $f(a) = f(b)$, dan bestaat er minstens een $c \in]a, b[$ zodat

$$f'(c) = 0$$

Bewijs: We gebruiken de middelwaardestelling. Omdat $f(a) = f(b)$ geldt ook $f(a) - f(b) = 0$ en dit bewijst de stelling.

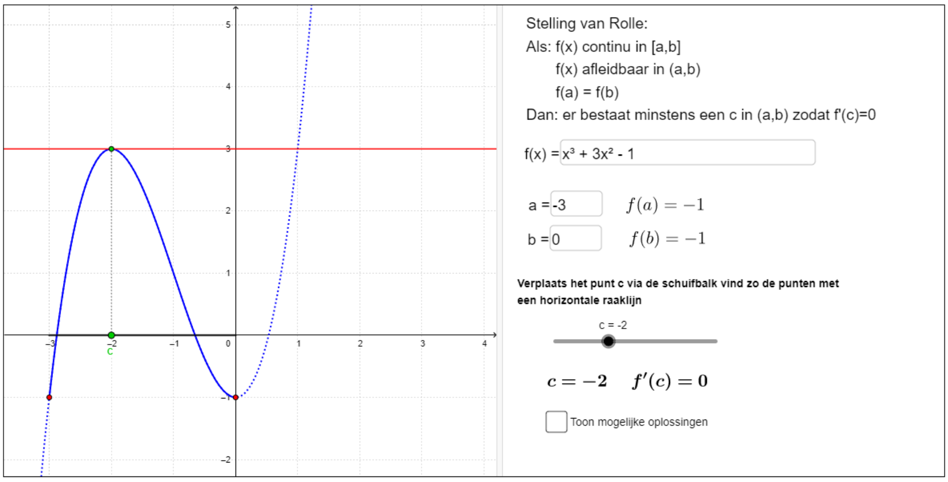


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/dKUFet34

3 Definitie stijgend/dalend

We zeggen dat een functie stijgend op een interval I is indien

$$f(c) \leq f(d), \quad \forall c < d, \quad c, d \in I$$

.
De functie wordt dalend genoemd op een interval I indien

$$f(c) \geq f(d), \quad \forall c < d, \quad c, d \in I$$

.
Ze heten monotoon dalend/stijgend indien men $\geq$ ($\leq$) door $>$ ($<$) kan vervangen.

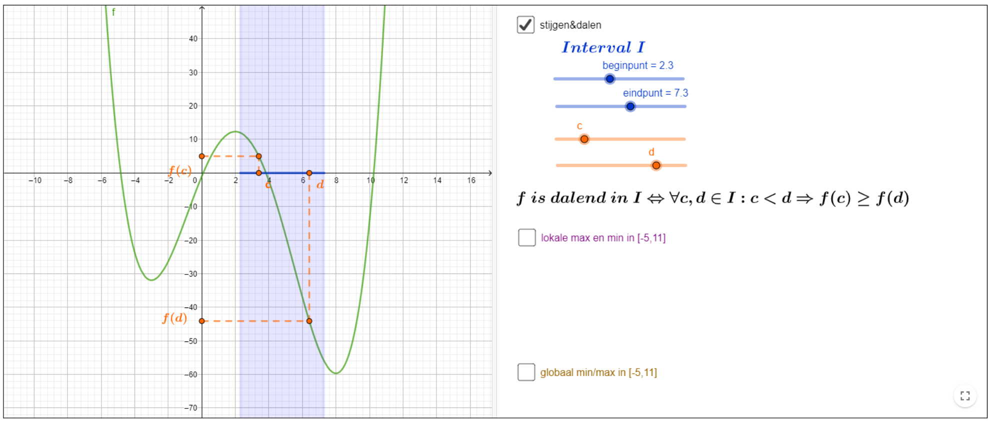


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v

4 Verband tussen f'(x) en stijgen/dalen van een functie

4.1 Stelling

Voor een dalende functie f in een open interval I die alsook afleidbaar is, geldt $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$. Indien de functie stijgend is, geldt $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

