Zadatak 061 (Matea, gimnazija)

Luk mosta ima oblik parabole. Visina mosta je 2 metra, a duljina raspona 24 metra. Napiši jednadžbu luka mosta.

Rješenje 061

Ponovimo!

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Nultočka grafa je točka u kojoj graf siječe os apscisa (y = 0). Vrijednost x za koju je f(x) = 0 zove se nulište funkcije. Najčešće se za oba pojma rabi izraz nultočka.

Graf kvadratne funkcije

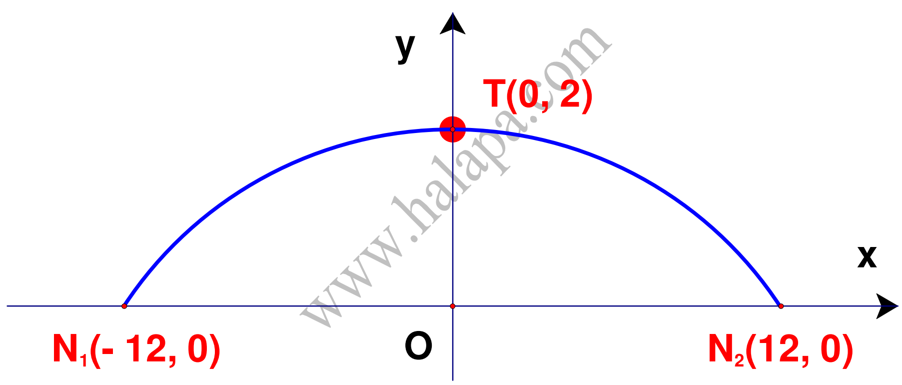
$$f(x) = a \cdot \left(x - x_0\right)^2 + y_0$$

parabola je

$$y = a \cdot \left(x - x_0\right)^2 + y_0$$

s tjemenom u točki $T(x_0, y_0)$ dobivena translacijom parabole $y = a \cdot x^2$. U točki x_0 funkcija f poprima najmanju vrijednost y_0 ako je a > 0, a najveću vrijednost y_0 ako je a < 0.

1.inačica



Postavimo most u pravokutni koordinatni sustav kao na slici. Visina luka mosta je ordinata tjemena T parabole. Budući da tjeme parabole ima koordinate T(0, 2), jednadžba luka mosta (parabole) je:

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_0,\ y_0\right) = T(0,\ 2) \\ y = a \cdot \left(x - x_0\right)^2 + y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ y = a \cdot (x - 0)^2 + 2\ \Rightarrow\ y = a \cdot x^2 + 2.$$

Da bismo izračunali vodeći koeficijent a parabole, uvrstit ćemo koordinate jedne od nultočaka (N_1 ili N_2) u jednadžbu parabole.

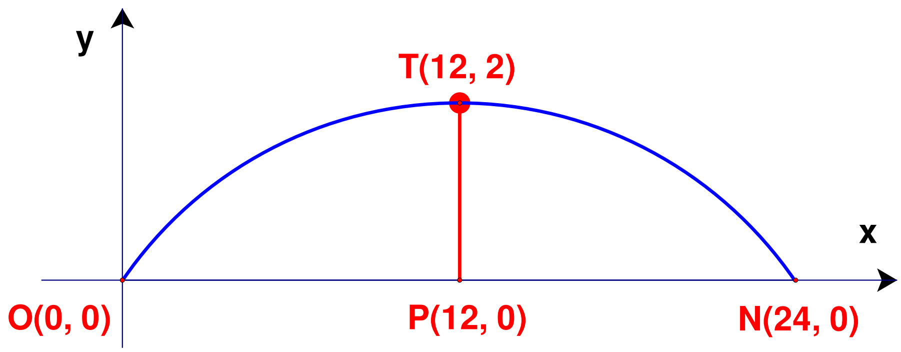
$$\left.\begin{array}{l} N_2(x,\ y) = N_2(12,\ 0) \\ y = a \cdot x^2 + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 0 = a \cdot 12^2 + 2\ \Rightarrow\ 0 = 144 \cdot a + 2\ \Rightarrow\ -144 \cdot a = 2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -144 \cdot a = 2\ /:(-144)\ \Rightarrow\ a = -\frac{2}{144}\ \Rightarrow\ a = -\frac{1}{72}.$$

Tada jednadžba luka mosta (parabole) glasi:

$$y = -\frac{1}{72} \cdot x^2 + 2.$$

2.inačica



Postavimo most u pravokutni koordinatni sustav kao na slici. Tjeme parabole ima koordinate T(12, 2) pa jednadžba luka mosta glasi:

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_0,\ y_0\right)=T\left(12,\ 2\right) \\ y=a\cdot\left(x-x_0\right)^2+y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ y=a\cdot\left(x-12\right)^2+2.$$

Budući da graf sadrži točku O(0, 0) (isto tako možemo uzeti točku N(24, 0)), uvrštavanjem dobivamo vrijednost vodećeg koeficijenta a:

$$\left.\begin{array}{l} O\left(x,\ y\right)=O\left(0,\ 0\right) \\ y=a\cdot\left(x-12\right)^2+2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 0=a\cdot\left(0-12\right)^2+2\ \Rightarrow\ 0=a\cdot\left(-12\right)^2+2\ \Rightarrow\ 0=144\cdot a+2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -144\cdot a=2\ \Rightarrow\ -144\cdot a=2\ /:\left(-144\right)\ \Rightarrow\ a=-\frac{2}{144}\ \Rightarrow\ a=-\frac{1}{72}.$$

Jednadžba luka mosta glasi:

$$y=-\frac{1}{72}\cdot\left(x-12\right)^2+2.$$

Uočimo da se parabola

$$y=-\frac{1}{72}\cdot\left(x-12\right)^2+2$$

dobije translacijom parabole

$$y=-\frac{1}{72}\cdot x^2+2$$

za broj x_0 = 12 u pozitivnom smjeru x – osi.

Vježba 061

Luk mosta ima oblik parabole. Visina mosta je 5 m, a duljina raspona 40 m. Napiši jednadžbu luka mosta.

Rezultat: $y=-\frac{1}{80}\cdot x^2+5.$

Zadatak 062 (Matea, gimnazija)

Ako su – 1 i 2 nultočke polinoma drugog stupnja, a najveća vrijednost polinoma iznosi 3, odredi taj polinom.

Rješenje 062

Ponovimo!

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f\left(x\right)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su $a \neq 0$, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$

Broj x_0 je nultočka kvadratne funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 + c = 0.$$

Kvadratna funkcija

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

ima dvije nultočke x_1 i x_2. Tada za apscisu x_0 točke u kojoj funkcija ima ekstrem vrijedi

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Ordinata tjemena iznosi

$$y_0 = f(x_0) \Rightarrow y_0 = a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 + c.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

1.inačica

Budući da su zadane obje nultočke $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$ kvadratne funkcije, lako se izračuna apscisa x_0 tjemena.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2 \\ x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 = \frac{-1+2}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

Točke x_1 i x_2 su nultočke funkcije pa vrijedi

$$f(x_1) = 0 \quad , \quad f(x_2) = 0.$$

Za točku x_0 vrijednost funkcije je

$$f(x_0) = 3.$$

Postavimo sustav od tri jednadžbe sa tri nepoznanice.

$$x_1 = -1 \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{2} + c = 3.$$

Riješimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=0 \\ a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=0 \\ a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\cdot\frac{1}{2}+c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-b+c=0 \\ 4\cdot a+2\cdot b+c=0 \\ \frac{1}{4}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b+c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-b+c=0 \\ 4\cdot a+2\cdot b+c=0 \\ \frac{1}{4}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b+c=3 \;/\cdot 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-b+c=0 \\ 4\cdot a+2\cdot b+c=0 \\ a+2\cdot b+4\cdot c=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=b-a \\ 4\cdot a+2\cdot b+c=0 \\ a+2\cdot b+4\cdot c=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot a+2\cdot b+b-a=0 \\ a+2\cdot b+4\cdot(b-a)=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot a+2\cdot b+b-a=0 \\ a+2\cdot b+4\cdot b-4\cdot a=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot a+3\cdot b=0 \\ -3\cdot a+6\cdot b=12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 9\cdot b=12 \Rightarrow 9\cdot b=12 \;/:9 \Rightarrow b=\frac{12}{9} \Rightarrow b=\frac{4}{3}.$$

Računamo koeficijent a.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot a+3\cdot b=0 \\ b=\frac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot a+3\cdot\frac{4}{3}=0 \Rightarrow 3\cdot a+3\cdot\frac{4}{3}=0 \Rightarrow 3\cdot a+4=0 \Rightarrow 3\cdot a=-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot a=-4 \;/:3 \Rightarrow a=-\frac{4}{3}.$$

Računamo koeficijent c.

$$\left.\begin{array}{l} c=b-a \\ a=-\frac{4}{3}\;,\; b=\frac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow c=\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right) \Rightarrow c=\frac{4}{3}+\frac{4}{3} \Rightarrow c=\frac{8}{3}.$$

Polinom glasi

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c \\ a=-\frac{4}{3}\;,\; b=\frac{4}{3}\;,\; c=\frac{8}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=-\frac{4}{3}\cdot x^2+\frac{4}{3}\cdot x+\frac{8}{3}.$$

2.inačica

Budući da su zadane obje nultočke $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$ kvadratne funkcije vrijedi

$$x_1=-1 \Rightarrow a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=0 \Rightarrow a-b+c=0$$

$$x_2=2 \Rightarrow a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=0 \Rightarrow 4\cdot a+2\cdot b+c=0.$$

Vrijednost ekstrema kvadratne funkcije iznosi 3 pa slijedi

$$\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}=3 \Rightarrow \frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}=3 \;/\cdot 4\cdot a \Rightarrow 4\cdot a\cdot c-b^2=12\cdot a.$$

Riješimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} a-b+c=0 \\ 4\cdot a+2\cdot b+c=0 \\ 4\cdot a\cdot c-b^2=12\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=b-a \\ 4\cdot a+2\cdot b+c=0 \\ 4\cdot a\cdot c-b^2=12\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot a+2\cdot b+b-a=0 \\ 4\cdot a\cdot(b-a)-b^2=12\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot a+3\cdot b=0 \\ 4\cdot a\cdot b-4\cdot a^2-b^2=12\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot a+3\cdot b=0 \;/:3 \\ 4\cdot a\cdot b-4\cdot a^2-b^2-12\cdot a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ 4\cdot a\cdot b-4\cdot a^2-b^2-12\cdot a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-a \\ 4\cdot a\cdot b-4\cdot a^2-b^2-12\cdot a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot a\cdot(-a)-4\cdot a^2-(-a)^2-12\cdot a=0 \Rightarrow -4\cdot a^2-4\cdot a^2-a^2-12\cdot a=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9\cdot a^2-12\cdot a=0 \Rightarrow -9\cdot a^2-12\cdot a=0 \;/:(-3) \Rightarrow 3\cdot a^2+4\cdot a=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot(3\cdot a+4)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=0 \\ 3\cdot a+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=0 \;\; \text{nema smisla} \\ 3\cdot a=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot a=-4 \;/:3 \Rightarrow a=-\frac{4}{3}.$$

Računamo koeficijent b.

$$\left.\begin{array}{l} b=-a \\ a=-\frac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow b=-\left(-\frac{4}{3}\right) \Rightarrow b=\frac{4}{3}.$$

Računamo koeficijent c.

$$\left.\begin{array}{l} c=b-a \\ a=-\frac{4}{3} \;,\; b=\frac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow c=\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right) \Rightarrow c=\frac{4}{3}+\frac{4}{3} \Rightarrow c=\frac{8}{3}.$$

Polinom glasi

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c \\ a=-\frac{4}{3} \;,\; b=\frac{4}{3} \;,\; c=\frac{8}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=-\frac{4}{3}\cdot x^2+\frac{4}{3}\cdot x+\frac{8}{3}.$$

Vježba 062

Ako su – 2 i 2 nultočke polinoma drugog stupnja, a najmanja vrijednost polinoma iznosi – 4, odredi taj polinom.

Rezultat: $f(x)=x^2-4.$

Zadatak 063 (Matea, gimnazija)

Odredi jednadžbu parabole koja dira os apscisa u toči s apscisom 3, a prolazi točkom (5, 12).

Rješenje 063

Ponovimo!

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}.$$

Broj x_0 je nultočka kvadratne funkcije f ako vrijedi

$$f\left(x_0\right)=0 \Rightarrow a\cdot x_0^2+b\cdot x_0+c=0.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot\left(x-x_0\right)^2$$

je parabola

$$y=a\cdot\left(x-x_0\right)^2$$

čije je tjeme (točka u kojoj funkcija poprima najmanju ili najveću vrijednost) točka

$$T\left(x_0,\ 0\right).$$

Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

je parabola

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

Parabola

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

simetrična je s obzirom na os koja je paralelna s osi y i prolazi njezinim tjemenom T. Os koja prolazi tjemenom parabole paralelno s y osi zove se os simetrije parabole. Jednadžba osi (pravca) glasi:

$$\left.\begin{array}{l} x=x_0 \\ x_0=-\dfrac{b}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x=-\frac{b}{2\cdot a}.$$

1.inačica

Budući da parabola dira os apscisa u točki s apscisom 3, ta točka je njezino tjeme i vrijedi

$$T\left(x_0,\ y_0\right)=T(3,\ 0).$$

Parabola prolazi i točkom A(5, 12) pa je

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_0,\ 0\right)=T(3,\ 0) \\ A(x,\ y)=A(5,\ 12) \\ y=a\cdot\left(x-x_0\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 12=a\cdot(5-3)^2 \Rightarrow 12=a\cdot 2^2 \Rightarrow 12=4\cdot a \Rightarrow 4\cdot a=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot a=12 \ /:3 \Rightarrow a=3.$$

Jednadžba tražene parabole glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a=3\ ,\ T\left(x_0,\ 0\right)=T(3,\ 0) \\ y=a\cdot\left(x-x_0\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y=3\cdot(x-3)^2 \Rightarrow y=3\cdot\left(x^2-6\cdot x+9\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=3\cdot x^2-18\cdot x+27.$$

2.inačica

Budući da parabola dira os apscisa u točki s apscisom 3, ta točka je njezino tjeme i vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} T(x_0,\ y_0)=T(3,\ 0) \\ x_0=-\dfrac{b}{2\cdot a} \\ y_0=\dfrac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3=-\dfrac{b}{2\cdot a} \\ 0=\dfrac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{b}{2\cdot a}=3 \\ \dfrac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{b}{2\cdot a}=3\ /\cdot(-2\cdot a) \\ \dfrac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}=0\ /\cdot 4\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-6\cdot a \\ 4\cdot a\cdot c-b^2=0 \end{array}\right\}.$$

Parabola prolazi i točkom A(5, 12) pa je

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y)=A(5,\ 12) \\ y=a\cdot x^2+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow 12=a\cdot 5^2+b\cdot 5+c \Rightarrow 12=25\cdot a+5\cdot b+c \Rightarrow 25\cdot a+5\cdot b+c=12.$$

Riješimo sustav od tri jednadžbe sa tri nepoznanice.

$$\left.\begin{array}{l} b=-6\cdot a \\ 4\cdot a\cdot c-b^2=0 \\ 25\cdot a+5\cdot b+c=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot a\cdot c-(-6\cdot a)^2=0 \\ 25\cdot a+5\cdot(-6\cdot a)+c=12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot a\cdot c-36\cdot a^2=0 \\ 25\cdot a-30\cdot a+c=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot a\cdot c-36\cdot a^2=0 \\ -5\cdot a+c=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot a\cdot c-36\cdot a^2=0\ /:4 \\ c=12+5\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot c-9\cdot a^2=0 \\ c=12+5\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow a\cdot(12+5\cdot a)-9\cdot a^2=0 \Rightarrow 12\cdot a+5\cdot a^2-9\cdot a^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot a-4\cdot a^2=0 \Rightarrow 12\cdot a-4\cdot a^2=0\ /:4 \Rightarrow 3\cdot a-a^2=0 \Rightarrow a\cdot(3-a)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=0 \\ 3-a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=0\ \text{nema smisla} \\ -a=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow -a=-3\ /\cdot(-1) \Rightarrow a=3.$$

Računamo koeficijente b i c.

$$\left.\begin{array}{l} b=-6\cdot a \\ c=12+5\cdot a \\ a=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-6\cdot 3 \\ c=12+5\cdot 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-18 \\ c=27 \end{array}\right\}.$$

Jednadžba tražene parabole glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a=3\ ,\ b=-18\ ,\ c=27 \\ y=a\cdot x^2+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow y=3\cdot x^2-18\cdot x+27.$$

3.inačica

Budući da parabola dira os apscisa u točki s apscisom 3, ta točka je njezino tjeme pa je

$$\left.\begin{array}{l} T(x_0,\ y_0)=T(3,\ 0) \\ x_0=-\dfrac{b}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow 3=-\dfrac{b}{2\cdot a} \Rightarrow -\dfrac{b}{2\cdot a}=3 \Rightarrow -\dfrac{b}{2\cdot a}=3\ /\cdot(-2\cdot a) \Rightarrow b=-6\cdot a.$$

Prema uvjetu zadatka na paraboli leže dvije točke T(3, 0) i A(5, 12) pa vrijede jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(3,\ 0) \\ y=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow\ 0=a\cdot 3^{2}+b\cdot 3+c\ \Rightarrow\ 0=9\cdot a+3\cdot b+c\ \Rightarrow\ 9\cdot a+3\cdot b+c=0.$$

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y)=A(5,\ 12) \\ y=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow\ 12=a\cdot 5^{2}+b\cdot 5+c\ \Rightarrow\ 12=25\cdot a+5\cdot b+c\ \Rightarrow\ 25\cdot a+5\cdot b+c=12.$$

Riješimo sustav od tri jednadžbe sa tri nepoznanice.

$$\left.\begin{array}{l} b=-6\cdot a \\ 9\cdot a+3\cdot b+c=0 \\ 25\cdot a+5\cdot b+c=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9\cdot a+3\cdot(-6\cdot a)+c=0 \\ 25\cdot a+5\cdot(-6\cdot a)+c=12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9\cdot a-18\cdot a+c=0 \\ 25\cdot a-30\cdot a+c=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -9\cdot a+c=0 \\ -5\cdot a+c=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=9\cdot a \\ -5\cdot a+c=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=9\cdot a \\ -5\cdot a+c=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow\ -5\cdot a+9\cdot a=12\ \Rightarrow\ 4\cdot a=12\ \Rightarrow\ 4\cdot a=12\ /:4\ \Rightarrow\ a=3.$$

Računamo koeficijente b i c.

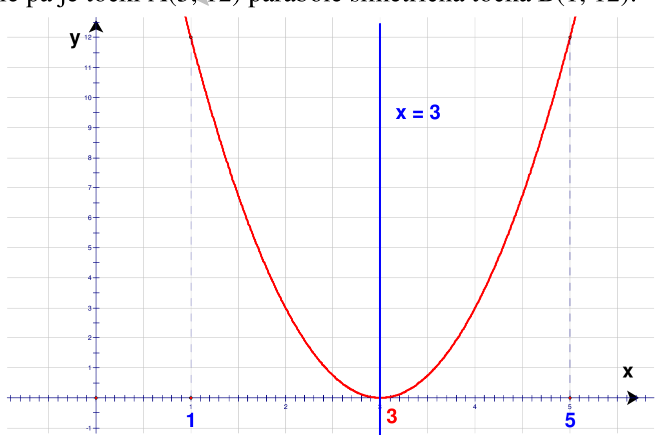
$$\left.\begin{array}{l} b=-6\cdot a \\ c=9\cdot a \\ a=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-6\cdot 3 \\ c=9\cdot 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-18 \\ c=27 \end{array}\right\}.$$

Jednadžba tražene parabole glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a=3\ ,\ b=-18\ ,\ c=27 \\ y=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow\ y=3\cdot x^{2}-18\cdot x+27.$$

4.inačica

Budući da parabola dira os apscisa u točki s apscisom 3, ta točka je njezino tjeme T(3, 0). Pravac x = 3 je os simetrije parabole pa je točki A(5, 12) parabole simetrična točka B(1, 12).



