CAPITULO 2. OSCILACIONES ARMONICAS

Son movimientos repetitivos que realizan los cuerpos o sistemas bajo la acción de alguna (as) fuerzas. Durante este movimiento podría conservarse la energía mecánica lo que hace al movimiento indefinido o también podría disiparse a través del tiempo cuando actúan fuerzas disipativas.

2.1 MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE (M.A.S.)

Es un movimiento periódico que realiza una partícula o un sistema alrededor de la posición de equilibrio. La fuerza actuante durante este movimiento es proporcional al desplazamiento pero en sentido opuesto, a esta fuerza se le llama fuerza recuperadora. En la Fig. 2.1 se muestran tres casos de movimiento oscilatorio que por lo general realizan desplazamientos pequeños alrededor de la posición de equilibrio (0).

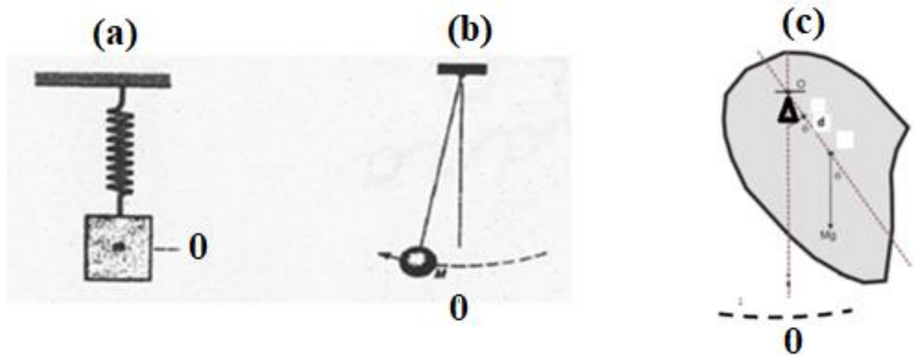


Fig. 2.1. Oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio. (a) Sistema masa – resorte; (b) péndulo simple; (c) péndulo físico

Sistema Masa – Resorte.

Se llama así al conjunto de un resorte y una masa acoplada que oscilan libremente alrededor de una posición de equilibrio sin fuerzas de fricción.

2.11 Sistema Masa – Resorte. Movimiento Horizontal

Consideremos una masa M unida a un resorte de constante elástica (k). En la Fig. 2.2 se muestra al sistema oscilatorio masa – resorte en su estado inicial partiendo del reposo.

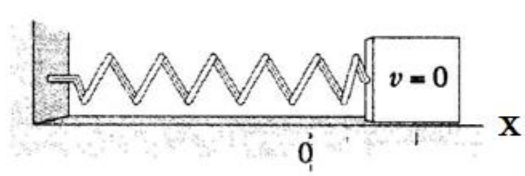


Fig.2.2. Sistema masa – resorte horizontal con movimiento armónico simple alrededor de la posicio0n de equilibrio.

En vista de ser un movimiento rectilíneo, elegimos como eje X la dirección del movimiento, siendo x =0 la posición de equilibrio. En la Fig.2.3, se presenta el diagrama de cuerpo libre y las ecuaciones de la dinámica nos llevaran a las ecuaciones de movimiento.

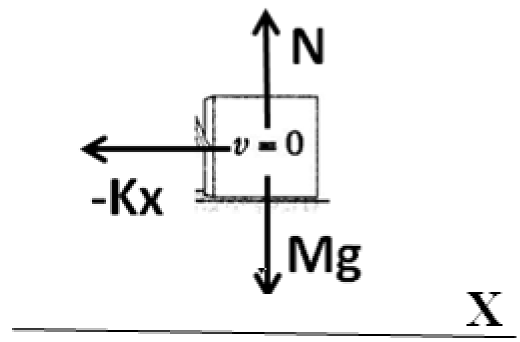


Fig. 2.3. Diagrama de cuerpo libre de la masa M en el movimiento oscilatorio.

Siendo la fuerza elástica del resorte = -kx, y en aplicación de la segunda ley de newton:

$$\Sigma \vec{F_i} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

En nuestro caso se trata de un movimiento en una sola dirección la que llamamos eje X:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Ordenando se obtiene la ecuación diferencial armónica del m.a.s.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0 \quad \text{--} \quad (2.1)$$

Siendo la solución general:

$$x(t) = Acos(wt + \varphi) \quad \text{--} \quad (2.2)$$

x (t) = posición de la masa en función del tiempo

Frecuencia angular: w = $\sqrt{\frac{k}{m}}$ --------------------------------- (2.3)

PARAMETROS DEL M.A.S.

Consideramos el movimiento armónico simple de un sistema masa - resorte

Amplitud (A)

Es el desplazamiento máximo o separación máxima que alcanza la partícula durante su movimiento con respecto a la posición de equilibrio.
En la Fig. 2.4. Se aprecian oscilaciones con diferentes amplitudes, igual frecuencia e igual fase. Amplitudes: $A_1 > A_2$

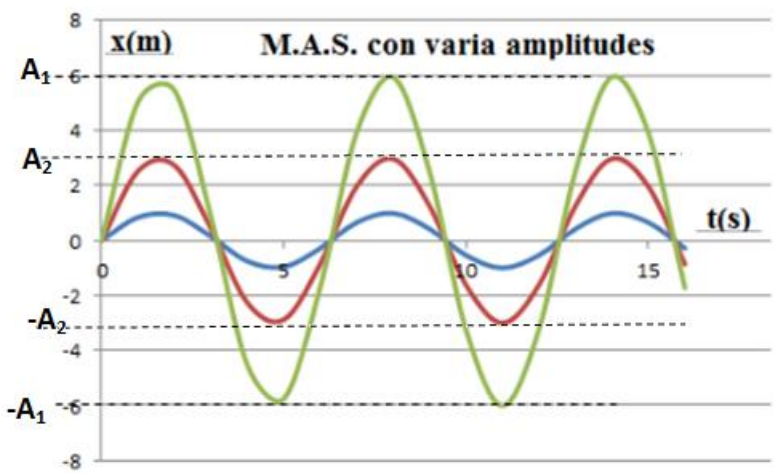


Fig. 2.4 Tres movimientos oscilatorios con diferentes amplitudes pero igual fase y frecuencia.

Periodo (T), [T] = s

Es el tiempo que tarda la partícula hasta retornar a su posición inicial luego de un recorrido completo.

Frecuencia (f), f = 1/T, [1/s] =Hz

Es el número de oscilaciones que realiza la partícula en m.a.s. durante un segundo.

Frecuencia Angular (w), $w=2\pi f = 2\pi/T$, [w]=rad/s

Es el recorrido angular por unidad de tiempo.

En la Fig. 2.5 se aprecian tres movimientos oscilatorios con diferente periodo (T), frecuencia (f) y frecuencia angular (w).

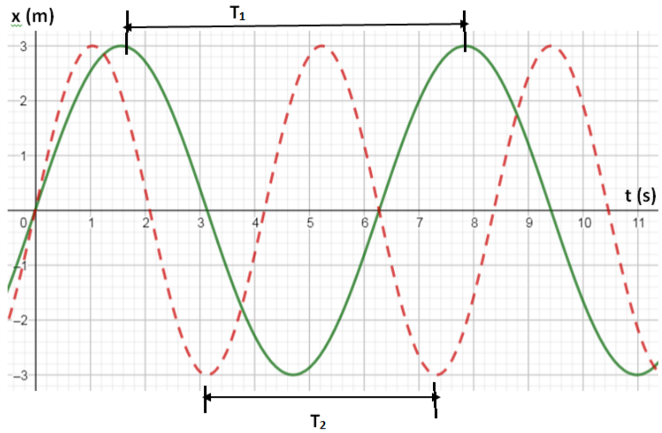


Fig. 2.5. Se aprecian dos oscilaciones con diferentes periodos, igual amplitud, igual fase. Periodos: $T_1 > T_2$ o frecuencias: $f_1 < f_2$

Fase (φ), [φ] = rad

Es un ángulo expresado en radianes que representa la forma de inicio del movimiento oscilatorio. En la Fig. 2.6 se aprecian tres movimientos oscilatorios que inician su recorrido de manera diferente lo cual genera diferentes fases.

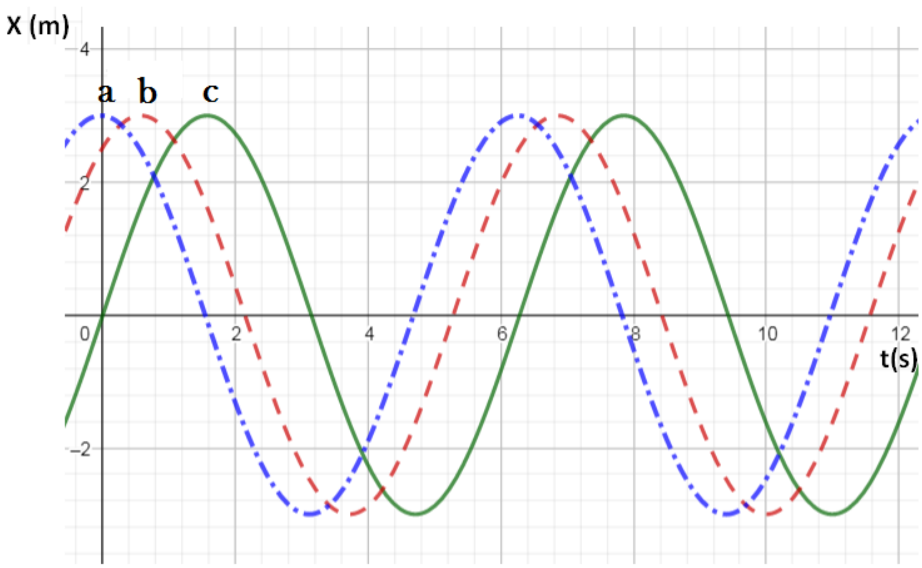


Fig. 2.6. Se aprecian tres movimientos armónicos simples con igual amplitud, igual frecuencia pero diferentes fases.