Bewijs: We bewijzen dit voor een stijgende functie. stel dat $x \in I$ en een kleine h zodat $x + h$ nog steeds tot het interval I behoort (dat gaat omdat we geëist hebben dat I open is), dan geldt

$$voor\ h > 0: \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

$$voor\ h < 0: \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Omdat de functie afleidbaar is bestaat de $\lim\limits_{h \to 0}$ bijgevolg $f'(x) \geq 0$

4.2 Stelling

Stel dat f continu is over een gesloten interval $I = [a, b]$ en afleidbaar over het open interval $]a, b[$ dan geldt

$$i)\ als\ f'(x) > 0,\ \ \forall x \in]a, b[, dan\ is\ de\ functie\ f\ monotoon\ stijgend\ over\ I$$

.

$$ii)\ als\ f'(x) < 0,\ \ \forall x \in]a, b[, dan\ is\ de\ functie\ f\ monotoon\ dalend\ over\ I$$

Bewijs:
We bewijzen i).
Veronderstel dat f NIET monotoon stijgend is, dus er bestaan $a, b \in I$ met $a < b$ en $f(a) \geq f(b)$
Er is voldaan aan de voorwaarden van de middelwaardestelling van Lagrange dus er bestaat een $c \in]a, b[$ met $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Onder de veronderstelling geldt nu dat $f'(c) \leq 0$ (want $T \leq 0$ en $N > 0$. In tegenspraak met het gegeven.

4.3 Praktijk

We maken een tekentabel van de 1ste afgeleide:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ of\ x = -2$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

5 Definitie lokaal extremum (lokaal min of lokaal max)

We noemen een punt $\overline{x}$ een lokaal minimum (respectievelijk maximum) indien een getal $\delta > 0$ bestaat zodat $f(\overline{x}) < f(x)$ (respectievelijk $f(\overline{x}) > f(x)$ voor alle $x \in]\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta[\setminus \{\overline{x}\}$

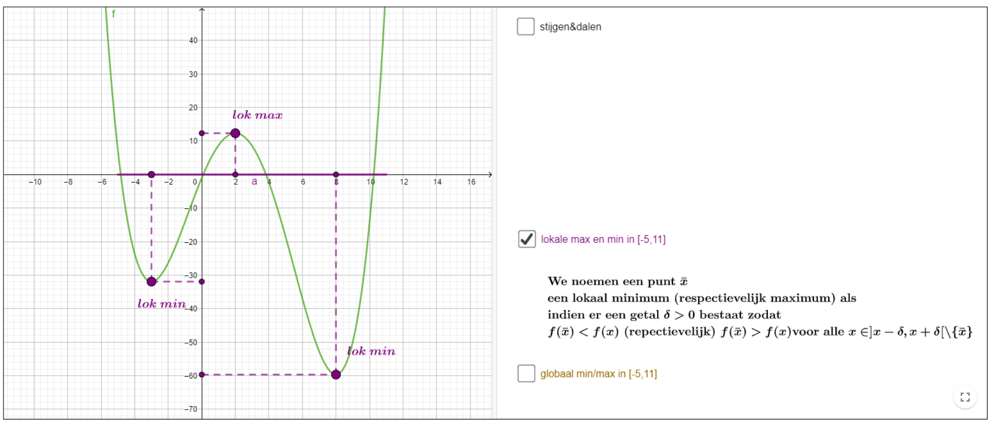


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v

6 Verband tussen f'(x) en lokaal extremum

6.1 Stelling

Stel dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een afleidbare functie is met een lokaal minimum of een lokaal maximum $\overline{x}$. Dan geldt $f'(\overline{x}) = 0$

6.2 Opmerking

Uit $f'(\overline{x}) = 0$ volgt niet dat $\overline{x}$ een lokaal extremum is. Beschouw bijvoorbeeld $f(x) = x^3$. Deze heeft geen minimum en geen maximum. Er geldt echter $f'(0) = 0$

Hoe kan men dan bepalen of een punt waar $f'(\overline{x}) = 0$ een extremum is?