Budući da tri točke B(1, 12), T(3, 0) i A(5, 12) pripadaju paraboli, vrijede jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l} B(x,\ y)=B(1,\ 12) \\ y=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow\ 12=a\cdot 1^{2}+b\cdot 1+c\ \Rightarrow\ 12=a+b+c\ \Rightarrow\ a+b+c=12.$$

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(3,\ 0) \\ y=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow\ 0=a\cdot 3^{2}+b\cdot 3+c\ \Rightarrow\ 0=9\cdot a+3\cdot b+c\ \Rightarrow\ 9\cdot a+3\cdot b+c=0.$$

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y)=A(5,\ 12) \\ y=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow\ 12=a\cdot 5^{2}+b\cdot 5+c\ \Rightarrow\ 12=25\cdot a+5\cdot b+c\ \Rightarrow\ 25\cdot a+5\cdot b+c=12.$$

Riješimo sustav od tri jednadžbe sa tri nepoznanice.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=12 \\ 9\cdot a+3\cdot b+c=0 \\ 25\cdot a+5\cdot b+c=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=12-a-b \\ 9\cdot a+3\cdot b+c=0 \\ 25\cdot a+5\cdot b+c=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9\cdot a+3\cdot b+12-a-b=0 \\ 25\cdot a+5\cdot b+12-a-b=12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8\cdot a+2\cdot b=-12 \\ 24\cdot a+4\cdot b=12-12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8\cdot a+2\cdot b=-12 \\ 24\cdot a+4\cdot b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8\cdot a+2\cdot b=-12\ /:(-2) \\ 24\cdot a+4\cdot b=0\ /:4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4\cdot a-b=6 \\ 6\cdot a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2\cdot a=6\ \Rightarrow\ 2\cdot a=6\ /:2\ \Rightarrow\ a=3.$$

Računamo koeficijent b.

$$\left.\begin{array}{l} 8\cdot a+2\cdot b=-12 \\ a=3 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 8\cdot 3+2\cdot b=-12\ \Rightarrow\ 24+2\cdot b=-12\ \Rightarrow\ 2\cdot b=-12-24\ \Rightarrow\ 2\cdot b=-36\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot b=-36\ /:2\ \Rightarrow\ b=-18.$$

Računamo koeficijent c.

$$\left.\begin{array}{l} c=12-a-b \\ a=3\ ,\ b=-18 \end{array}\right\} \Rightarrow\ c=12-3-(-18)\ \Rightarrow\ c=12-3+18\ \Rightarrow\ c=27.$$

Jednadžba tražene parabole glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a=3\ ,\ b=-18\ ,\ c=27 \\ y=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow\ y=3\cdot x^{2}-18\cdot x+27.$$

Vježba 063

Odredi jednadžbu parabole koja dira os apscisa u toči s apscisom 3, a prolazi točkom (0, 27).

Rezultat: $y=3\cdot x^{2}-18\cdot x+27.$

Zadatak 064 (Boris, gimnazija)

Za svaki realni broj m, m ≠ 0, jednadžbom $y = m \cdot x^2 + x + m$, određena je neka parabola.
a) Za koji m se dobije parabola s tjemenom na osi apscisa?
b) Za koji m se dobije parabola kojoj je pravac $2 \cdot x - 1 = 0$ os simetrije?

Rješenje 064

Ponovimo!
Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x)=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$

Broj x_0 je nultočka kvadratne funkcije f ako vrijedi

$$f\left(x_0\right) = 0 \;\Rightarrow\; a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 + c = 0.$$

Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

simetrična je s obzirom na os koja je paralelna s osi y i prolazi njezinim tjemenom T. Os koja prolazi tjemenom parabole paralelno s y osi zove se os simetrije parabole. Jednadžba osi (pravca) glasi:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 \\ x_0 = -\dfrac{b}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; x = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

- Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja (korijena).
- Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje (korijen).
- Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno-konjugirana rješenja (korijene).

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

a) Računamo za koji m se dobije parabola s tjemenom na osi apscisa.

1.inačica

Budući da tjeme parabole leži na osi apscisa (osi x), njegova je ordinata jednaka nuli.

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_0,\, y_0\right) = T\left(x_0,\, 0\right) \\ y_0 = \dfrac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = 0.$$

Računamo vrijednost parametra m.

$$\left.\begin{array}{l} y = m \cdot x^2 + x + m \\ a = m \;\;,\;\; b = 1 \;\;,\;\; c = m \\ \dfrac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = 0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \frac{4 \cdot m \cdot m - 1^2}{4 \cdot m} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{4 \cdot m^2 - 1}{4 \cdot m} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{4 \cdot m^2 - 1}{4 \cdot m} = 0 \;/ \cdot\, 4 \cdot m \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 4 \cdot m^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 4 \cdot m^2 = 1 \;\Rightarrow\; 4 \cdot m^2 = 1 \;/ : 4 \;\Rightarrow\; m^2 = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; m^2 = \frac{1}{4} \;/\sqrt{\;} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow m_{1,2} = \pm\frac{1}{2}.$$

2.inačica

Budući da tjeme parabole leži na osi apscisa (osi x), pripadna kvadratna jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje (korijen) pa je njezina diskriminanta jednaka nuli.

$$\left.\begin{array}{l} y = m\cdot x^2 + x + m \\ a = m \ , \ b = 1 \ , \ c = m \\ b^2 - 4\cdot a\cdot c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1^2 - 4\cdot m\cdot m = 0 \Rightarrow 1 - 4\cdot m^2 = 0 \Rightarrow -4\cdot m^2 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\cdot m^2 = -1 \ /:(-4) \Rightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{1}{4} \ /\sqrt{\ } \Rightarrow m_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow m_{1,2} = \pm\frac{1}{2}.$$

b) Računamo za koji m se dobije parabola kojoj je pravac 2 · x – 1 = 0 os simetrije.

Parabola

$$y = m\cdot x^2 + x + m$$

simetrična je s obzirom na os koja je paralelna s osi y i prolazi njezinim tjemenom T. Os koja prolazi tjemenom parabole paralelno s y osi zove se os simetrije parabole i njezina jednadžba je

$$\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{b}{2\cdot a} \\ y = m\cdot x^2 + x + m \\ a = m \ , \ b = 1 \ , \ c = m \end{array}\right\} \Rightarrow x = -\frac{1}{2\cdot m}.$$

Jednadžba pravca koji je os simetrije zadane parabole glasi:

$$2\cdot x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cdot x = 1 \Rightarrow 2\cdot x = 1 \ /:2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vrijednost parametra m iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2\cdot m} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow -\frac{1}{2\cdot m} = \frac{1}{2} \ /\cdot(-2\cdot m) \Rightarrow 1 = -m \Rightarrow m = -1.$$

Vježba 064

Za svaki realni broj m, m ≠ 0, jednadžbom y = x^2 + x + m, određena je neka parabola. Za koji m se dobije parabola s tjemenom na osi apscisa?

Rezultat: $\frac{1}{4}$.

Zadatak 065 (Tea, gimnazija)

Funkcija f(x) = – x^2 + 4 · x ima tjeme u točki:

A. (2, 2) B. (2, 4) C. (– 2, 2) D. (– 2, 4)

Rješenje 065

Ponovimo!

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}.$$

Broj x_0 je nultočka kvadratne funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0)=0 \;\Rightarrow\; a\cdot x_0^2+b\cdot x_0+c=0.$$

Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

je parabola

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

Koordinate tjemena $T(x_0, y_0)$ mogu se izračunati i na sljedeći način:

- apscisa x_0 tjemena je

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},$$

gdje su x_1 i x_2 nultočke kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

- ordinata y_0 tjemena je

$$y_0=f(x_0) \;\Rightarrow\; y_0=a\cdot x_0^2+b\cdot x_0+c.$$

1.inačica

Apscisa tjemena parabole iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+4\cdot x \\ a=-1 \;,\; b=4 \;,\; c=0 \\ x_0=-\dfrac{b}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_0=-\frac{4}{2\cdot(-1)} \Rightarrow x_0=2.$$

U toj točki funkcija ima vrijednost:

$$\left.\begin{array}{l} x_0=2 \\ f(x_0)=-x_0^2+4\cdot x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2)=-2^2+4\cdot 2 \Rightarrow f(2)=-4+8 \Rightarrow f(2)=4.$$

Koordinate su tjemena (2, 4).

Odgovor je pod B.

2.inačica

Najprije odredimo nultočke funkcije.

$$-x^2+4\cdot x=0 \Rightarrow x\cdot(-x+4)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ -x+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ -x=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ -x=-4 \; / \cdot (-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=4 \end{array}\right\}.$$

Apscisa tjemena parabole iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=0 \;,\; x_2=4 \\ x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x_0=\frac{0+4}{2} \Rightarrow x_0=2.$$

U toj točki funkcija ima vrijednost:

$$\left.\begin{array}{l} x_0=2 \\ f\left(x_0\right)=-x_0^2+4\cdot x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2)=-2^2+4\cdot 2 \Rightarrow f(2)=-4+8 \Rightarrow f(2)=4.$$

Koordinate su tjemena (2, 4).
Odgovor je pod B.