Considerando la función coseno. $x(t) = A\cos(wt + \phi)$

La Fig. 2.6a. corresponde a una masa que inicia su movimiento (t=0) en la posición extrema (x = A) y en reposo v = 0; para estas condiciones, de la ecuación para x (t), se obtiene: $\phi = 0$; resultando finalmente la ecuación x (t) = Acos (wt) cuya grafica x (t) vs t se muestra en la Fig. (2.7)

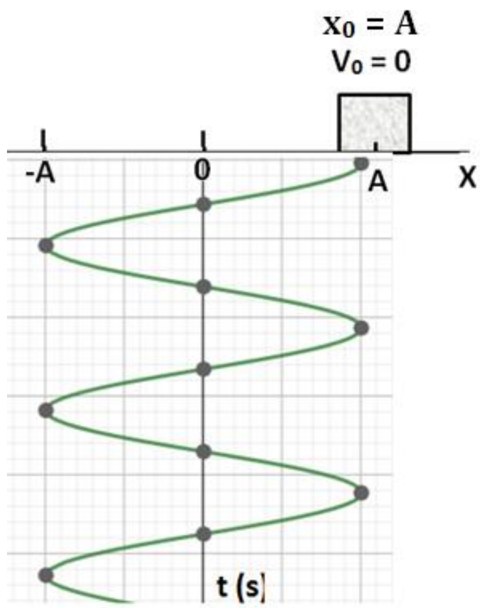


Fig. 2.7. Movimiento armónico simple con fase (ϕ) = 0 siendo la función x (t) = Acos (wt) correspondiente a la Fig. (2.6a).

La Fig. 2.6b: corresponde a una masa que inicia su movimiento (t= 0), en una posición x menor que la amplitud (x<A); pero con velocidad positiva (v>0); para estas condiciones, de la ecuación para x (t), se obtiene: $\phi < 0$; resultando finalmente la ecuación x (t) = Acos (wt+ϕ) cuya grafica x (t) vs t se muestra en la Fig. (2.7)

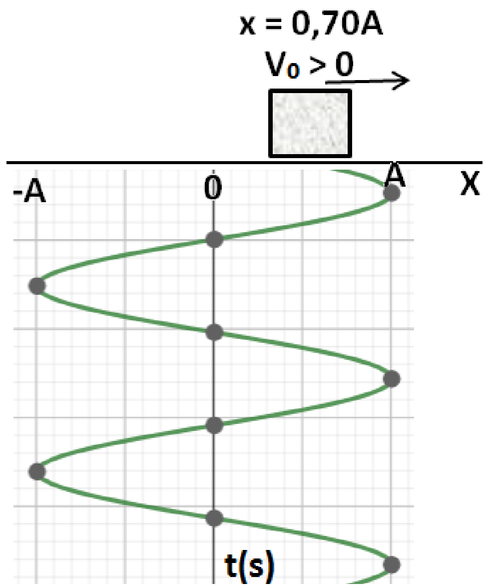


Fig. 2.8. Movimiento armónico simple con fase (ϕ) negativa siendo la función x (t) = Acos (wt+ϕ) correspondiente a la Fig. (2.6b).

La Fig. 2.6c corresponde a una masa que inicia su movimiento (t= 0), en la posición de equilibrio x= 0; con velocidad positiva (v>0); para estas condiciones, de la ecuación para x (t), se obtiene: $\phi = -\pi/2$; resultando finalmente la ecuación x (t) = Acos (wt-π/2) cuya grafica x (t) vs t se muestra en la Fig. (2.9)

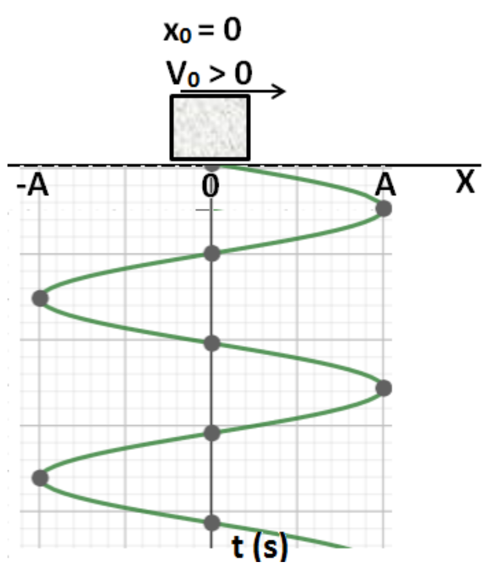


Fig. 2.9. Movimiento armónico simple con fase $\phi = -\pi/2$ siendo x (t) = Acos (wt-π/2) correspondiente a la Fig. (2.6c).

EXPRESIONES DE LA CINEMATICA EN EL M.A.S.

Siendo el movimiento armónico simple un movimiento rectilíneo, se pueden obtener las expresiones de la velocidad y la aceleracio0n recurriendo a las expresiones clásicas de la cinemática.

Posición: $x(t) = Acos(wt + \phi)$ ----------------------------------- (2.4)

Velocidad: $v(t) = \frac{dx}{dt} = -Awsen(wt + \phi)$ -------------------------------------- (2.5)

Aceleración: $a(t) = \frac{dv}{dt} = -w^2Acos(wt + \phi)$ -------------------------------------- (2.6)

Relación entre la velocidad y la posición en el m.a.s. de las ecs. (2.4) y (2.5), se tiene:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{Aw}\right)^2 = 1$$ --------------------------------------- (2.7)

De esta última ecuación se puede concluir que:

En x = 0; v = ±wA = v_{max}

En x = ± A (extremos); v=0

EJEMPLO 2.1

La ecuación de la posición de un m.a.s. es x (t)=8,00 cos (3,10t-1,50) expresado en el S.I. Hallar:

a) la amplitud y la frecuencia angular
b) el periodo y la frecuencia
c) la posición y velocidad de la partícula cuando t=5,8s
d) la rapidez máxima y aceleración máxima

ENERGIA EN EL SISTEMA MASA – RESORTE.

Durante el movimiento de la oscilación armónica simple, están presentes la energía cinética y la energía potencial elástica.

$Energia\ cinetica: E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mw^2A^2sen^2(wt)$ ---------------- (2.8)

$Energia\ potencial\ elastica: E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2cos^2(wt)$ ----------(2.9)

$Energia\ Mecanica: EM = E_c + E_p = \frac{1}{2}kA^2$ -------------------------- (2.10)

En la Fig. (2.10) se muestran las graficas de las energias cinetica, potencial elastica y mecanica en funcion del tiempo. Observandose que las energias cinetica y potencial varian con el tiempo y la energia mecanica se mantiene constante.

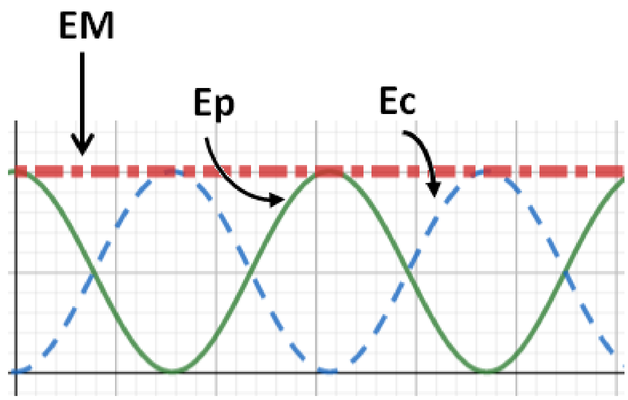


Fig. 2.10. Se aprecian los comportamientos de las energias cinetica, potencial elastica y mecanica en funcion del tiempo, siendo la energia mecanica constante dusrante el movimiento oscilatorio.

EJEMPLO 2.2

Un sistema masa - resorte con m=0,200 kg y k=150 N/m describe un m.a.s. representado por y=0,500 cos (wt). Hallar:

a) frecuencia angular y la velocidad máxima
b) la energía mecánica del sistema

2.12 Sistema Masa – Resorte. Movimiento Vertical

Consideremos una masa M unida a un resorte de constante elástica (k) y de posición vertical

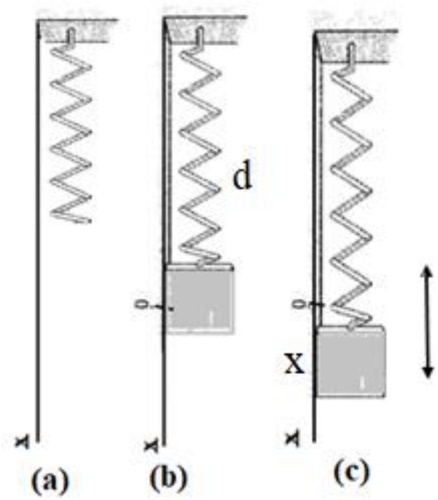
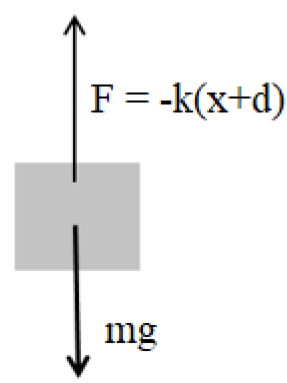


Fig. 2.11. (a) Resorte no deformado. (b) Resorte deformado (d) y sistema en posición de equilibrio. (c) Sistema oscilando con posición x (t) con respecto al equilibrio “0”

En la figura (2.12) se muestra el DCL afín de aplicar las ecuaciones de movimiento.