6.3 Stelling

Stel dat f continu is in a. Bij een tekenwissel van $f'(x)$ heeft $f(x)$ in a

- Bij $+\,-$ een lokaal maximum
- Bij $-\,+$ een lokaal minimum

Merk op:

1. $f'(x)$ moet dus in dat punt niet bestaan (meestal wel)
2. Als er GEEN tekenwissel van f' is in a, is er dus geen lokaal minimum of maximum

6.4 praktijk

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'(x)		$+$	0	-	0	$+$	
f(x)		↗	lok max	↘	lok min	↗	

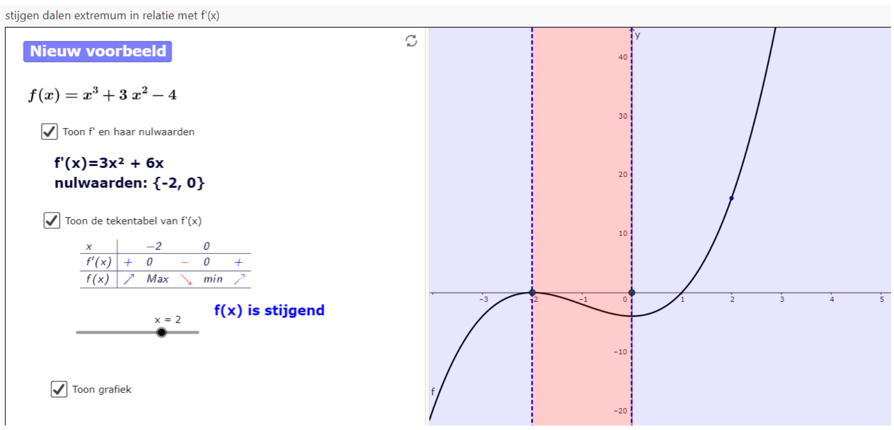


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v

7 Verband tussen f"(x) en lokaal extremum

7.1 Stelling: tweede afgeleide test

Stel dat $f \in C^2(\mathbb{R})$ een functie is met een punt $\overline{x}$ waarvoor geldt dat $f'(\overline{x}) = 0$. Stel bovendien dat $f''(\overline{x}) > 0$. Dan is $\overline{x}$ een lokaal minimum. (Indien $f''(\overline{x}) < 0$ is $\overline{x}$ een lokaal maximum.)

7.2 praktijk

We maken een tekentabel van de 2de afgeleide:

$$f''(x) = 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'(x)		$+$	0	-	-	-	0	$+$	
f"(x)		-	-	-	0	$+$	$+$	$+$	
f(x)		↗	l. max	↘		↘	l. min	↗	

8 Definitie hol en bol

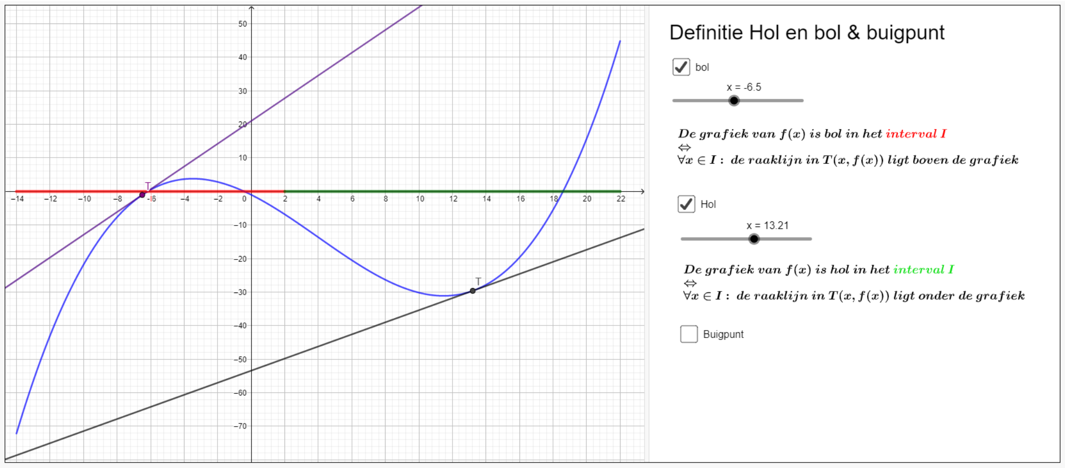


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v

9 Verband tussen f”(x) en hol/bol

9.1 Stelling

Stel dat $f \in C^2(\mathbb{R})$. De grafiek van een functie f is hol op een interval I indien $f''(x) > 0,\ \forall x \in I$. Ze is bol indien $f''(x) < 0,\ \forall x \in I$