Vježba 065

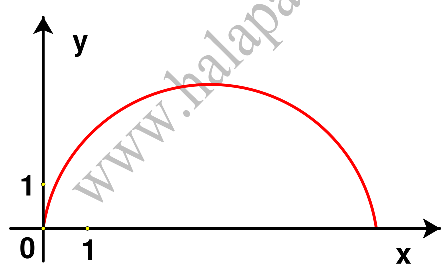
Funkcija $f(x) = -x^2 + 8 \cdot x$ ima tjeme u točki:

A. (4, 8) B. (4, 32) C. (4, 16) D. (4, 4)

Rezultat: C.

Zadatak 066 (Mimi, medicinska škola)

Luk na slici ima jednadžbu $y=-0.3\cdot x^2+1.8\cdot x$, gdje je y udaljenost točke na luku od x – osi izražena u metrima. Kolika je maksimalna visina luka?



A. 1.7 *m* *B.* 2.3 *m* *C.* 2.7 *m* *D.* 3.3 *m*

Rješenje 066

Ponovimo!

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \;\Leftrightarrow\; a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su $a \neq 0$, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}.$$

Broj x_0 je nultočka kvadratne funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0)=0 \Rightarrow a\cdot x_0^2+b\cdot x_0+c=0.$$

Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

je parabola

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

Koordinate tjemena $T(x_0, y_0)$ mogu se izračunati i na sljedeći način:

- apscisa x_0 tjemena je

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},$$

gdje su x_1 i x_2 nultočke kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

- ordinata y_0 tjemena je

$$y_0=f(x_0) \Rightarrow y_0=a\cdot x_0^2+b\cdot x_0+c.$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c \\ f(x)=-0.3\cdot x^2+1.8\cdot x \\ a=-0.3\ ,\ b=1.8\ ,\ c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\right] \Rightarrow y_0=\frac{4\cdot(-0.3)\cdot 0-1.8^2}{4\cdot(-0.3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0=\frac{0-3.24}{-1.2} \Rightarrow y_0=2.7.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

Najprije odredimo nultočke kvadratne funkcije.

$$-0.3\cdot x^2+1.8\cdot x=0 \Rightarrow -0.3\cdot x^2+1.8\cdot x=0\ /\cdot(-10) \Rightarrow 3\cdot x^2-18\cdot x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x^2-18\cdot x=0\ /:3 \Rightarrow x^2-6\cdot x=0 \Rightarrow x\cdot(x-6)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x^2-18\cdot x=0\ /:3 \Rightarrow x^2-6\cdot x=0 \Rightarrow x\cdot(x-6)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=6 \end{array}\right\}.$$

Apscisa tjemena parabole iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=0\ ,\ x_2=6 \\ x_0=\frac{x_1+x_2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x_0=\frac{0+6}{2} \Rightarrow x_0=3.$$

Maksimalna visina luka y_0 ima vrijednost:

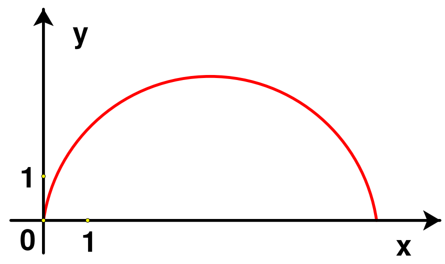
$$\left.\begin{array}{l} x_0=3 \\ y_0=-0.3\cdot x_0^2+1.8\cdot x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow y_0=-0.3\cdot 3^2+1.8\cdot 3 \Rightarrow y_0=-0.3\cdot 9+1.8\cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ y_0 = -2.7 + 5.4 \ \Rightarrow \ y_0 = 2.7.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 066

Luk na slici ima jednadžbu $y = -0.6 \cdot x^2 + 3.6 \cdot x,$ gdje je y udaljenost točke na luku od x – osi izražena u metrima. Kolika je maksimalna visina luka?



A. 3.4 *m* *B.* 4.6 *m* *C.* 5.4 *m* *D.* 6.6 *m*

Rezultat: C.

Zadatak 067 (Vesna, gimnazija)

Za x = 4 funkcija f(x) = x^2 + b · x + c postiže najmanju vrijednost jednaku – 9. Koliki je c?

Rješenje 067

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (-a-b)^2 = (a+b)^2 \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \ \Leftrightarrow \ a = 0 \ \text{ili} \ b = 0 \ \text{ili} \ a = b = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$

Za x = 4 funkcija f(x) = x^2 + b · x + c ima vrijednost jednaku – 9 pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} f(4) = 4^2 + 4 \cdot b + c \\ f(4) = -9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow 4^2 + 4 \cdot b + c = -9 \ \Rightarrow \ 16 + 4 \cdot b + c = -9 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 4 \cdot b + c = -9 - 16 \ \Rightarrow \ 4 \cdot b + c = -25. \qquad (1)$$

Odredimo koeficijente kvadratne funkcije.

$$f(x)=x^2+4\cdot b+c \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=b \\ c=c \end{array}\right\}.$$

Budući da za $x_0 = 4$ funkcija $f(x) = x^2 + b \cdot x + c$ postiže najmanju vrijednost jednaku $y_0 = -9$, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{b}{2\cdot a}\;,\; x_0=4 \\ y_0=\dfrac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\;,\; y_0=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{b}{2\cdot 1}=4 \\ \dfrac{4\cdot 1\cdot c-b^2}{4\cdot 1}=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{b}{2}=4 \\ \dfrac{4\cdot c-b^2}{4}=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{b}{2}=4 \;/\cdot(-2) \\ \dfrac{4\cdot c-b^2}{4}=-9 \;/\cdot 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} b=-8 & (2) \\ 4\cdot c-b^2=-36. & (3) \end{array}$$

1.inačica

Iz sustava jednadžbi (1) i (2) dobije se c.

$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot b+c=-25 \\ b=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 4\cdot(-8)+c=-25 \Rightarrow -32+c=-25 \Rightarrow c=-25+32 \Rightarrow c=7.$$

2.inačica

Iz sustava jednadžbi (1) i (3) dobije se c.

$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot b+c=-25 \\ 4\cdot c-b^2=-36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot b=-25-c \\ 4\cdot c-b^2=-36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot b=-25-c \;/:4 \\ 4\cdot c-b^2=-36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=\dfrac{-25-c}{4} \\ 4\cdot c-b^2=-36 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 4\cdot c-\left(\frac{-25-c}{4}\right)^2=-36 \Rightarrow 4\cdot c-\frac{(-25-c)^2}{4^2}=-36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot c-\frac{(25+c)^2}{16}=-36 \Rightarrow 4\cdot c-\frac{625+50\cdot c+c^2}{16}=-36 \Rightarrow 4\cdot c-\frac{625+50\cdot c+c^2}{16}=-36 \;/\cdot 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64\cdot c-\left(625+50\cdot c+c^2\right)=-576 \Rightarrow 64\cdot c-625-50\cdot c-c^2=-576 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64\cdot c-625-50\cdot c-c^2+576=0 \Rightarrow -c^2+14\cdot c-49=0 \Rightarrow -c^2+14\cdot c-49=0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2-14\cdot c+49=0 \Rightarrow (c-7)^2=0 \Rightarrow (c-7)^2=0 \;/\sqrt{} \Rightarrow c-7=0 \Rightarrow c=7.$$

3.inačica

Iz sustava jednadžbi (2) i (3) dobije se c.

$$\left.\begin{array}{l} b=-8 \\ 4\cdot c-b^2=-36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 4\cdot c-(-8)^2=-36 \Rightarrow 4\cdot c-64=-36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot c=-36+64 \Rightarrow 4\cdot c=28 \Rightarrow 4\cdot c=28 \;/:4 \Rightarrow c=7.$$

Vježba 067

Za x = 4 funkcija $f(x) = x^2 + b \cdot x + c$ postiže najmanju vrijednost jednaku – 9. Koliki je b?

Rezultat: – 8.

Zadatak 068 (Franjo, srednja škola)

Temperatura T (u °C) u stakleniku t sati nakon početka sumraka dana je formulom

$T(t)=\frac{1}{4}\cdot t^2-5\cdot t+30$, $0\le t\le 12.$ Uzima se da sumrak počinje u 19 h.

a) Kolika je temperatura bila u 21 h?
b) U koliko je sati temperatura bila minimalna?
c) Koliko je iznosila minimalna temperatura u stakleniku?

Rješenje 068

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}.$$

Vrste ekstrema:

- minimum ako je a > 0
- maksimum ako je a < 0.

a) Računamo temperaturu u 21 h. Budući da sumrak počinje u 19 h, od početka sumraka do 21 h prošla su 2 h.

$$t=21\ h-19\ h \Rightarrow t=2\ h.$$

$$\left.\begin{array}{l} T(t)=\frac{1}{4}\cdot t^2-5\cdot t+30 \\ t=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow T(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^2-5\cdot 2+30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(2)=\frac{1}{4}\cdot 4-10+30 \Rightarrow T(2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{1}-10+30 \Rightarrow T(2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{1}-10+30 \Rightarrow T(2)=1-10+30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(2)=21 \Rightarrow T(2)=21\ {}^0C.$$

b) Računamo u koliko je sati temperatura bila minimalna.
Budući da je

$$T(t)=\frac{1}{4}\cdot t^2-5\cdot t+30$$

kvadratna funkcija (varijabla je t), a vodeći je koeficijent pozitivan

$$a=\frac{1}{4} \Rightarrow a>0,$$

funkcija ima minimum. Temperatura je bila minimalna u 10 h.

$$\left.\begin{array}{l} T(t)=\frac{1}{4}\cdot t^{2}-5\cdot t+30 \\ a=\frac{1}{4}\ ,\ b=-5\ ,\ c=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[t_0=-\frac{b}{2\cdot a}\right] \Rightarrow t_0=-\frac{-5}{2\cdot\frac{1}{4}} \Rightarrow t_0=\frac{\frac{5}{1}}{\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{4}} \Rightarrow t_0=\frac{\frac{5}{1}}{\frac{2}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_0=10 \Rightarrow t_0=10\ h.$$

c) Računamo minimalnu temperaturu u stakleniku.