Fig. 2.12. Diagrama de cuerpo libre del movimiento oscilatorio vertical. x (t) = posición de la masa m; d = deformación inicial del resorte. X + d = deformación del resorte



En aplicación de la segunda ley de newton: $\Sigma\vec{F_i} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

En nuestro caso, siendo la deformación inicial del resorte = d y la posición de la masa x (t) respecto del origen de coordenadas “0”.

Posición de equilibrio: $\Sigma F_i = mg - kd = 0$; $kd = mg$

Posición de movimiento: $\Sigma F_i = mg - k(x+d) = md^2x/dt^2$;

Resultando la ecuación del m.a.s.:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0 \quad \text{----------------------------- (2.11)}$$

Siendo la solución general:

Posición: x (t) = A cos (wt+φ) ------------------------------ (2.12)

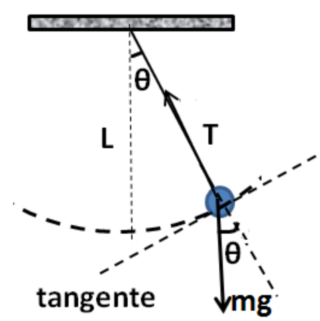
Frecuencia angular: w = $\sqrt{\frac{k}{m}}$ ---------------------------- (2.13)

Comparando las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) con las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13) podemos observar que la cinemática del movimiento del sistema masa resorte en la posición horizontal y vertical es la misma. Por consiguiente los análisis generales son idénticos, así como también para el caso de la oscilación en un plano inclinado.

2.13 El Péndulo Simple

Es otro sistema mecánico que realiza un movimiento armónico simple. Consiste de una masa m suspendida de una cuerda inextensible de longitud L. En la figura 2.13 se puede apreciar las fuerza que actuan durante la oscilacion de un pendulo simple, siendo la variable de posicion el angulo θ.

Fig. 2.13. Péndulo Simple



Aplicando la ecuación de la dinámica (2da Ley de Newton) en la dirección tangente:

$$\Sigma F_t = -mgsen\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

Siendo la longitud del arco: s = Lθ, Para ángulos pequeños: $\theta < 12^0 \approx 0{,}20\, rad;\ \ \sin\theta \approx \theta$, resulta la ecuación diferencial armónica para el péndulo simple:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right)\theta = 0 \quad \text{----------------------------- (2.14)}$$

$$Frecuencia\ angular\ (w) = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$frecuencia\ (f) = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$Periodo\ (T) = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

EJEMPLO 2.3

Un péndulo con 1,50 m de longitud oscila libremente. Si se le suelta desde un ángulo de 12,0°, se pide:

a) La frecuencia angular y el periodo
b) La posición angular en función del tiempo
c) La velocidad angular en función del tiempo
d) La posición y velocidad angular cuando t= 1,50s.

2.14 Péndulo Físico.

Se llama así a la oscilación de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo "0". La Fig. 2.14 muestra las fuerzas actuantes sobre el péndulo físico.

Aplicando las ecuaciones de la dinámica rotacional:

$$\Sigma\tau_0 = I\alpha$$

$$-Mgsen\theta d = I_o\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

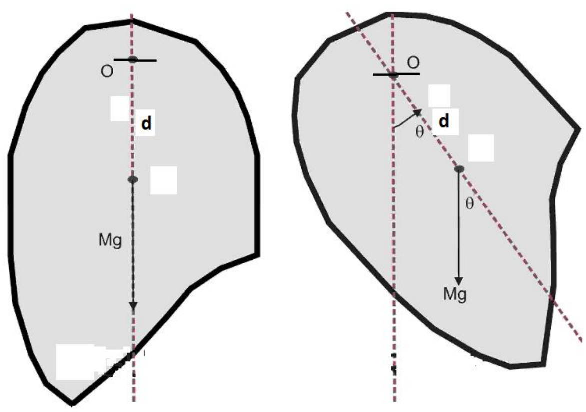


Fig. 2.14. Péndulo Físico. Corresponde a un cuerpo rígido en oscilación pendular alrededor de un punto fijo O.

Para ángulos pequeños: $\theta < 12^0 \approx 0{,}20\, rad;\quad \sin\theta \approx \theta$, resultando la ecuación armónica para el movimiento del péndulo físico:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Mgd}{I_0}\right)\theta = 0 \quad \text{----------------------------- (2.15)}$$

$$Frecuencia\ angular(w) = \sqrt{{Mgd}/{I_0}} \text{ ----------------------------- (2.16)}$$

2.2 OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Se presenta cuando en un m.a.s. además de la fuerza elástica (-kx), actúa una fuerza disipativa o de fricción, proporcional y opuesta a la velocidad

Fuerza de fricción: f = -bv ------------------------------- (2.17)

Siendo (b) un coeficiente que representa la forma geométrica y dimensión del cuerpo en movimiento, así como también la viscosidad del fluido.

La fuerza disipativa no es una fuerza de fricción entre un cuerpo y una superficie rugosa sino más bien puede corresponder a la fuerza de fricción que le genera un fluido viscoso cuando un cuerpo se mueve a través de él. La Fig. 2.17 muestra el DCL con las fuerzas actuantes en un movimiento armónico amortiguado.

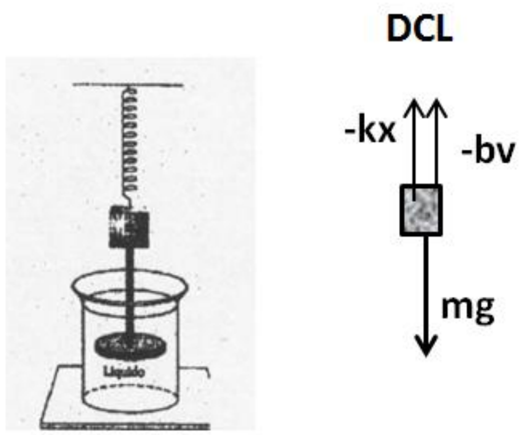


Fig. 2. 17. Se muestra el modelo de un movimiento armónico amortiguado con el Diagrama de cuerpo libre (DCL) correspondiente.

Aplicando las ecuaciones de la dinámica en la 2da Ley de Newton para un movimiento horizontal, las cuales son equivalentes a un movimiento vertical: $\Sigma Fi=-kx-bv=md^2x/dt^2$, resulta:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0 \text{----------------------------- (2.18)}$$

Obteniéndose como solución de esta ecuación diferencial:

$$x(t) = Ae^{-bt/2m}\cos(w_d t + \phi) \text{---------------------------------} (2.19)$$

$$Frecuencia\ angular\ de\ amortiguacion\ (w_D) = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$Constante\ de\ amortiguacion\ (b);\ \ [b] = 1/s$$

$$Frecuencia\ natural\ de\ oscilacion\ (w_0) = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$Amplitud\ (A) = A_0 e^{-bt/2m}$$

La Fig. 2.18 corresponde a la gráfica de la ec. (2.19) mostrando una atenuación en la amplitud del movimiento oscilatorio.

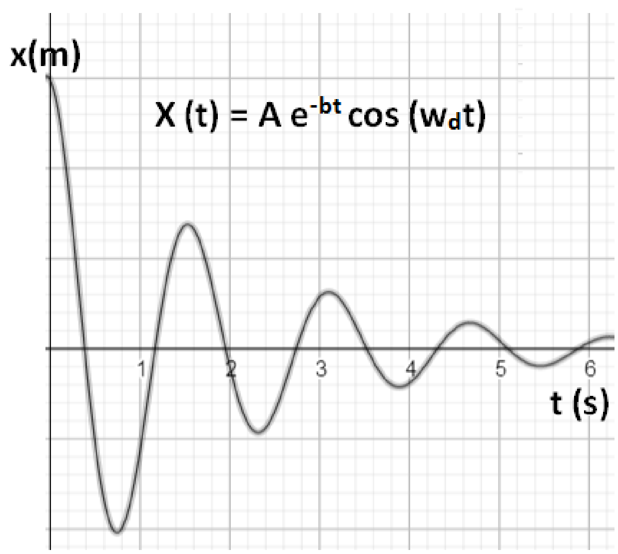


Fig. 2.18. Se muestra la gráfica posición en función del tiempo para un el movimiento armónico amortiguado.

De la gráfica 2.18 se puede apreciar que la posición inicial del cuerpo en oscilación corresponde a la amplitud, sin embargo a medida que pasa el tiempo, la oscilación posee una amplitud decreciente en el tiempo, esto corresponde a la disminución de la energía mecánica por la presencia de la fuerza de fricción.

2.3 OSCILACIONES FORZADAS

Cuando en las oscilaciones amortiguadas actúa adicionalmente una fuerza externa periódica. El resultado es un m.a.s. cuya amplitud depende de la fuerza externa. En la Fig. 2.19 se muestra el DCL de las fuerzas actuantes en un movimiento oscilatorio amortiguado y forzado.

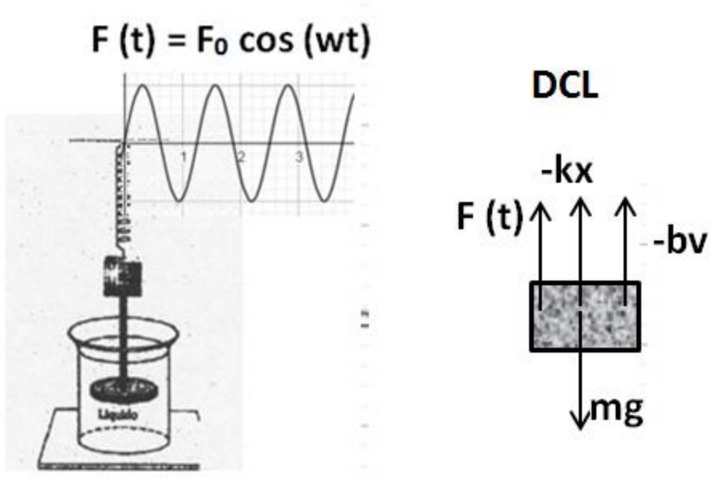


Fig. 2.19. Se muestra un modelo de movimiento armónico amortiguado y forzado, por la acción de una fuerza externa periódica F (t) y el DCL correspondiente.