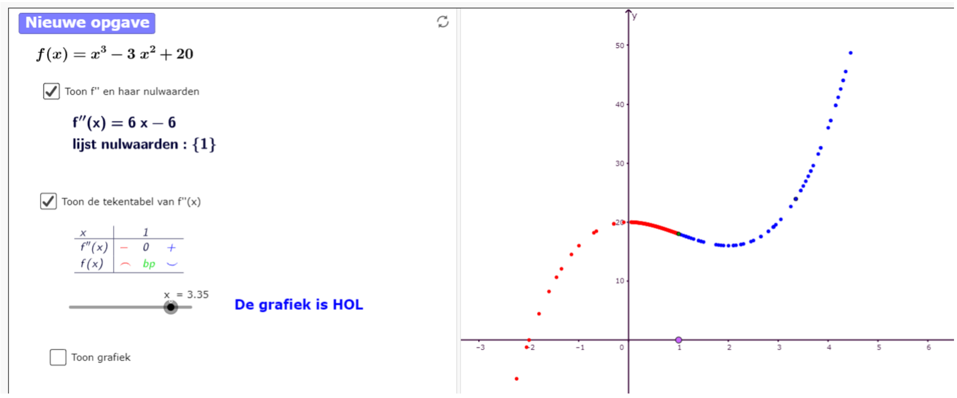


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v

9.2 praktijk

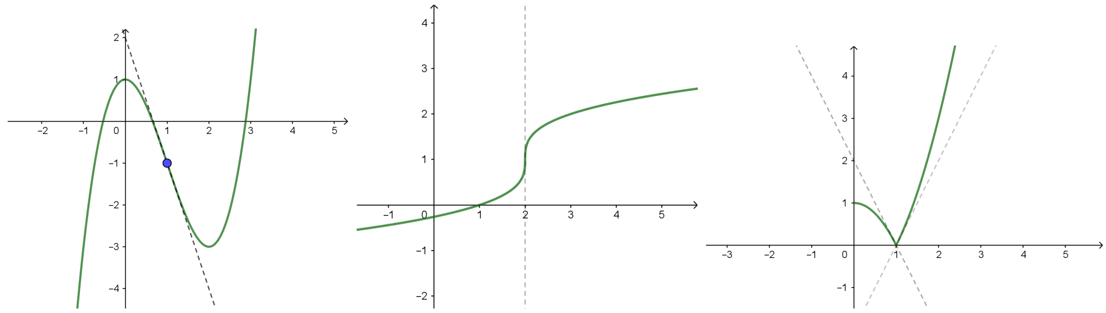
x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f’(x)		+	0	-	-	-	0	+	
f”(x)		-	-	-	0	+	+	+	
f(x)		↗	l. max	↘		↘	l. min	↗	

10 Overgang van hol naar bol (of omgekeerd)

Het punt waar een functie lokaal van convex (hol) naar concaaf (bol) of vice versa verandert wordt

- een buigpunt genoemd indien de raaklijn in dat punt bestaat($f'(x) \in \mathbb{R}$ of $f'(x) = \infty$. De raaklijn snijdt dan de grafiek in dit punt.
- een knikpunt genoemd als linker-en rechterafgeleide bestaan, maar verschillend zijn van elkaar.

Indien f twee keer afleidbaar is, wordt de tweede afgeleide nul in een buigpunt.



(a) buigpunt (b) buigpunt verticale raaklijn (c) knikpunt

11 Samenvattende tabel

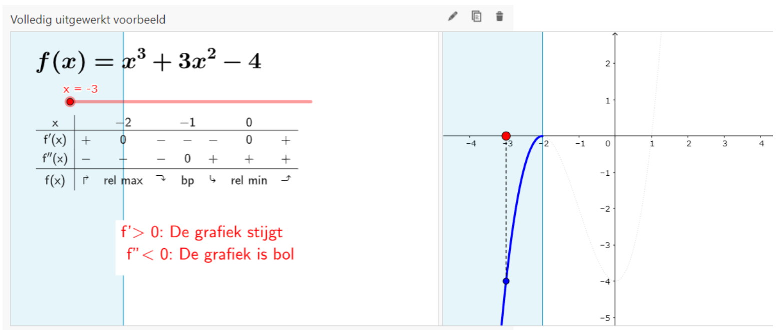


Figure 9: https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	-	-	0	+	
f''(x)		-	-	-	0	+	+	+	
f(x)		↷	l. max	↷	bp	↳	l. min	⤴	