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} T(t)=\frac{1}{4}\cdot t^{2}-5\cdot t+30 \\ a=\frac{1}{4}\ ,\ b=-5\ ,\ c=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[T_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^{2}}{4\cdot a}\right] \Rightarrow T_0=\frac{4\cdot\frac{1}{4}\cdot 30-(-5)^{2}}{4\cdot\frac{1}{4}} \Rightarrow T_0=\frac{\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{4}\cdot 30-25}{\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_0=\frac{\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{4}\cdot 30-25}{\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{4}} \Rightarrow T_0=\frac{1\cdot 30-25}{1} \Rightarrow T_0=\frac{30-25}{1} \Rightarrow T_0=\frac{5}{1} \Rightarrow T_0=5 \Rightarrow T_0=5\ {}^{0}C.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} T(t)=\frac{1}{4}\cdot t^{2}-5\cdot t+30 \\ t=t_0=10 \end{array}\right\} \Rightarrow T(10)=\frac{1}{4}\cdot 10^{2}-5\cdot 10+30 \Rightarrow T(10)=\frac{1}{4}\cdot 100-50+30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(10)=\frac{1}{4}\cdot\frac{100}{1}-50+30 \Rightarrow T(10)=\frac{100}{4}-50+30 \Rightarrow T(10)=25-50+30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(10)=5 \Rightarrow T(10)=5\ {}^{0}C.$$

?

Vježba 068

Temperatura T (u °C) u stakleniku t sati nakon početka sumraka dana je formulom

$T(t)=\frac{1}{4}\cdot t^{2}-5\cdot t+30\ ,\ 0\le t\le 12.$ Uzima se da sumrak počinje u 19 h.

Kolika je temperatura bila u 20 h?

Rezultat: 25.25 °C.

Zadatak 069 (Mario, srednja škola)

Za koji realni parametar b polinom $f(x)=-\frac{1}{2}x^{2}+b\cdot x+5$ poprima najveću vrijednost 13?

$A.\ \pm 1 \qquad B.\ \pm 2 \qquad C.\ \pm 3 \qquad D.\ \pm 4$

Rješenje 069

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad ,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su a $\neq$ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$

Vrste ekstrema:

- minimum ako je a > 0
- maksimum ako je a < 0.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \\ f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + b \cdot x + 5 \\ a = -\frac{1}{2} \ , \ b = b \ , \ c = 5 \\ y_0 = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} a = -\frac{1}{2} < 0 \\ \text{vrijednost maksimuma} \\ y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} \end{array}\right] \Rightarrow 13 = \frac{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 5 - b^2}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 = \frac{\frac{4}{1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 5 - b^2}{\frac{4}{1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow 13 = \frac{\frac{4}{1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 5 - b^2}{\frac{4}{1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow 13 = \frac{\frac{2}{1} \cdot \left(-\frac{1}{1}\right) \cdot 5 - b^2}{\frac{2}{1} \cdot \left(-\frac{1}{1}\right)} \Rightarrow 13 = \frac{-2 \cdot 5 - b^2}{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 = \frac{-10 - b^2}{-2} \Rightarrow 13 = \frac{-10 - b^2}{-2} \ / \cdot (-2) \Rightarrow -26 = -10 - b^2 \Rightarrow b^2 = -10 + 26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 16 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow b = \pm\sqrt{16} \Rightarrow b = \pm 4.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 069

Za koji realni parametar b polinom $f(x) = \frac{1}{2} x^2 + b \cdot x + 5$ poprima najmanju vrijednost – 13?

A. ± 4 *B.* ± 5 *C.* ± 6 *D.* ± 7

Rezultat: C.

Zadatak 070 (Ivan, srednja škola)

Tjeme parabole y = 2 · x – x^2 je točka:

A. $(0, 2)$ *B.* $(2, -1)$ *C.* $(1, 1)$ *D.* $(-1, 2)$

Rješenje 070

Ponovimo!
Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su a $\neq$ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Graf kvadratne funkcije $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ je parabola koju dobivamo translacijom parabole $y=a\cdot x^2$, tako da joj tjeme bude u točki $T(x_0, y_0)$, pri čemu je

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a} \quad , \quad y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}.$$

Odredimo koeficijente jednadžbe parabole.

$$y=2\cdot x-x^2 \Rightarrow y=-x^2+2\cdot x \Rightarrow \begin{bmatrix} y=a\cdot x^2+b\cdot x+c \\ y=-x^2+2\cdot x \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=-1 \\ b=2 \\ c=0 \end{matrix}\right\}.$$

Koordinate tjemena $T(x_0, y_0)$ iznose:

- $$\left.\begin{matrix} a=-1 \ , \ b=2 \ , \ c=0 \\ x_0=-\frac{b}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_0=-\frac{2}{2\cdot(-1)} \Rightarrow x_0=-\frac{2}{-2} \Rightarrow x_0=1.$$
- $$\left.\begin{matrix} a=-1 \ , \ b=2 \ , \ c=0 \\ y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_0=\frac{4\cdot(-1)\cdot 0-2^2}{4\cdot(-1)} \Rightarrow y_0=\frac{0-4}{-4} \Rightarrow y_0=\frac{-4}{-4} \Rightarrow y_0=1.$$

Tjeme parabole je točka:

$$T(x_0, y_0)=T(1, 1).$$

Odgovor je pod C.

Vježba 070

Tjeme parabole $y = 2 \cdot x + x^2$ je točka:

$A. (-2, 0) \qquad B. (-2, 1) \qquad C. (-1, 1) \qquad D. (-1, -1)$

Rezultat: D.

Zadatak 071 (Antonio, srednja škola)

Ovisnost brzine kočenja automobila i zaustavnog puta dana je formulom $f(x)=0.004\cdot x^2+0.3\cdot x$ pri čemu je x brzina kočenja automobila u m/s, a f(x) zaustavni put u metrima. Ako je automobil išao 72 km/h, koliko mu je trebalo da se zaustavi?

Rješenje 071

Ponovimo!

$$1 \ km=1000 \ m \quad , \quad 1 \ h=3600 \ s.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su $a \neq 0$, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Mjernu jedinicu brzine km/h moramo pretvoriti u m/s.

$$x=72\,\frac{km}{h} \Rightarrow x=72\,\frac{1000 \ m}{3600 \ s} \Rightarrow x=20\,\frac{m}{s}.$$

Sada računamo zaustavni put automobila.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=0.004\cdot x^2+0.3\cdot x \\ x=20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(20)=0.004\cdot 20^2+0.3\cdot 20 \Rightarrow f(20)=7.6.$$

Automobil je trebao 7.6 m da se zaustavi.

Vježba 071

Ovisnost brzine kočenja automobila i zaustavnog puta dana je formulom $f(x)=0.004\cdot x^2+0.3\cdot x$ pri čemu je x brzina kočenja automobila u m/s, a f(x) zaustavni put u metrima. Ako je automobil išao 36 km/h, koliko mu je trebalo da se zaustavi?

Rezultat: 3.4 m.

Zadatak 072 (Ivona, srednja škola)

Zadana je funkcija $f(x)=x^2+2\cdot x-3.$ Izračunajte koordinate tjemena grafa zadane funkcije.

Rješenje 072

Ponovimo!

$$(x+y)^2=x^2+2\cdot x\cdot y+y^2.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su $a\neq 0$, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}.$$

Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot(x-x_0)^2+y_0$$

parabola je

$$y=a\cdot(x-x_0)^2+y_0$$

s tjemenom u točki $T(x_0, y_0)$ dobivena translacijom parabole $y = a\cdot x^2$. U točki x_0 funkcija f poprima najmanju vrijednost y_0 ako je $a > 0$, a najveću vrijednost y_0 ako je $a < 0$.
Primjeri:

- $f(x)=a\cdot(x-3)^2+5 \Rightarrow f(x)=a\cdot(x-3)^2+5 \Rightarrow T(3, 5)$
- $f(x)=a\cdot(x-3)^2-5 \Rightarrow f(x)=a\cdot(x-3)^2+(-5) \Rightarrow T(3, -5)$
- $f(x)=a\cdot(x+3)^2+5 \Rightarrow f(x)=a\cdot(x-(-3))^2+5 \Rightarrow T(-3, 5)$
- $f(x)=a\cdot(x+3)^2-5 \Rightarrow f(x)=a\cdot(x-(-3))^2+(-5) \Rightarrow T(-3, -5).$

$$\mathbf{f(x) = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0}$$

APSCISA TJEMENA **ORDINATA TJEMENA**

$$\mathbf{T(x_0,\ y_0)}$$

Nultočka grafa je točka u kojoj graf siječe os apscisa (y = 0). Vrijednost x za koju je f(x) = 0 zove se nulište funkcije. Najčešće se za oba pojma rabi izraz nultočka.
Broj x_0 je nultočka kvadratne funkcije f ako vrijedi

$$f\left(x_0\right)=0 \;\Rightarrow\; a\cdot x_0^2+b\cdot x_0+c=0.$$

Kvadratna funkcija

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

ima dvije nultočke x_1 i x_2. Tada za apscisu x_0 točke u kojoj funkcija ima ekstrem vrijedi

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Ordinata tjemena iznosi

$$y_0=f\left(x_0\right) \;\Rightarrow\; y_0=a\cdot x_0^2+b\cdot x_0+c.$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2+2\cdot x-3 \\ f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=2 \\ c=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{b}{2\cdot a} \\ y_0=\dfrac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{2}{2\cdot 1} \\ y_0=\dfrac{4\cdot 1\cdot(-3)-2^2}{4\cdot 1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{2}{2} \\ y_0=\dfrac{-12-4}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{2}{2} \\ y_0=-\dfrac{16}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=-1 \\ y_0=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow T\left(x_0,\ y_0\right)=T(-1,\ -4).$$