Afín de analizar el movimiento resultante, aplicamos las ecuaciones de la dinámica en la 2da ley de Newton.

$$\Sigma F = F_0 \cos(wt) - kx - bv = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} \text{ ------------------ } (2.20)$$

Arreglando la ec. (2.20), obtenemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)x = \frac{F_0}{m}\cos(wt)$$

Siendo la solucion de la ecuacion difereencial del movimiento armonico, amortiguado y forzado:

$$posicion(x) = Acos(wt + \phi)\text{----------------------------------} (2.21)$$

$$Amplitud(A) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(w^2 - w_0^2)^2 + \left(\frac{bw}{m}\right)^2}} \text{-----------------------------------} (2.22)$$

$$Frecuencia\ natural\ (w_0) = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{-------------------------} (2.23)$$

Como se puede apreciar de las ecuaciones (2.21), (2.22), (2.23), el movimiento resultante también es un movimiento oscilatorio con energía mecánica constante, al igual que un movimiento armónico simple; donde la energía mecánica disipada por la fricción es compensada por la energía proveniente de la fuerza externa.
En este movimiento oscilatorio, destacan dos frecuencias:
W_0 = Frecuencia natural del sistema masa resorte.
W = Frecuencia de la fuerza externa.

RESONANCIA MECANICA

Cuando la frecuencia de la fuerza externa (w) se acerca a la frecuencia natural de oscilación (w_0), la amplitud se incrementa hasta llegar a un máximo (Fig.2.20), aquí la energías mecánica del sistema oscilatorio adquiere su máximo valor de la energía mecánica, la que se puede interpretar como la máxima energía que el sistema oscilatorio absorbe de la fuente externa.

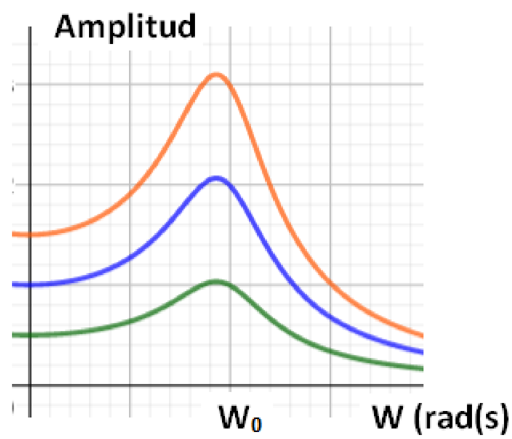
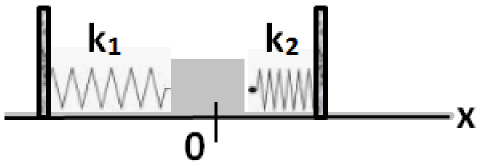


Fig.2.20. Se muestra el fenómeno de resonancia mecánica cuando la frecuencia de la fuerza externa se acerca a la frecuencia natural del sistema; para tres valores máximos diferentes de la fuerza (F_0).

2.4 COMBINACION DE FUERZAS ELASTICAS

Es posible que en la naturaleza se presenten casos de varias fuerzas elásticas actuando simultáneamente. Presentamos dos casos desde los cuales se puede extender a otras situaciones similares.

2.4.1 Resortes en paralelo.



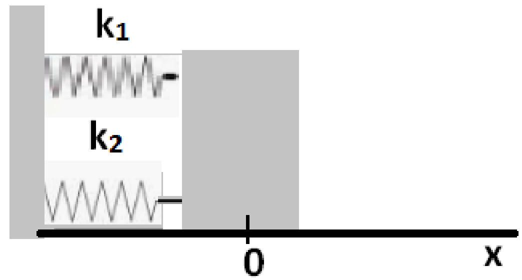


Fig. 2.21. La combinación de resortes en paralelo, también genera un movimiento armónico simple. Tienen igual deformación.

Para cualquiera de las disposiciones mostradas en la Fig. 2.21, ambos resortes tienen igual deformación. Afín de analizar el movimiento resultante, aplicamos las ecuaciones de la dinámica en la 2da ley de Newton.

$\Sigma F = -k_1x - k_2x = md^2x/dt^2$;

Resultando la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_1+k_2}{m} = 0 \text{ --------------------------------- } (2.24)$$

Siendo la solución la ecuación de un movimiento armónico simple

$$x(t) = A\cos(wt+\phi) \text{ -- } (2.25)$$

Siendo la frecuencia angular de oscilación:

Frecuencia angular: $w = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$

2.4.2 Resortes en serie

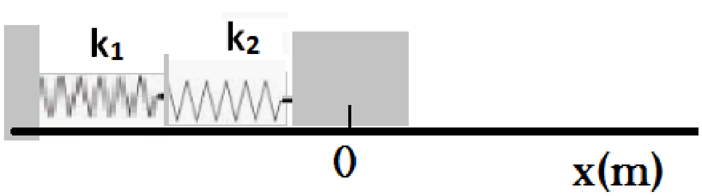


Fig. 2.22. La combinación de resortes en serie, también genera un movimiento armónico simple. Las deformaciones de los resortes tienen cierta relación.

Para esta disposición, las deformaciones de los resortes tienen cierta relación. Afín de analizar el movimiento resultante, aplicamos las ecuaciones de la dinámica en la 2da ley de Newton, considerando que la masa se desplaza una distancia x y el punto de unión de los resortes una distancia y. se tiene (ver Fig. 2.22):

Deformación del resorte (k_1) = y

Deformación del resorte (k_2) = x - y

La ecuación diferencial de movimiento de la masa m es:
$\Sigma F = -k_2(x-y) = md^2x/dt^2$;

En el punto de unión de los dos resortes donde la masa es cero: $\sum F = k_2(x-y) - k_1y=0$;
Resultando la relación entre la deformación de los resortes: $y = k_2x/(k_1+k_2)$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{m}\left(\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\right)x = 0 \quad \text{---------------------------------} \; 2.26$$

Siendo la solución la ecuación de un movimiento armónico simple

$$x(t) = A\cos(wt + \varnothing) \quad \text{---} \; 2.27$$

Constante elástica equivalente del sistema de resortes en serie: $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$

Frecuencia angular de oscilación: $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$

EJERCICIOS DE APLICACION

OSCILACIONES ARMONICAS SIMPLES

EJERCICIO 2.1.

Una masa de 250 g realiza un M.A.S. cuya ecuación es: y (t)=0,450cos (1,25t) expresado en el S.I. Halle:

a) el periodo
b) la rapidez máxima y aceleración máxima
c) la velocidad y aceleración en la posición y=0,300 m
d) la energía mecánica

Solución

a) $T = 2\pi/w = 2\pi/1{,}25 = 5{,}03$ s
b) $V_{max} = wA = 1, 25x0, 450 = 0{,}563$ m/s; $a_{max} = w^2A = 0{,}703$ m/s^2
c) De la ec. (2.7); $(0{,}300/0{,}450)^2 + (v/0{,}450x1, 25)^2 = 1$; $v = \pm 0{,}419$ m/s
d) $EM = mv_{max}^2 /2 = 0{,}250x0, 563^2 /2 = 0, 0396$ J.

EJERCICIO 2.2.

Un cuerpo atado a un resorte oscila con amplitud de 0,450 m y un periodo de 3,15 s. La energía cinética máxima del cuerpo es de 0,500 J. Determine:

a) la constante del resorte y la masa del cuerpo
b) la ecuación del movimiento x (t) utilizando la función coseno, si en t=0, x=0 y el cuerpo se mueve hacia la derecha
c) la velocidad cuando x=0,300 m

Solución

a) $E_{c,max} = EM = kA^2 /2$; $k = 2x0{,}500/0{,}4502 = 4{,}94$ N/m; $W=2\pi/3, 15 = 1, 99$ rad/s; $m = k/w^2 = 4, 94/1{,}992 = 1, 25$ kg
b) $x (t) = A\cos (wt +\varphi) = 0{,}450\cos (1{,}99t +\varphi)$; reemplazando datos iniciales: $0 = 0{,}450\cos (\varphi)$; $\varphi = \pm\pi/2$; $V = dx/dt = -0{,}450x1, 99sen (1{,}99t+\varphi)>0$ en t=0; $\varphi = -\pi/2$. $X (t) = 0{,}450\cos (1{,}99t -1, 57)$ m
c) $(0{,}300/0{,}450)^2 + (v/0{,}450x1, 99)^2 = 1$; $v = 0{,}667$ m/s.

EJERCICIO 2.3.

Una masa de 0,350 kg fija al extremo de un resorte vibra 3 veces por segundo con una amplitud de 7,50 cm. Calcular:

a) la velocidad cuando pasa por el punto de equilibrio
b) la velocidad cuando está a 5,00 cm del equilibrio
c) la energía mecánica del sistema
d) la ecuación del movimiento de la masa, utilizando la función coseno, asumiendo que cuando t=0, el estiramiento del resorte es máximo.