12 Globaal minimum of maximum

De kandidaten voor een globaal minimum of maximum van een functie op een gesloten interval I, zijn de lokale minima of maxima (gelegen in het interval) en de randpunten van het domein.
Voorbeeld: bepaal de globale extrema van $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ over het interval $[-2, 2]$
We berekenen $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$ als $x = -1$ of $x = 3$
$f(-2) = 0$, $f(-1) = 7$ en $f(2) = -20$ (waarom bekijken we $x = 3$ niet?)
dus globaal max voor $x = -1$ en globaal min voor $x = 2$

13 Oefeningen

1. Ga na dat aan alle voorwaarden van de stelling van Lagrange moet voldaan zijn zodat c, waarvan sprake, zou kunnen bestaan.
2. Voldoet $f(x) = \frac{1}{x}$ over het interval $[-1, 1]$ aan de stelling van Lagrange?
3. Voldoet $f(x) = |x|$ over $[-2, 2]$ aan de voorwaarden van de stelling van Rolle?
4. Toon aan dat $f(x) = \sin(2\pi x)$ voldoet aan de stelling van Rolle over het interval $[-1, 1]$
5. Toon aan dat $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$ over het interval $[0, 4]$ voldoet aan de stelling van Rolle en bepaal alle waarden van c in $]0, 4[$ waarvan sprake in deze stelling (A. c=1)
6. Gegeven $f(x) = x^2 - 5x + 1$ Leg de middelwaardestelling van Lagrange grafisch uit. Gebruik hiervoor het interval $[0, 2]$.
7. Bekijk $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ over het interval $[3, 5]$. Voldoet f aan de stelling van Lagrange? Zo ja, bepaal de waarde(n) van c waarvan sprake. (A. ja, $c = -\sqrt{5}$)
8. Zij $f \in C^1(\mathbb{R})$. Veronderstel dat $f(0) = -3$ en dat $f'(x) \leq 5\ \forall x \in \mathbb{R}$. Toon aan dat $f(2) \leq 7$.
9. Bewijs dat $f(x) = x^3 + x - 1$ juist één nulpunt heeft in het interval $[0, 1]$
10. Zelfde vraag voor $f(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$
11. Toon aan dat tussen twee nulpunten van $f(x) = sin(x)$ een nulpunt van $f(x) = cos(x)$ ligt.
12. Toon aan dat de vergelijking $1 - 2x = \sin(x)$ juist één oplossing heeft
13. zij $f(x) = \tan x - x$. Bepaal $f(0)$ en gebruik $f'(x)$ om aan te tonen dat $\tan x > x\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
14. Toon aan dat $\sin(x) \leq 1,2x\ \forall x \geq 0$
15. Bepaal de eventuele extrema van $f(x) = |x^2 - 1|$
16. Als f een continue afgeleide heeft in het interval $[-5, 10]$ met $f'(-5) = -1$ en $f'(10) = 1$, welke van onderstaande uitspraken geldt dan zeker:
    (a) f is stijgend op $[-5, 10]$
    (b) $f(c) = 0$ voor een $c \in]-5, 10[$
    (c) f is hol in het interval $[-5, 10]$
    (d) De grafiek van f heeft in VA in dit interval
    (e) De grafiek van f heeft een horizontale raaklijn in dit interval
17. Als $f'(x) = (x-2)^2(x+4)^7x^4$ dan is f dalend in volgend interval:
    (a) $]0, 2[$
    (b) $]2, +\infty[$
    (c) $]-\infty, -4[$
    (d) $]-4, 0[$
    (e) Het juiste interval is niet gegeven
18. Aan welke voorwaarde moet $p \in \mathbb{R}$ voldoen opdat $x^3 + px - 1$ geen extremum zou hebben?
19. Juist of fout. Indien juist verwijs naar de juiste plaats in het dictaat. Indien fout, geef een tegenvoorbeeld:
    (a) Indien f een extremum heeft voor $x = p$, dan is $f'(p) = 0$
    (b) Indien f afleidbaar is en $f'(p) = 0$, dan bereikt f een relatief extremum voor $x = p$
    (c) Indien f dalend is in $[a, b]$ dan is $f'(x) < 0$ voor elke x in $[a, b]$
    (d) als f stijgend is in $[a, b]$ en f is afleidbaar in $[a, b]$ dan geldt $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b]$