2.inačica
Nadopunjavanjem trinoma na potpuni kvadrat zadanu funkciju transformiramo u sljedeći oblik:

$$f(x)=x^2+2\cdot x-3 \;\Rightarrow\; f(x)=x^2+2\cdot x+1-1-3 \;\Rightarrow\; f(x)=\left(x^2+2\cdot x+1\right)-1-3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(x)=\left(x^2+2\cdot x+1\right)-4 \;\Rightarrow\; f(x)=(x+1)^2-4 \;\Rightarrow\; f(x)=(x-(-1))^2+(-4).$$

Koordinate tjemena su:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x-(-1))^2+(-4) \\ f(x)=a\cdot\left(x-x_0\right)^2+y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=-1 \\ y_0=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow T\left(x_0,\ y_0\right)=T(-1,\ -4).$$

3.inačica
Odredimo nultočke zadane funkcije.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2+2\cdot x-3 \\ f(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+2\cdot x-3=0 \;\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+2\cdot x-3=0 \\ a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=-3 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-2+4}{2} \\ x_2=\dfrac{-2-4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2}{2} \\ x_2=-\dfrac{6}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=-3 \end{array}\right\}.$$

Računamo apscisu x_0 tjemena zadane funkcije.

$$\left.\begin{array}{l} x_1=1\ ,\ x_2=-3 \\ x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x_0=\frac{1+(-3)}{2} \Rightarrow x_0=\frac{1-3}{2} \Rightarrow x_0=-\frac{2}{2} \Rightarrow x_0=-1.$$

Računamo ordinatu y_0 tjemena te funkcije.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2+2\cdot x-3 \\ x_0=-1 \\ y_0=f(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=x^2+2\cdot x-3 \\ y_0=f(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y_0=(-1)^2+2\cdot(-1)-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0=1-2-3 \Rightarrow y_0=-4.$$

Koordinate tjemena glase:

$$T(x_0,\ y_0)=T(-1,\ -4).$$

Vježba 072

Zadana je funkcija $f(x)=x^2+2\cdot x-2$. Izračunajte koordinate tjemena grafa zadane funkcije.

Rezultat: $T(-1,\ -2)$.

Zadatak 073 (Anita, srednja škola)

Visina na kojoj se nalazi projektil t sekundi nakon ispaljivanja dana je formulom $h(t)=-2\cdot(t-11)^2+310$ (h je izraženo u metrima). Koliko će sekundi projektil biti na visini iznad 182 m?

$A.\ 4\ s \qquad B.\ 10\ s \qquad C.\ 16\ s \qquad D.\ 22\ s$

Rješenje 073

Ponovimo!

$$\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\geq 0.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su $a\neq 0$, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

parabola je

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

Graf kvadratne funkcije $f(x) = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0$ parabola je s tjemenom u točki $T(x_0, y_0)$ dobivena translacijom parabole $y = a \cdot x^2$. U točki x_0 funkcija $f(x) = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0$ poprima najveću vrijednost y_0 ako je $a < 0$, a najmanju vrijednost y_0 ako je $a > 0$.
Računamo vrijeme t za koje je visina projektila jednaka 182 m.

$$h(t) = 182 \Rightarrow -2 \cdot (t - 11)^2 + 310 = 182 \Rightarrow -2 \cdot (t - 11)^2 = 182 - 310 \Rightarrow -2 \cdot (t - 11)^2 = -128 \Rightarrow$$

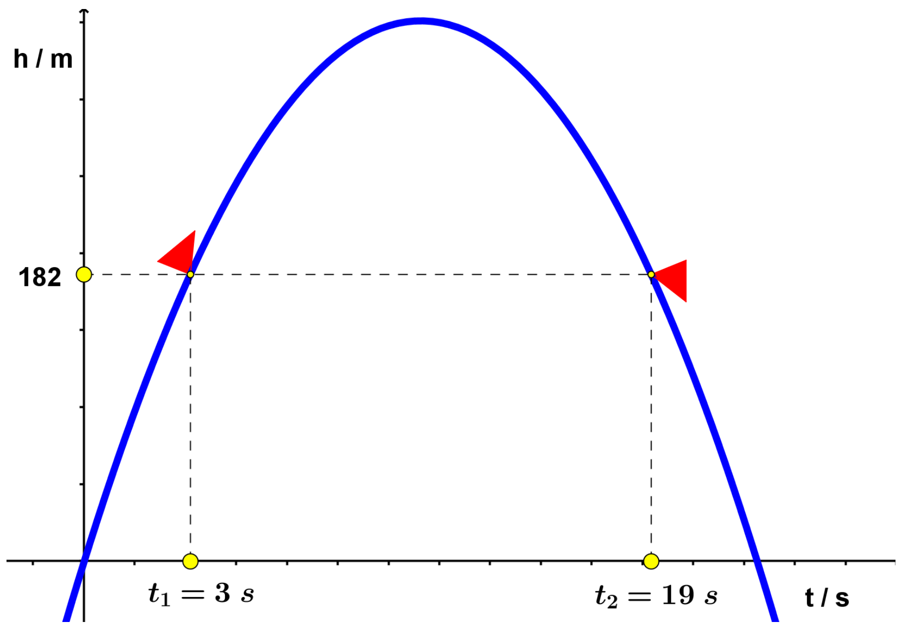
$$\Rightarrow -2 \cdot (t - 11)^2 = -128 \;/ : (-2) \Rightarrow (t - 11)^2 = 64 \Rightarrow (t - 11)^2 = 64 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow t - 11 = \pm\sqrt{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t - 11 = \pm 8 \Rightarrow \left.\begin{matrix} t - 11 = -8 \\ t - 11 = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t = -8 + 11 \\ t = 8 + 11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1 = 3 \; s \\ t_2 = 19 \; s \end{matrix}\right\}.$$

Prvi put projektil dosegne visinu 182 m nakon 3 s poslije ispaljivanja. Penje se do maksimalne visine, a onda pri padu ponovno dođe na visinu 182 m nakon 19 s od ispaljivanja. Ukupno vrijeme Δt za koje će projektil biti na visini iznad 182 m iznosi:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t = 19 \; s - 3 \; s \Rightarrow \Delta t = 16 \; s.$$

Odgovor je pod C.



Vježba 073

Visina na kojoj se nalazi projektil t sekundi nakon ispaljivanja dana je formulom $h(t) = -2 \cdot (11 - t)^2 + 310$ (h je izraženo u metrima). Koliko će sekundi projektil biti na visini iznad 182 m?

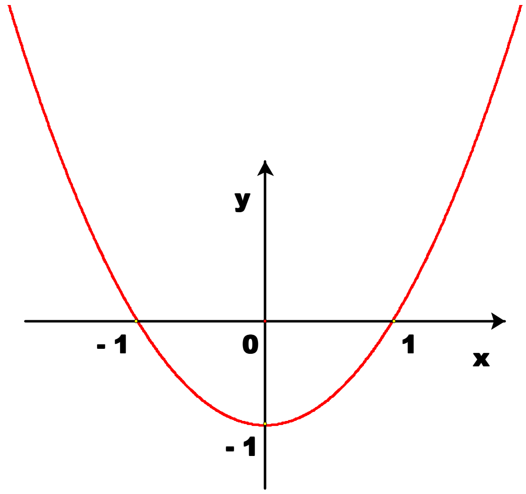
$A.\; 4 \; s \qquad B.\; 10 \; s \qquad C.\; 16 \; s \qquad D.\; 22 \; s$

Rezultat: C.

Zadatak 074 (Anđelka, Katarina, HTT)

Koliki su koeficijenti funkcije prikazane na slici:

a = ___
b = ___
c = ___



Rješenje 074

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

Funkcija zadana formulom:

$$f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c \ \ , \ \ a, b, c \in R \ \ , \ \ a \neq 0$$

zove se kvadratna funkcija ili kvadratni polinom. Za broj a kažemo da je vodeći koeficijent, b je linearni, a c slobodni koeficijent kvadratne funkcije. Graf kvadratne funkcije $f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ je parabola $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$.

Broj x_0 je nultočka funkcije f ako vrijedi

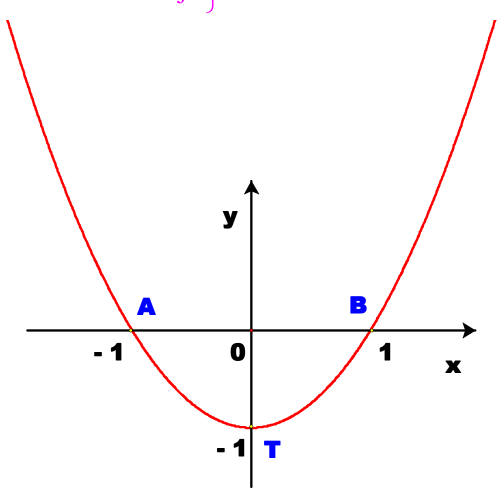
$$f(x_0) = 0.$$

Realna nultočka funkcije apscisa je točke u kojoj graf funkcije siječe (ili dira) x – os. Grafički nultočke određujemo tako da nacrtamo parabolu

$$y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$$

i odredimo točke na x – osi u kojima parabola siječe (ili dira) x – os. Ako su poznate nultočke x_1 i x_2 kvadratne funkcije, tada se ona može faktorizirati

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c \\ x_1, \ x_2 - \text{nultočke funkcije} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2).$$



1.inačica

Sa slike vidi se da su nultočke funkcije $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$ pa funkciju možemo zapisati u obliku

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2) \\ x_1 = -1 \;,\; x_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = a\cdot(x-(-1))\cdot(x-1) \Rightarrow f(x) = a\cdot(x+1)\cdot(x-1).$$

Budući da točka T(0, – 1) pripada grafu funkcije (paraboli), njezine koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu parabole.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y) = T(0,\ -1) \\ y = a\cdot(x+1)\cdot(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow -1 = a\cdot(0+1)\cdot(0-1) \Rightarrow -1 = a\cdot 1\cdot(-1) \Rightarrow -1 = -a \Rightarrow a = 1.$$

Funkcija glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ f(x) = a\cdot(x+1)\cdot(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = 1\cdot(x+1)\cdot(x-1) \Rightarrow f(x) = (x+1)\cdot(x-1) \Rightarrow f(x) = x^2 - 1.$$

Koeficijenti a, b i c su:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c \\ f(x) = x^2 - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{array}\right\}.$$

2.inačica

Sa slike vidi se da točke A, B i T pripadaju paraboli. Njihove koordinate glase:

$$A(x,\ y) = A(-1,\ 0) \quad , \quad B(x,\ y) = B(1,\ 0) \quad , \quad T(x,\ y) = T(0,\ -1).$$

Ako uvrstimo koordinate točaka u jednadžbu parabole dobit ćemo sustav od tri jednadžbe sa tri nepoznanice a, b i c.