Solución

a) $w = 2\pi f = 2\pi x3 = 18{,}8$ rad/s; $v_{max} = wA= 18{,}8x0{,}0750 = 1{,}41$ m/s
b) De la ec.(2.7), $(5, 00/7, 50)^2 + (v/1, 41)^2 = 1$; $v = \pm 1, 05$ m/s
c) $EM = mv_{max}^2 /2 = 0{,}350x1, 41^2 /2 = 0{,}348$ J
d) $X = A\cos (wt+\varphi) = 0{,}0750\cos (18{,}8t +\varphi)$; reemplazando datos iniciales: $0{,}750 = 0{,}750\cos (\varphi)$; $\varphi =0$; $x (t) = 0{,}750\cos (18{,}8t)$ m

EJERCICIO 2.4.

En un sistema masa - resorte en posición vertical, la masa de 4,00 kg está unida a un resorte ideal y oscila verticalmente en M.A.S, con frecuencia angular de 15,0 rad/s. La amplitud es de 0,0500 m. Inicia su movimiento cuando el resorte está en su punto más bajo de su oscilación. En el punto más alto del movimiento, el resorte tiene su longitud natural (sin deformación). Se pide:

a) La constante elástica del resorte.
b) La ecuación del m.a.s. tomando como base la función coseno y la gráfica (x vs. t) del movimiento oscilatorio.
c) La posición y velocidad de la masa, en el tiempo de 0,500 s después de iniciado su movimiento. Dibuje la posición del cuerpo en ese instante indicando si sube o baja.

Solución

a) $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$; k = 4,00x(15,0)^2 = 900 N/m

b) x(t) = Acos (wt +φ); siendo en t=0, x = -A; -A = A cosφ; cosφ = -1; φ=π rad Resultando: x(t) = 0,0500cos (15,0t + π) m

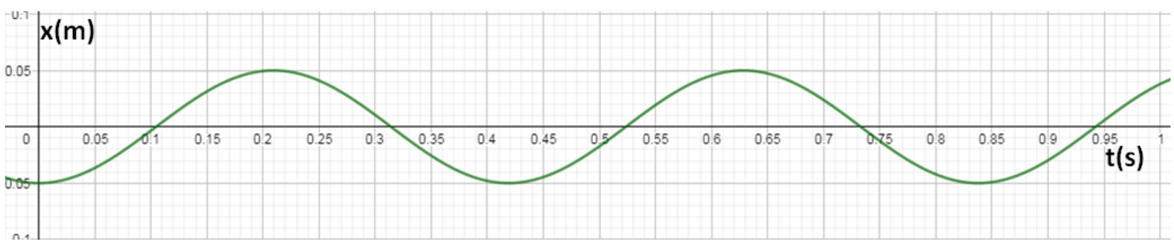


Fig.2.23. Grafica x vs t en el sistema masa – resorte. Ejercicio 2.4

c) Cuando t = 0,500s, x = 0,0500xcos (15,0x0, 500 + π) = -0,017 m V = -15,0x0, 0500sen (15,0x0, 500 +π) = 0,703 m/s Se encuentra debajo de la posición de equilibrio, pero subiendo.

EJERCICIO 2.5.

Una masa de 0,500 kg unida a un resorte de constante elástica 8,00 N/m vibra en un movimiento armónico simple con una amplitud de 10,0 cm. Si parte de la posición x = 6,00 cm con velocidad inicial positiva, Se pide:

a) Encontrar la posición en función del tiempo. x (t) y grafique x vs t
b) La velocidad y aceleración cuando inicia el movimiento
c) El tiempo que tarda desde que inicia el movimiento hasta que pasa por el equilibrio

Solución

a) X = Acos(wt+φ); A = 0,100 m; $w = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{8,00}{0,500}} = 4,00\ rad/s$

t =0; x = 0,0600m; 0, 0600 = 0,100cosφ; φ = ±0,927 rad. V = -Awsenφ>0; por tanto, φ = -0,927 rad.
Posición: x (t) = 0,100cos (4,00t -0,927) m

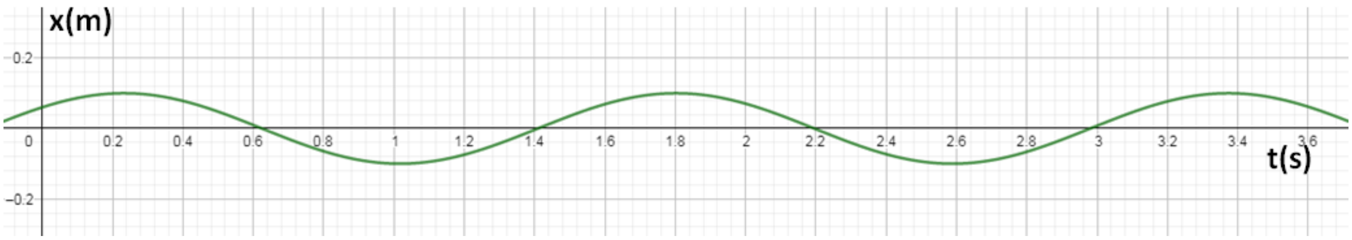


Fig.2.24 Grafica x vs t en el m.a.s. Ejercicio 2.5

b) V = dx/dt = -0,400sen (-0,927) = 0,320 m/s a = dv/dt = -4,002x0, 0600 = -0,960 m/s^2
c) x = 0,100cos (4,00t -0,927) = 0; t = 0,624 s.

EJERCICIO 2.6.

Una partícula realiza un MAS con una frecuencia de 5,00 Hz. En t = 0 s, x = 10,0 cm y su velocidad es 3,14 m/s. Determinar:

a) La posición y la velocidad en función del tiempo. Grafique x vs t
b) los valores máximos de la velocidad y aceleración.
c) El tiempo que tarda desde que parte hasta que pasa por la posición de equilibrio

Solución

a) x(t) = Acos(wt +φ); w = 2πf = 31,4 rad/s ; de la ec.(2.7):

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{wA}\right)^2 = 1;$$
$$\left(\frac{0,100}{A}\right)^2 + \left(\frac{3,14}{31,4A}\right)^2 = 1$$

A = 0,141 m en t=0; 0,100 = 0,141cos (φ); φ = ±0,782 rad v = -Awsenφ>0; φ= -0,782 rad;
Posición: x (t) = 0,141cos (31,4t -0,782) m
Velocidad: v (t) = dx/dt = -4, 43sen (31,4t -0,782) m/s

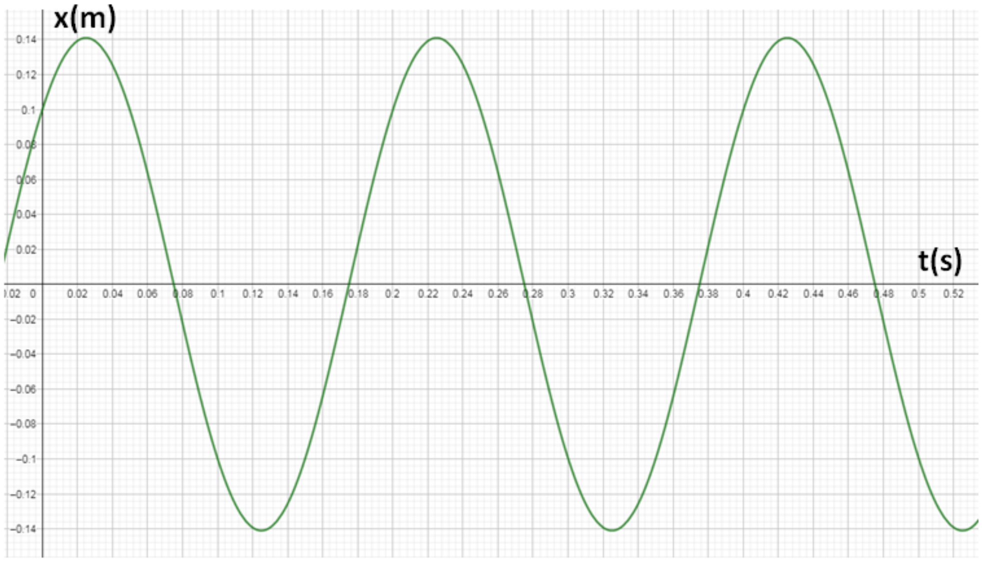


Fig. 2.25. Grafica x vs. t del M.A.S. Ejercicio 2.6

b) V_{max} = wA = 31,4x 0,141 = 4,43 m/s; a_{max} = w^2A =139 m/s^2

c) x = 0,141cos (31,4t-0,782) = 0; t = 0,0749 s.

EJERCICIO 2.7.

Un bloque de masa 0,750 kg se amarra a un resorte horizontal, cuya constante es de 80,0 N/m. En t = 0,150 s el desplazamiento es x = - 0,250 m y la velocidad v = + 0,450 m /s

a) Hallar la frecuencia angular, amplitud y la constante de fase inicial

b) Escriba la ecuación de la posición del bloque x (t)

c) Cuando ocurre por primera vez, a partir del t =0, la condición x = 0,200 m

Solución

a) Frecuencia angular (w)

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{80,0}{0,750}} = 10,3\ rad/s$$

$$EM = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\frac{1}{2}x0,750x0,450^2 + \frac{1}{2}x80,0x0,250^2 = \frac{1}{2}x80,0A^2$$

A = 0,254 m x (t) = Acos (wt+θ); -0,250 = 0,254cos (10,3x0, 15 +θ); 10,3x0, 150 +θ = ±2,96; θ1 = 1,42 rad; θ2 = -4,51 rad: v = -Awsen (wt+θ)>0; θ= -4,51 rad

b) x(t) = Acos(wt +θ) = 0,254 cos(10,3t -4,51) m
c) x = 0,254 cos (10,3t -4,51) = 0,200; 10,3t -4,51 = ±0,664;
   ocurre por primera vez en: t_1 = 0,373 s 3.