(e) als $P(c, f(c))$ een buigpunt is van de grafiek van f, dan geldt $f''(c) = 0$.

(f) Als voor een functie f geldt $f'(x) \leq 0,\ \forall x \in]a, b[$, dan is f dalend in $[a, b]$

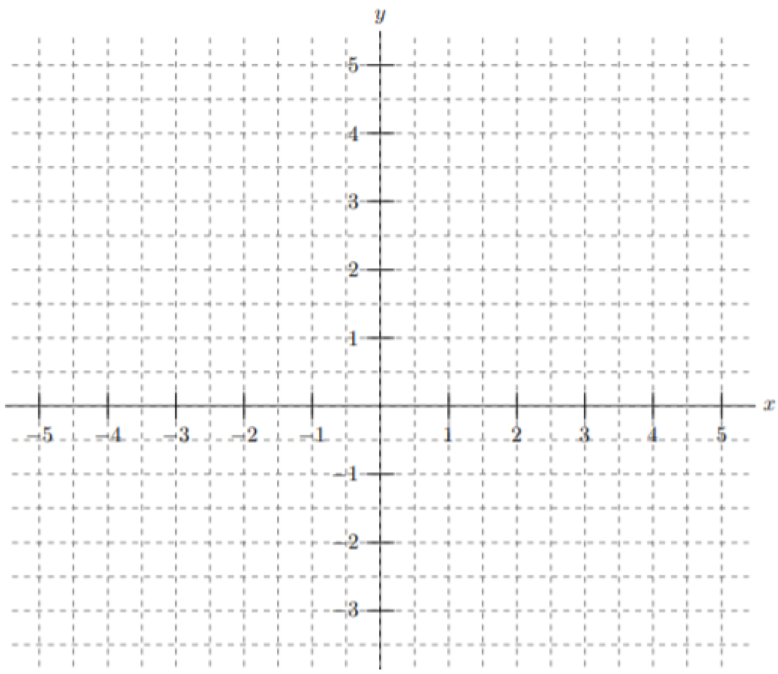
(g) Als voor twee afleidbare functies $f(x)$ en $g(x)$ geldt dat $f(x) \leq g(x)$, dan geldt ook $f'(x) \leq g'(x)$

20. Schets een grafiek die aan onderstaande voorwaarden voldoet:

On the axes provided below, sketch the graph of a single function $y = h(x)$ satisfying all of the following:

- $h(x)$ is defined for all x in the interval $-5 < x < 5$.
- $h'(x) > 0$ for all $x < -3$.
- $\lim_{x \to -2} h(x) = 0$.
- $h(-2) = -3$.
- The average rate of change of $h(x)$ between $x = -1$ and $x = 1$ is 2.
- $h(1) = 2$.
- $h(x)$ is linear between $x = 1$ and $x = 3$.
- $h'(2) = -1$.
- $\lim_{x \to 4^-} h(x) = -1$.
- $\lim_{x \to 4} h(x)$ does not exist.
- $h'(x) < 0$ for all $x > 4$.

Make sure that your sketch is large and unambiguous.