- $$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y) = A(-1,\ 0) \\ y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = 0 \Rightarrow a - b + c = 0.$$
- $$\left.\begin{array}{l} B(x,\ y) = B(1,\ 0) \\ y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0.$$
- $$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y) = T(0,\ -1) \\ y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = -1 \Rightarrow 0 + 0 + c = -1 \Rightarrow c = -1.$$

Riješimo sustav.

$$\left.\begin{array}{l} a - b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ c = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - b - 1 = 0 \\ a + b - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - b = 1 \\ a + b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a = 2 \Rightarrow 2\cdot a = 2 \;/:2 \Rightarrow a = 1.$$

Računamo b.

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ a + b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + b = 1 \Rightarrow b = 1 - 1 \Rightarrow b = 0.$$

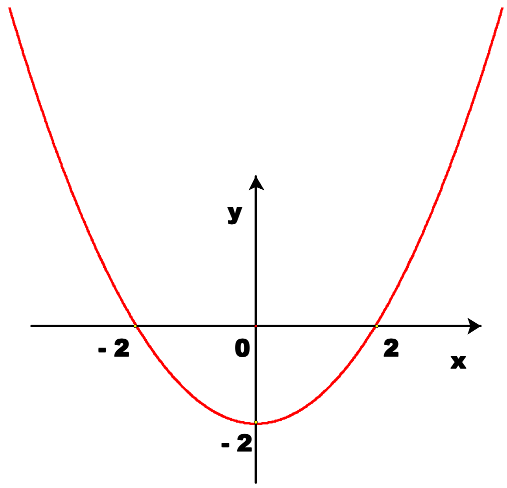
Koeficijenti a, b i c su:

$$a = 1 \quad , \quad b = 0 \quad , \quad c = -1.$$

Vježba 074

Koliki su koeficijenti funkcije prikazane na slici:

a = ___
b = ___
c = ___



Rezultat: $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = -2.$

Zadatak 075 (Terminator, tehnička škola)

Odredi nultočke funkcije $f(x) = -x^2 + 2 \cdot x + 3.$

Rješenje 075

Ponovimo!

Broj x_0 nazivamo nultočka funkcije f, ako je

$$f(x_0) = 0.$$

Funkcija zadana formulom:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \;\; , \;\; a, b, c \in R \;\; , \;\; a \neq 0$$

zove se kvadratna funkcija ili kvadratni polinom. Za broj a kažemo da je vodeći koeficijent, b je linearni, a c slobodni koeficijent kvadratne funkcije.

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

($a \neq 0$, b i c realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realni ili kompleksni) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe. Rješenja kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

su brojevi

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}, \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

ili kraće

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}.$$

Tražimo nultočke.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+2\cdot x+3 \\ f(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2+2\cdot x+3=0 \Rightarrow -x^2+2\cdot x+3=0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2\cdot x-3=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-2\cdot x-3=0 \\ a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=-3 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2+4}{2} \\ x_2=\dfrac{2-4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{6}{2} \\ x_2=-\dfrac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=-1 \end{array}\right\}.$$

Vježba 075

Odredi nultočke funkcije $f(x)=-x^2+2\cdot x+15$.

Rezultat: $x_1=-3\ ,\ x_2=5.$

Zadatak 076 (Terminator, tehnička škola)

Odredi polinom drugog stupnja $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, ako je zadano f(0) = – 4, f(3) = – 4, f(– 6) = 14.

Rješenje 076

Ponovimo!

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Funkcija zadana formulom:

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c\ ,\ a,\ b,\ c\in R\ ,\ a\neq 0$$

zove se kvadratna funkcija ili kvadratni polinom. Za broj a kažemo da je vodeći koeficijent, b je linearni, a c slobodni koeficijent kvadratne funkcije.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-4 \\ f(3)=-4 \\ f(-6)=14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0\ ,\ a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=-4 \\ x=3\ ,\ a\cdot 3^2+b\cdot 3+c=-4 \\ x=-6\ ,\ a\cdot(-6)^2+b\cdot(-6)+c=14 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot 0+b\cdot 0+c=-4 \\ 9\cdot a+3\cdot b+c=-4 \\ 36\cdot a-6\cdot b+c=14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=-4 \\ 9\cdot a+3\cdot b+c=-4 \\ 36\cdot a-6\cdot b+c=14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9\cdot a+3\cdot b-4=-4 \\ 36\cdot a-6\cdot b-4=14 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9\cdot a+3\cdot b=-4+4 \\ 36\cdot a-6\cdot b=14+4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9\cdot a+3\cdot b=0 \\ 36\cdot a-6\cdot b=18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9\cdot a+3\cdot b=0 \;/\cdot 2 \\ 36\cdot a-6\cdot b=18 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 18\cdot a+6\cdot b=0 \\ 36\cdot a-6\cdot b=18 \end{array}\right\} \Rightarrow 54\cdot a=18 \Rightarrow 54\cdot a=18 \;/\cdot\frac{1}{54} \Rightarrow a=\frac{18}{54} \Rightarrow a=\frac{18}{54} \Rightarrow a=\frac{1}{3}.$$

Računamo b.

$$\left.\begin{array}{l} 9\cdot a+3\cdot b=0 \\ a=\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 9\cdot\frac{1}{3}+3\cdot b=0 \Rightarrow 9\cdot\frac{1}{3}+3\cdot b=0 \Rightarrow 3+3\cdot b=0 \Rightarrow 3\cdot b=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot b=-3 \;/:3 \Rightarrow b=-1.$$

Polinom drugog stupnja glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{3}\;,\; b=-1\;,\; c=-4 \\ f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}\cdot x^2-x-4.$$

Vježba 076

Odredi polinom drugog stupnja $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, ako je zadano f(0) = 7, f(1) = 10, f(– 1) = 6.

Rezultat: $f(x)=x^2+2\cdot x+7.$

Zadatak 077 (Real, gimnazija)

Točka T(2, 3) je točka maksimuma funkcije $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x.$ Odredite vrijednost koeficijenta a.

Rješenje 077

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Odredimo koeficijente zadane funkcije.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c \\ f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=a \\ b=b \\ c=0 \end{array}\right\}.$$

Budući da je točka T(2, 3) točka maksimuma navedene funkcije, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} T(x_0,\ y_0)=T(2,3) \\ x_0=-\dfrac{b}{2\cdot a} \\ y_0=\dfrac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2=-\dfrac{b}{2\cdot a} \\ 3=\dfrac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a=a \\ b=b \\ c=0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2=-\dfrac{b}{2\cdot a} \\ 3=\dfrac{4\cdot a\cdot 0-b^2}{4\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2=-\dfrac{b}{2\cdot a} \\ 3=\dfrac{0-b^2}{4\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2=-\dfrac{b}{2\cdot a} \\ 3=-\dfrac{b^2}{4\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{b}{2\cdot a}=-2 \\ \dfrac{b^2}{4\cdot a}=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{b}{2\cdot a}=-2\ /\cdot 2\cdot a \\ \dfrac{b^2}{4\cdot a}=-3\ /\cdot 4\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-4\cdot a \\ b^2=-12\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-4\cdot a)^2=-12\cdot a \Rightarrow 16\cdot a^2=-12\cdot a \Rightarrow 16\cdot a^2+12\cdot a=0 \Rightarrow 16\cdot a^2+12\cdot a=0\ /:4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot a^2+3\cdot a=0 \Rightarrow a\cdot(4\cdot a+3)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=0 \text{ nema smisla} \\ 4\cdot a+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot a+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot a=-3 \Rightarrow 4\cdot a=-3\ /:4 \Rightarrow a=-\frac{3}{4}.$$

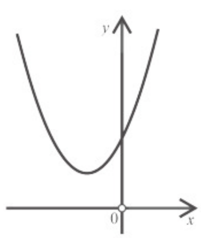
Vježba 077

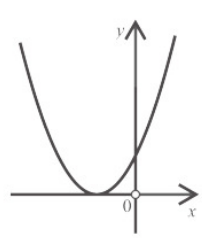
Točka T(2, 3) je točka maksimuma funkcije $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x.$ Odredite vrijednost koeficijenta b.

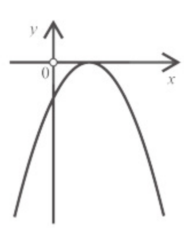
Rezultat: 3.

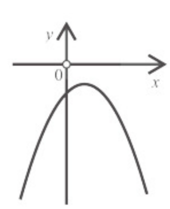
Zadatak 078 (4A, 4B, TUPŠ)

Koja slika prikazuje kvadratnu funkciju $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$ kojoj je diskriminanta negativna i koeficijent c pozitivan?

A.


B.


C.


D.


Rješenje 078

Ponovimo!

