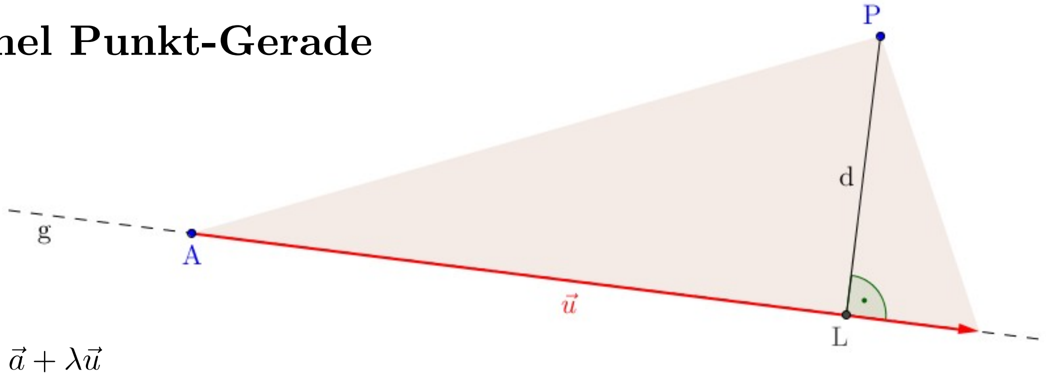
Abstandsformel Punkt-Gerade



gegeben:
Ortsvektor $\vec{p}$
Gerade $g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

Formel: $d = \dfrac{|\vec{u} \times (\vec{p} - \vec{a})|}{|\vec{u}|}$

Herleitung:
Der Flächeninhalt des oben farbig gezeichneten Dreiecks ist sowohl elementargeometrisch per „Hälfte Grundlinie mal Höhe" als auch vektoriell über „Hälfte vom Betrag des Kreuzprodukts" berechenbar.
$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u}| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \times \overrightarrow{AP}|$, wobei $|\vec{u}| \neq 0$,
Multiplikation der Gleichung mit $\frac{2}{|\vec{u}|}$ liefert obige Formel für d.

Beispiel:
$P(2/3/4)$, Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, gesucht Abstand P zu g

Lösung:

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2-0 \\ 3+1 \\ 4-5 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (0)^2}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1+4+0}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-1) - 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{69}}{\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{13,8} \approx 3,71$$

Dahlmannschule Bad Segeberg