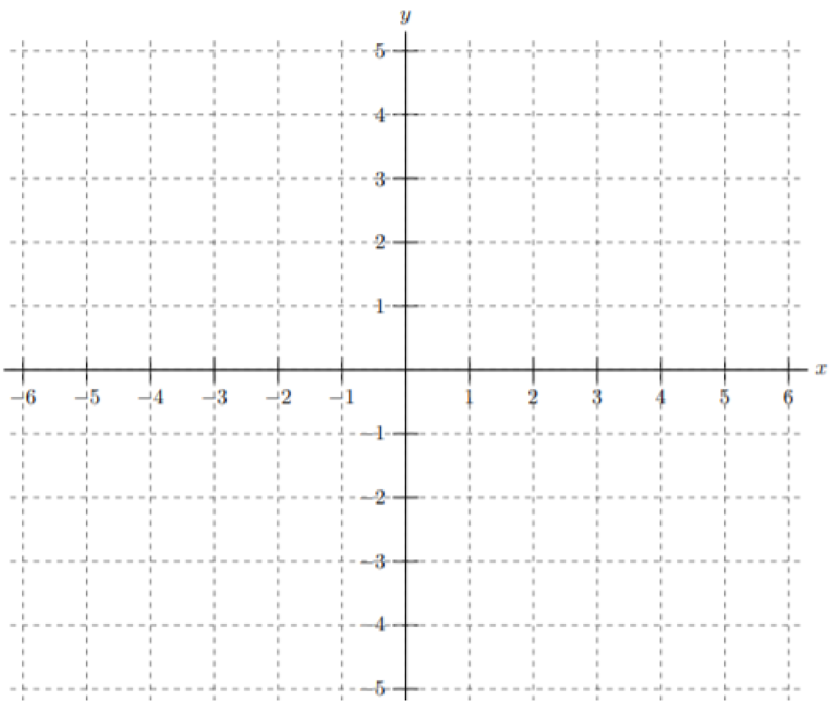
21. Schets een grafiek die aan onderstaande voorwaarden voldoet:

On the axes provided below, sketch the graph of a single function $y = g(x)$ satisfying all of the following:

- $g(x)$ is defined for all x in the interval $-6 < x < 6$.
- $g(x)$ has at least 5 critical points in the interval $-6 < x < 6$.
- The global maximum value of $g(x)$ on the interval $-5 \leq x \leq -3$ is 4, and this occurs at $x = -4$.
- $g(x)$ is not continuous at $x = -2$.
- $g'(x)$ (the derivative of g) has a local maximum at $x = 0$.
- $g(x)$ is continuous but not differentiable at $x = 1$.
- $g''(x) \geq 0$ for all x in the interval $2 < x < 4$.
- $g(x)$ has at least one local minimum on the interval $4 < x < 6$ but does not have a global minimum on the interval $4 < x < 6$.
- $g(x)$ has an inflection point at $x = 5$.

Make sure your sketch is large and unambiguous.

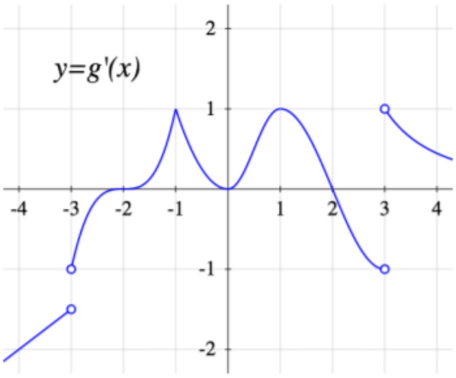
Graph of $y = g(x)$



22. Beantwoord volgende vragen over de grafiek van g(x) aan de hand van de grafiek van g'(x):

3. *[6 points; 1 points per part.]* **You do not have to justify your answers to this question.**

The function g has domain $\mathbb{R}$ and is continuous. Below is the graph of **its derivative** g':



Note: the following questions are about g**, but the graph is for the derivative** g'**.**

Decide whether the function g has a local maximum, a local minimum, an inflection point, or nothing, at the points with each of the following x-coordinates:

(a) at $x = -3$	**Circle one:**	Local max	Local min	Inflection point	Nothing
(b) at $x = -2$	**Circle one:**	Local max	Local min	Inflection point	Nothing
(c) at $x = -1$	**Circle one:**	Local max	Local min	Inflection point	Nothing
(d) at $x = 0$	**Circle one:**	Local max	Local min	Inflection point	Nothing
(e) at $x = 2$	**Circle one:**	Local max	Local min	Inflection point	Nothing
(f) at $x = 3$	**Circle one:**	Local max	Local min	Inflection point	Nothing