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

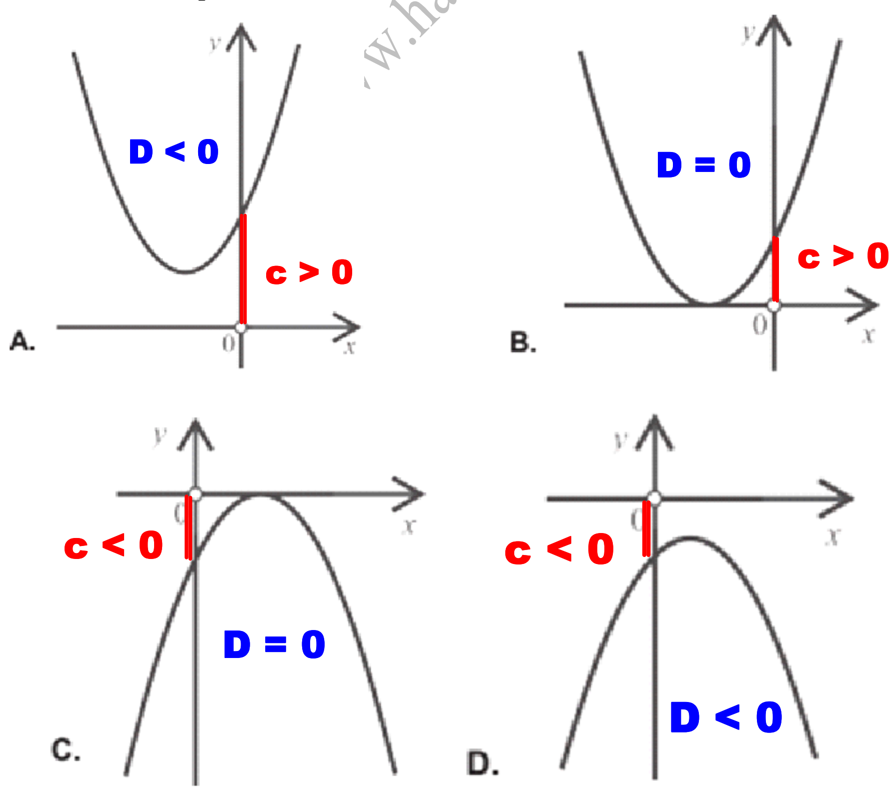
Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja (korijena), tj. parabola siječe os x u dvije točke.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje (korijen), tj. parabola dira os x u jednoj točki.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja (korijene), tj. parabola ne siječe os x.

Uočimo da parabola siječe os y za x = 0, odakle slijedi

$$\left. \begin{array}{l} y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \; y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \; \Rightarrow \; y = c.$$

Dakle, sjecište je u točki (0, c), tj. c je odsječak parabole na osi y.
Analizirat ćemo svaku sliku posebno.

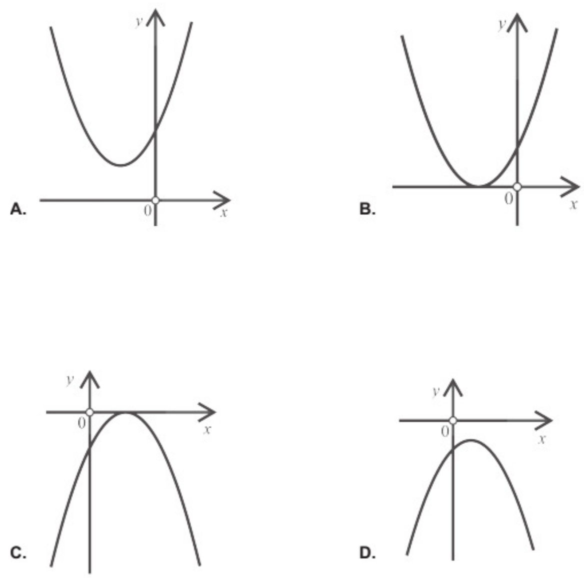


Diskriminanta je negativna i koeficijent c pozitivan na slici A.

Odgovor je pod A.

Vježba 078

Koja slika prikazuje kvadratnu funkciju $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, kojoj je diskriminanta negativna i koeficijent c negativan?



Rezultat: D.

Zadatak 079 (Martina, hotelijerska škola)

Odredite najmanju vrijednost funkcije $f(x)=a\cdot x^2-3\cdot x+\frac{1}{2}$ ako se ta vrijednost postiže za x = 2.

$$A.\ -3 \qquad B.\ -\frac{5}{2} \qquad C.\ \frac{5}{2} \qquad D.\ 5$$

Rješenje 079

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0=-\frac{b}{2\cdot a}.$$

Vrijednost ekstrema iznosi:

$$y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^2-3\cdot x+\dfrac{1}{2} \\ f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=a \\ b=-3 \\ c=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}.$$

Budući da zadana funkcija ima ekstremnu vrijednost za x = 2, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{b}{2\cdot a} \\ x=2 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{b}{2\cdot a}=2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a=a \\ b=-3 \end{bmatrix} \Rightarrow -\frac{-3}{2\cdot a}=2 \Rightarrow \frac{3}{2\cdot a}=2 \Rightarrow \frac{3}{2\cdot a}=2 \ /\cdot 2\cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3=4\cdot a \Rightarrow 4\cdot a=3 \Rightarrow 4\cdot a=3 \ /:4 \Rightarrow a=\frac{3}{4}.$$

Sada su poznata sva tri koeficijenta funkcije pa njezina najmanja vrijednost iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{3}{4}\ ,\ b=-3\ ,\ c=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-(-3)^2}{4\cdot\frac{3}{4}} \Rightarrow y=\frac{4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-(-3)^2}{4\cdot\frac{3}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{\frac{3}{2}-9}{3} \Rightarrow y=\frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{1}}{\frac{3}{1}} \Rightarrow y=\frac{\frac{3-18}{2}}{\frac{3}{1}} \Rightarrow y=\frac{-\frac{15}{2}}{\frac{3}{1}} \Rightarrow y=-\frac{15}{6} \Rightarrow y=-\frac{15}{6} \Rightarrow y=-\frac{5}{2}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 079

Odredite ekstremnu vrijednost funkcije $f(x)=a\cdot x^2+3\cdot x+\frac{1}{2}$ ako se ta vrijednost postiže za x = 2.

$A.\ -3 \qquad B.\ -\frac{7}{2} \qquad C.\ \frac{7}{2} \qquad D.\ 7$

Rezultat: C.

Zadatak 080 (Nina, gimnazija)

Polinom $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ prima negativne vrijednosti ako i samo ako je $x\in\langle -11, 5\rangle$. Za funkciju f vrijedi:

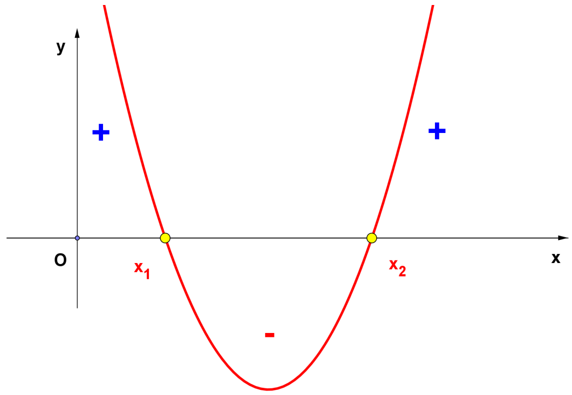
$A.\ f(0)=-55 \qquad B.\ f(0)=6 \qquad C.\ f(0)=25 \qquad D.\ f(0)=-5$

Rješenje 080

Ponovimo!

Broj x_0 je nultočka funkcije f ako vrijedi $f(x_0) = 0$.

Prima li polinom $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ negativne vrijednosti ako i samo ako je $x\in\langle x_1, x_2\rangle$, onda su njegove nultočke x_1 i x_2. Na intervalima $\langle -\infty, x_1\rangle$ i $\langle x_2, +\infty\rangle$ polinom prima pozitivne vrijednosti.



Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe:

- $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.
- $x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule: $x_1 + x_2 = -b$, $x_1 \cdot x_2 = c$.

1.inačica

Budući da polinom $f(x) = x^2 + b \cdot x + c$ prima negativne vrijednosti ako i samo ako je $x \in \langle -11, 5 \rangle$, točke $x_1 = -11$ i $x_2 = 5$ su nultočke pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} f(-11) = 0 \\ f(5) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[f(x) = x^2 + b \cdot x + c \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (-11)^2 + b \cdot (-11) + c = 0 \\ 5^2 + b \cdot 5 + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 121 - 11 \cdot b + c = 0 \\ 25 + 5 \cdot b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -11 \cdot b + c = -121 \\ 5 \cdot b + c = -25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array} \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -11 \cdot b + c = -121 \;/ \cdot 5 \\ 5 \cdot b + c = -25 \;/ \cdot 11 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -55 \cdot b + 5 \cdot c = -605 \\ 55 \cdot b + 11 \cdot c = -275 \end{array}\right\} \Rightarrow 16 \cdot c = -880 \Rightarrow 16 \cdot c = -880 \;/ : 16 \Rightarrow c = -55.$$

Sada imamo

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 + b \cdot x + c \\ c = -55 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = x^2 + b \cdot x - 55.$$

Za funkciju vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 + b \cdot x - 55 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = 0^2 + b \cdot 0 - 55 \Rightarrow f(0) = -55.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Budući da polinom $f(x) = x^2 + b \cdot x + c$ prima negativne vrijednosti ako i samo ako je $x \in \langle -11, 5 \rangle$, točke $x_1 = -11$ i $x_2 = 5$ su nultočke pa po drugoj Vièteovoj formuli vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -11 \;,\; x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{array}\right\} \Rightarrow -11 \cdot 5 = c \Rightarrow c = -55.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 080

Polinom $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ prima negativne vrijednosti ako i samo ako je $x \in \langle -4, 7 \rangle$. Za funkciju f vrijedi:

A. $f(0) = -28$ *B.* $f(0) = -20$ *C.* $f(0) = -9$ *D.* $f(0) = 5$

Rezultat: A.