EJERCICIO 2.8.

Un perno de 0,0250 kg se mueve con MAS con una amplitud de 0,280m y periodo de 1,80 s. El perno está en la posición x = 0,240 m en t =0, con velocidad negativa. Hallar:

a) La ecuación de la posición en función del tiempo x (t).
b) La magnitud y dirección de la fuerza sobre el perno en t = 0,650s
c) El tiempo mínimo que tarda el perno en moverse desde su posición inicial hasta x= -0,150 m

Solución

a) x (t) = Acos (wt + θ); w = 2π/T= 2π/1, 80 = 3,49 rad/s;
   Condición inicial: 0,240 = 0,280cosθ; θ = ±0,541; v = -Awsenθ<0; θ = 0,541 rad
   X (t) = 0,280cos (3,49t + 0,541) m
b) V = -0,977sen (3,49t + 0,541); a = -3, 41cos (3,49t + 0,541); t = 0,650s; a = 3, 22 m/s^2 ; F = ma = 0,0806 N. Dirección +X.
c) x = 0,280cos (3,49t + 0,541) = -0,150; t = 0,457 s

EJERCICIO 2.9.

Un bloque de 3,50 kg está conectado a un resorte ideal de constante elástica 1250 N/m, se desplaza sin fricción a lo largo del eje X. En el instante inicial, el desplazamiento del bloque es x = 0,250 m tiene una rapidez V = - 5,40 m/s. Halle:

a) La ecuación de la posición x (t).
b) La velocidad cuando t = 2,00 s.
c) Le energía mecánica

Solución

a) W = $(k/m)^{1/2}$ = $(1250 / 3,5)^{1/2}$ = 18,9 rad/s
x (t) = Acos (wt + φ) = Acos (18,9t + φ) -------------------- (1)
v = dx/dt = -18,9A sen (18,9t + φ) ------------------- (2)
Reemplazando x = 0,25 m; v = -5,40 m/s
0, 250 = A cos (φ) ------------------------ (3)
-5, 40 = -18, 9 A sen (φ) --------------------- (4)
Resolviendo:
A = 0,380 m y φ = 0,852 rad.
x (t) = 0,380 cos (18, 9t+0,852)
b) V = -0,380x18, 9 sen (18,9x2 + 0,852) = -5, 85 m/s
c) E = $kA^2/2$ = 1250x $(0,380)^2/2$ = 90,3 J

Un sistema masa - resorte en posición vertical, la masa de 4,00 kg está unida mediante un arnés a un resorte ideal y oscila verticalmente en M.A.S, con frecuencia angular de 15,0 rad/s.

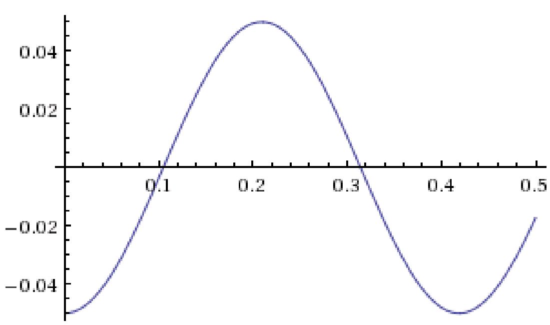
EJERCICIO 2.10.

La amplitud es de 0,0500 m. En el punto más alto del movimiento, el resorte tiene su longitud natural (sin deformación). Inicia su movimiento cuando el resorte está en su punto más bajo de su oscilación. Se pide:

a) La constante elástica del resorte, y la gráfica (x vs. t) del movimiento oscilatorio.
b) la deformación del resorte cuando pasa por la posición de equilibrio y en el punto más bajo de la oscilación.
c) La ecuación del m.a.s. tomando como base la función coseno.
d) La velocidad de la masa, en el tiempo de 1,20 s después de iniciado su movimiento.

Solución

a) $k = m\omega^2 = 4{,}0 \times (15)^2 = 900\, N/m$



b) En el equilibrio: kd = mg; $d = \frac{mg}{k} = \frac{4{,}00x9{,}81}{900} = 0{,}0436\ m$

En el extremo inferior: d = 0,0436 + 0,0500 = 0,0936 m

c) x = Acos(wt +φ)
Amplitud (A) = 0,0500 m; frecuencia angular (w) = 15,0 rad/s
t = 0; x = -A = Acos(φ); φ= π; x(t) = 0,0500 cos (15,0t + π)

d) V = dx/dt = -0,0500x15,9 sen(15,0x1,20+π) = -0,563 m/s

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

EJERCICIO 2.11.

Se tiene un sistema masa-resorte con m=2,50 kg, y k=500 N/m. Sometidos a una fuerza de amortiguamiento Fa = -bv. Si el sistema parte del reposo en t = 0, con una amplitud inicial de 20,0 cm y luego de dos ciclos la amplitud disminuye a 14,5 cm. Halle:

a) la frecuencia angular y el coeficiente de amortiguación γ .
b) Escriba la ecuación de la posición $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$;
c) La energía mecánica después de dos periodos de iniciado el movimiento.

Solución

a) $A = A_0e^{-\gamma t}$; $0{,}145 = 0{,}200e^{-\gamma(2T)}$; $\text{Ln}(0{,}145/0{,}200) = -2\gamma(2\pi/w)$; $\gamma/w = 0{,}0256$ ----- (1)

$W^2 = k/m - \gamma^2$; $w^2 = 200 - \gamma^2$ ----------------- (2)

Resolviendo ecs (1) y (2): w = 14,1 rad/s y $\gamma = 0{,}363$/s

b) Reemplazando datos iniciales: $0{,}200 = 0{,}200\cos\varphi$; $\varphi = 0$; $x(t) = 0{,}200e^{-0{,}363t}\cos(14{,}1t)$
c) $EM = kA^2/2 = 500\text{x}0{,}145^2/2 = 5{,}26$ J

EJERCICIO 2.12

Un sistema en vibraciones amortiguadas con masa de 3,20 kg y una frecuencia angular ω= 35,0 rad/s, parte del reposo en t=0 con una amplitud inicial de 30,0 cm. La razón de dos amplitudes sucesivas es 1,40. ($x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$). Halle:

a) El periodo del movimiento y el coeficiente de amortiguamiento γ
b) Escriba la ecuación de la posición x (t) = Ae-γ t cos (ωt + φ)).
c) Al cabo de que tiempo la energía mecánica llega ser la mitad de la inicial

Solución

a) $W = 2\pi/T$; $T = 2\pi/35{,}0 = 0{,}180$ s; $A_1 = Ae^{-\gamma t1}$; $A_2 = Ae^{-\gamma t2}$; $A_2/A_1 = e^{-\gamma(t1-t2)}$; reemplazando datos: $1/1{,}40 = e^{-0{,}180\gamma}$; $\gamma = 1{,}87\ s^{-1}$
b) Reemplazando datos iniciales: $0{,}300 = 0{,}300\cos\varphi$; $\varphi = 0$. $x(t) = 0{,}300e^{-1{,}873t}\cos(35{,}0t)$
c) $EMo = kA_o^2/2$; $EM = kA^2/2$; $EMo/EM = (Ao/A)^2 = e^{2\gamma t}$; reemplazando datos: $2 = e^{2\text{x}1{,}87t}$; t = 0,185 s

EJERCICIO 2.13.

Una masa de 0,350 kg unida a un resorte de constante k=70,0N/m, se coloca en un ambiente en el cual hay una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad de la masa. La masa parte del reposo en t = 0 con amplitud inicial de 0,120 m, observándose que su amplitud se reduce hasta el 70,0% de su valor inicial en 3,50s. ($x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$). Determinar:

a) El coeficiente de amortiguamiento γ.
b) La frecuencia angular y el periodo del movimiento amortiguado.
c) La Amplitud y energía mecánica después de cuatro periodos de iniciado el movimiento.

Solución

a) $A = Ao\ e^{-\gamma t}$; $A/Ao = 0{,}700 = e^{-3{,}50\gamma}$; $\gamma = 0{,}102$ /s
b) $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{70{,}0}{0{,}350}} = 14{,}1 rad/s =$; $w_D\sqrt{14{,}1^2 - 0{,}102^2} = 14{,}0 rad/s$;

$T_D = 2\pi/w_D = 0{,}449$ s

c) $A = 0{,}120e^{-0{,}102x4x0{,}466} = 0{,}0992$ m; $EM = kA^2/2 = 70{,}0x0{,}0992^2/2 = 0{,}344$ J

EJERCICIO 2.14.

Una masa de 0,500 kg unida a un resorte de constante k=50,0N/m, se coloca en un ambiente en el cual hay una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad de la masa. La masa parte del reposo en t = 0s de $A_0 = 0{,}100$m, observándose que su amplitud se reduce a 0,600 A_0 en 2,55s. Determinar:

a) El coeficiente de amortiguamiento "γ (1/s)".
b) Las frecuencias angulares w_0, w_D. y el periodo del movimiento amortiguado.
c) La energía potencial elástica después de cuatro periodos.

Solución

a) $A/A_0 = e^{-\gamma t}$; Ln0, 600 = -2,55γ; $\gamma = 0{,}200$/s

b) $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50{,}0}{0{,}500}} = 10{,}0\, rad/s$

$w_D = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{10{,}0^2 - 0{,}200^2} = 9{,}99\, rad/s$

$T = w_D/2\pi = 1{,}59$ s; t = 4x1, 59 = 6, 36 s; $A = 0{,}100e^{-(0{,}200x6{,}36)} = 0{,}0280$ m

c) D9 EP =

EJERCICIO 2.15.

Un oscilador amortiguado consiste de una masa de 2,00 kg, un resorte de constante 400N/m, y una fuerza de amortiguamiento f = -bv. Si inicialmente parte del reposo en t = 0, tiene una amplitud de 25,0 cm y por causa del amortiguamiento la amplitud disminuye a 18,0 cm después de 1,80 s. Se pide:

a) El coeficiente de amortiguación (γ, 1/s) y el periodo del oscilador amortiguado
b) la energía mecánica inicial.
c) Escriba la ecuación x (t).

Solución

a) $A/A0 = e^{-\gamma t}$; Ln(18/25) = -γ(1,80); $\gamma = 0{,}183$ /s ;

$$\boldsymbol{w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400}{2{,}00}} = 14{,}1}$$

;

$$\boldsymbol{w_D = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{14{,}1^2 - 0{,}183^2} = 14{,}0 = \frac{2\pi}{T_D}}$$

; $T_D = 0{,}446$ s

b) $EM = kA^2/2 = 400x0{,}250^2/2 = 12{,}5$ J

c) $x(t) = 0{,}250e^{-0{,}183t}\cos(14{,}0t)$ m

EJERCICIO 2.16.

Una masa de 0,450 kg atada a un resorte de constante k=80,0N/m, oscila estando sujeta a una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad de la masa. La masa parte del reposo en t = 0s de A0 = 45,0 cm, observándose que su amplitud se reduce hasta 34,0 cm en 3,50 s. Determinar:

a) El coeficiente de amortiguamiento "γ (1/s)" y la amplitud al cabo de 5,00 s.
b) Las frecuencias angulares w_0, w_D.
c) La energía mecánica inicial.

Solución

a) $A/A_0 = e^{-\gamma t}$; $-\gamma$ (3,50) = Ln (34/45); γ = 0,0801 /s; $A = 0{,}450e^{-(0{,}0801x5,\,00)} = 0{,}301$ m

b) ;

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{80}{0{,}450}} = 13{,}3\ rad/s$$
;
$$w_D = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{13{,}3^2 - 0{,}0801^2} = 13{,}3$$

c) EM = $kA^2/2 = 80{,}0x0,\ 450^2/2 = 8{,}10$ J

EJERCICIO 2.17.

Un sistema masa-resorte amortiguado tiene un período de 1,60 s. Después de transcurridos 3 períodos de oscilación se nota que la amplitud se ha reducido al 4,00 % de su valor inicial. Partiendo de la posición máxima de 0,500m, se pide:

a) la frecuencia angular
b) la constante de amortiguamiento (γ).
c) Escriba la ecuación x (t) para el desplazamiento y haga una gráfica x vs t.

Solución

a) $w_D = 2\pi/T_D = 2\pi/1{,}60 = 3{,}93$ rad/s
b) $A = A_0e^{-\gamma t}$; $0{,}0400 = e^{-\gamma(3T)}$; Ln0,0400 = $-\gamma$(3x1,60); $\gamma = 0{,}671\ s^{-1}$:
c) $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(wt+\theta) = 0{,}500e^{-0{,}671t}\cos(3{,}93t)$ m

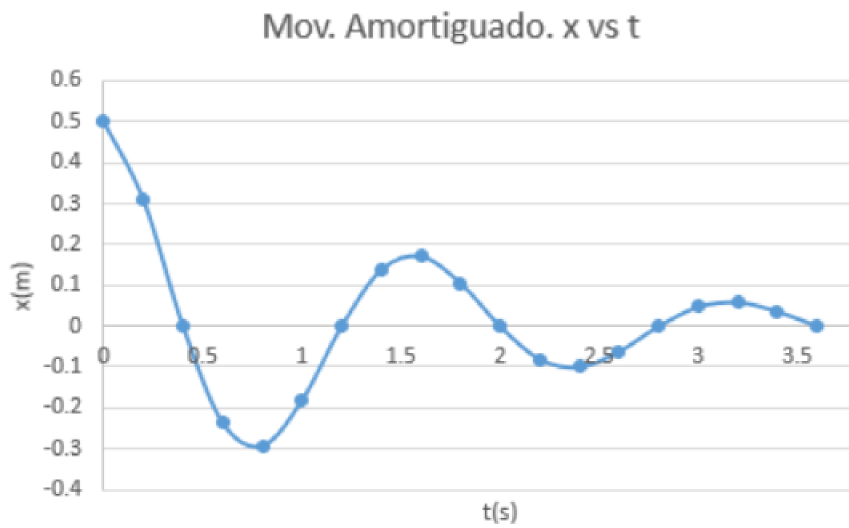


Fig.2.26. Grafica x vs t para el movimiento amortiguado. Ejercicio 2.16

EJERCICIO 2.18.

Una masa de 0,200 kg está unida a un resorte de constante elástica de 40,0 N/m y oscila con amortiguamiento de constante b. Se desplaza a la masa hasta una amplitud inicial de 0,500 m y se le suelta a partir del reposo. Si la amplitud disminuye a 0,350 m después de 4,00 s, se pide:

a) calcule la constante b.
b) el periodo del movimiento amortiguado
c) la ecuación de movimiento x (t) y grafique x vs t.

Solución

a) $A = A_0 e^{-\gamma t}$; 0,350 = 0,500e-γ (4,00) ; Ln(0,350/0,500) = -4,00γ; γ = 0,0892 s^{-1} γ = b/2m; b = 0,0892x2x0, 200 = 0,0357 kg/s
b) Frecuencia angular:

$$w_d = \sqrt{w_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{40,0}{0,200} - \left(\frac{0,0357}{2x0,200}\right)^2} = 14,1\ rad/s$$

$T_D = 2\pi/w_D = 2\pi/14,1 = 0,446$ s

c) x (t) = $Ae^{-\gamma t}$cos(wdt + θ) = $0,500e^{-0,0892t}$ cos(14,1t)

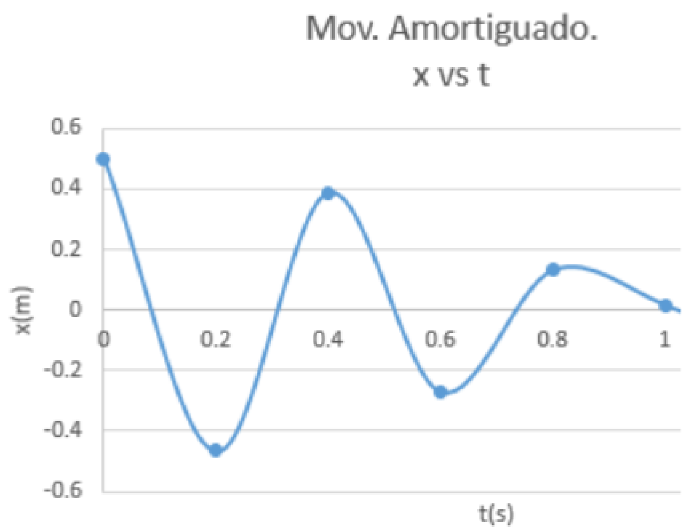


Fig. 2.27. Grafica x vs t para el movimiento amortiguado. Ejercicio 2.17

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS 2.1

Una partícula de 0,350 kg oscila lo largo del eje X, tal como muestra su grafico x vs t. Halle:

a) Los parámetros de la oscilación
b) la ecuación de x en función del tiempo t
c) El valor de t1 y la energía cinética en es punto

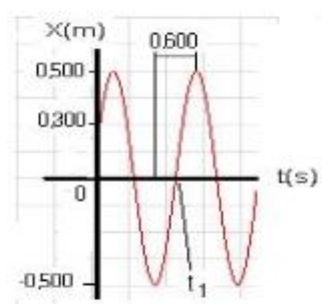


Fig.2.28 Grafica x vs. T. Problema 2.1

PROBLEMAS 2.2

Un punto material tiene un movimiento armónico simple sobre el eje X, de amplitud 1 m y frecuencia angular π rad/s. Hallar: a) su periodo y frecuencia, b) la ecuación del movimiento sabiendo que, inicialmente, la partícula se encuentra en su posición media moviéndose hacia el sentido positivo, c) velocidad y aceleración en función del tiempo, d) tiempo mínimo necesario para que la elongación valga –0.5 m, e) velocidad máxima de la partícula.

PROBLEMAS 2.3

Una partícula se mueve con una aceleración dada por a=−16π2 x (unidades cgs). Sabiendo que el desplazamiento máximo es de 4 cm y que se ha comenzado a contar el tiempo cuando el desplazamiento es positivo y la aceleración adquiere su valor absoluto máximo, determinar: a) La ecuación del movimiento; b) La velocidad y aceleración máximas; c) La velocidad y aceleración cuando el desplazamiento es la mitad del máximo

PROBLEMAS 2.4

Un muelle, de 40 cm de longitud natural, se encuentra en posición vertical con su extremo superior fijado al techo. Al poner una masa de 50 g en su extremo inferior, observamos que la longitud del muelle es de 45 cm. A continuación, desplazamos la masa 6 cm hacia abajo, con respecto a la posición de equilibrio, y luego la soltamos. Calcular: a) la constante del muelle, b) Posición, velocidad y aceleración de la partícula en función del tiempo, c) Velocidad, aceleración y fuerza cuando la partícula se encuentra subiendo a 2 cm por encima de la posición de equilibrio. [Solución: c) 9,8 N/m, b) x=0,06 cos (14t), c) –0,79 m/s; 3,91 m/s^2 ; 0,2 N]

PROBLEMAS 2.5

Un bloque se encuentra sobre una superficie que se mueve horizontalmente efectuando oscilaciones de frecuencia angular 7 rad/s. Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es de 0.3, ¿cuál debe ser la amplitud del movimiento de la superficie para que el bloque no deslice sobre ella?. [Solución: 6 cm]

PROBLEMAS 2.6

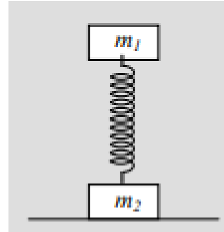
Se tienen dos muelles de constantes recuperadoras k1 y k2. a) Hallar la constante recuperadora del sistema formado con los dos muelles en paralelo, b) Hallar la constante recuperadora del sistema formado con los dos muelles en serie

PROBLEMAS 2.7

Una cuerda vertical de longitud L=1 m está tensa bajo un peso de 20 kg atado a su extremo. En el centro de la cuerda hay una masa pequeña de 1 g. Separamos este pequeño peso de su posición de equilibrio una distancia pequeña x y lo soltamos. a) Demostrar que se mueve con un m.a.s.; b) hallar la frecuencia de la vibración. [Solución: 885,4 rad/s]

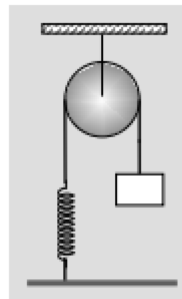
PROBLEMAS 2.8

Dos bloques, de masas m1=15 kg y m2= 20 kg, están unidos por un muelle vertical de masa despreciable. El conjunto, se apoya sobre un plano horizontal como se muestra en la figura. Si m1 oscila verticalmente con amplitud 2 cm y frecuencia 5 Hz: a) ¿Cuál es la fuerza máxima y la fuerza mínima que debe soportar el plano sobre el que se apoya el conjunto?, b) ¿Qué valor mínimo debería tener la amplitud de las oscilaciones para que, en ciertos instantes, el plano no soporte ninguna fuerza? [Solución: 639N, 47N, 2.3cm]



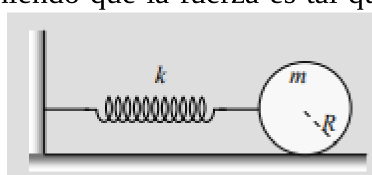
PROBLEMAS 2.9

. Un resorte vertical, de masa despreciable y constante k, tiene su extremo inferior fijado al suelo mientras que en su otro extremo lleva unido un hilo ideal. El hilo pasa por una polea de radio R y masa M, y lleva suspendido en su otro extremo un bloque de masa m. Determinar: a) La ecuación diferencial del movimiento de la masa m alrededor de su posición de equilibrio, b) periodo de la oscilación, c) tensiones del hilo a cada lado de la polea.



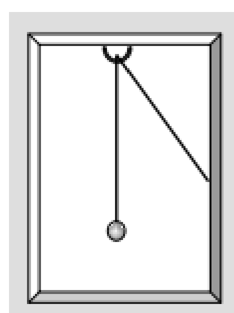
PROBLEMAS 2.10

Determinar la frecuencia de oscilación del sistema formado por un disco de masa m y radio R unido a un resorte de constante elástica k, suponiendo que la fuerza es tal que no existe deslizamiento del cilindro. [Solución: ω2 =2k/3m]



PROBLEMAS 2.11

Una pequeña esfera está suspendida de un hilo ideal encontrándose ésta a 14.2 cm del suelo. El hilo pasa a través de una arandela situada en el techo tal como se indica en la figura. Al hacer oscilar el sistema, observamos que tarda 5 min 45.4 s en realizar 50 oscilaciones completas. Tirando del otro extremo del hilo, subimos la esfera a 2.2 m del suelo, observando ahora que el tiempo empleado en realizar 50 oscilaciones es de 5 min 14 s. Calcular la altura del techo y el valor de g en ese lugar [Solución: 12 m, 9.81 m/s^2]



PROBLEMAS 2.12

Una varilla de 3 m de longitud y 1,0 kg de masa oscila suspendida por un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos. Calcular: a) Periodo de las oscilaciones, b) Longitud equivalente del péndulo, c) Periodo de las oscilaciones si la varilla oscila alrededor del eje horizontal que pasa por la varilla a un cuarto de su longitud. [Solución: a) 2.84 s, b) 2 m, c) 2.66 s]

PROBLEMAS 2.13

El péndulo de un reloj de pared está formado por una varilla de 1 m de longitud y masa m1=m en cuyo extremo hay soldado un cilindro macizo y homogéneo de masa m2=3m. Calcular el valor del radio del cilindro para que el periodo del péndulo sea de 2 s.

PROBLEMAS 2.14

Un objeto de masa m está suspendido de un muelle cuya constante elástica es k en un medio que se opone al movimiento con una fuerza opuesta a la velocidad y proporcional a ella. Experimentalmente se ha determinado la frecuencia de las oscilaciones, encontrándose que ésta es √3 /2 veces mayor que si no existiera amortiguamiento. Determinar: a) La ecuación diferencial del movimiento, b) La frecuencia natural del sistema, c) El coeficiente de amortiguamiento, d) El factor de calidad, e) El decremento logarítmico

PROBLEMAS 2.15

Un pequeño objeto de masa 2 kg cuelga sin vibrar del extremo de un resorte de constante elástica k=500 N/m sujeto al techo de un ascensor. Este inicia el movimiento hacia arriba con una aceleración de g/3 y de repente se detiene. Determinar: a) la frecuencia angular de la oscilación del objeto después de que cesa la aceleración; b) el aumento de longitud del resorte mientras se encuentra acelerado el ascensor; c) la amplitud de la oscilación y el ángulo de fase inicial visto por una persona que estaba en el ascensor. [Solución: a) 15,81 rad/s, b) 0,052 m, c) 0,013 m, 180º]

PROBLEMAS 2.16

Un platillo oscila verticalmente con un movimiento vibratorio armónico de amplitud A. Determinar la máxima frecuencia de oscilación posible sin que se separe del platillo un cuerpo colocado encima de él.

PROBLEMAS 2.17

Se tiene una regla uniforme de longitud L y se coloca en un plano vertical de modo que pueda girar alrededor de un eje horizontal, perpendicular a la regla, y a distancia d del centro de masa. Suponiendo oscilaciones pequeñas, calcular el valor de d para que el periodo sea mínimo

PROBLEMAS 2.18

Se tiene una masa m unida a un resorte de constante k. Hay amortiguamiento debido a una fuerza proporcional a la velocidad de la partícula, siendo la constante de proporcionalidad igual a k/2. a) Si la amplitud inicial es A, ¿cuánto tiempo transcurre hasta que la amplitud vale A/2?; b) ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que se ha disipado la mitad de la energía total?

PROBLEMAS 2.19

Se tiene una masa m unida a un resorte de constante k (sin masa). El amortiguamiento se supone despreciable (b=0); a) ¿Cuál será la frecuencia de la fuerza armónica externa aplicada a m para que el movimiento resultante tenga una amplitud máxima?, b) Si la frecuencia se duplica, ¿qué le pasa a la amplitud?

PROBLEMAS 2.20

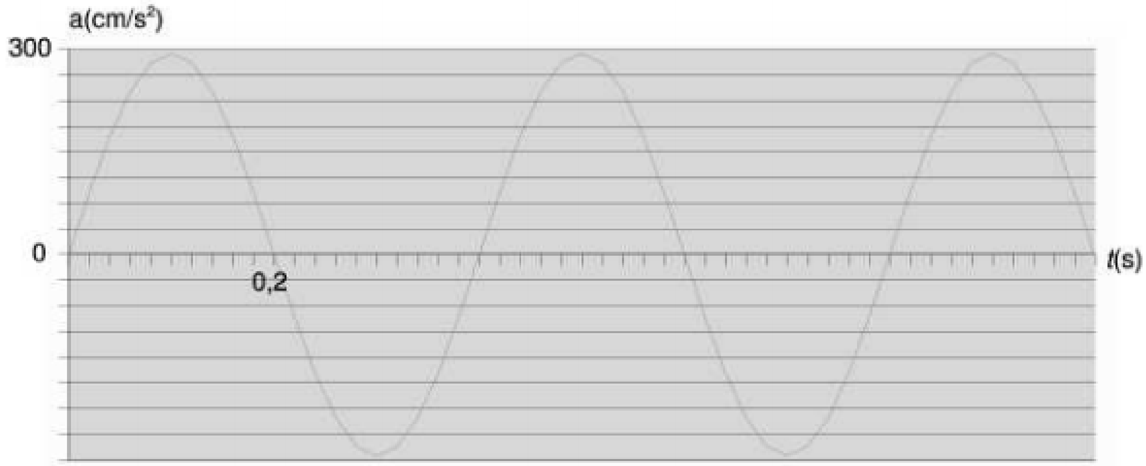
Una partícula que vibra a lo largo de un segmento de 10 cm de longitud tiene en el instante inicial su máxima velocidad que es de 20 cm/s. Determina las constantes del movimiento (amplitud, fase inicial, pulsación, frecuencia y periodo) y escribe las expresiones de la elongación, velocidad y aceleracion. Calcula la elongación, velocidad y aceleracion en el instante t = 1,75 π s. ¿Cuál es la diferencia de fase entre este instante y el instante inicial?

PROBLEMAS 2.21

Un resorte se alarga 4 cm cuando se cuelga de ´el un objeto de 20 kg de masa. A continuación, se estira el resorte 3 cm más y se le deja que oscile libremente. Determina el periodo y la pulsación del movimiento. Calcula los valores de la elongación, velocidad, aceleracion y dureza elástica a los 2,1 s de iniciado el movimiento. ¿Cuál es la diferencia de fase entre este instante y el instante inicial?

PROBLEMAS 2.22

La figura adjunta representa la gráfica de la aceleracion frente al tiempo para un movimiento vibratorio armónico simple. Deduce la expresión general de la posición.


a(cm/s²)
300
0
0,2
t(s)