

2022年普通高等学校招生全国统一考试《数学I卷》

一、选择题: 本题共8小题, 每小题5分, 共40分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M = \{x | \sqrt{x} < 4\}$, $N = \{x | 3x \geq 1\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$
A. $\{x | 0 \leq x < 2\}$ B. $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 2\}$ C. $\{x | 3 \leq x < 16\}$ D. $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 16\}$
2. 若 $i(1-z) = 1$, 则 $z + \bar{z} = (\quad)$
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
3. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, $BD = 2DA$. 记 $\overrightarrow{CA} = \mathbf{m}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{n}$, 则 $\overrightarrow{CB} = (\quad)$
A. $3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ B. $-2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$ C. $3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ D. $2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$
4. 南水北调工程缓解了北方地区一些地区水资源短缺问题, 其中一部分水蓄入某水库, 已知该水库水位为海拔 148.5 m 时, 相应水面的面积为 140.0 km^2 ; 水位为海拔 157.5 m 时, 相应水面的面积为 180.0 km^2 . 将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台, 则该水库水位从海拔 148.5 m 上升到 157.5 m 时, 增加的水量约为 (\quad) ($\sqrt{7} \approx 2.65$)
A. $1.0 \times 10^9 \text{ m}^3$ B. $1.2 \times 10^9 \text{ m}^3$ C. $1.4 \times 10^9 \text{ m}^3$ D. $1.6 \times 10^9 \text{ m}^3$
5. 从2到8的7个整数中随机取2个不同的数, 则这2个数互质的概率为 (\quad)
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
6. 记函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) + b$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 T , 若 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$, 且 $y = f(x)$ 的图像关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ 中心对称, 则 $f(\frac{\pi}{2}) = (\quad)$
A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3
7. 设 $a = 0.1e^{0.1}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = -\ln 0.9$, 则 (\quad)
A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$
8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l , 其各顶点都在同一球面上, 若该球的体积为 36π , 且 $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$, 则该正四棱锥体积的取值范围是 (\quad)
A. $[18, \frac{81}{4}]$ B. $[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}]$ C. $[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}]$ D. $[18, 27]$

二、选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分。

9. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 则 (\quad)
A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 90°
B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 90°
C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 45°
D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°
10. 已知函数 $f(x) = x^3 - x + 1$, 则 (\quad)
A. $f(x)$ 有两个极值点 B. $f(x)$ 有三个零点
C. 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心 D. 直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线
11. 已知 O 为坐标原点, 点 $A(1, 1)$ 在抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 上, 过点 $B(0, -1)$ 的直线交 C 于 P, Q 两点, 则 (\quad)
A. C 的准线为 $y = -1$ B. 直线 AB 与 C 相切
C. $|OP| \cdot |OQ| > |OA|^2$ D. $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$
12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 记 $g(x) = f'(x)$. 若 $f(\frac{3}{2} - 2x), g(2+x)$ 均为偶函数, 则 (\quad)
A. $f(0) = 0$ B. $g(-\frac{1}{2}) = 0$ C. $f(-1) = f(4)$ D. $g(-1) = g(2)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

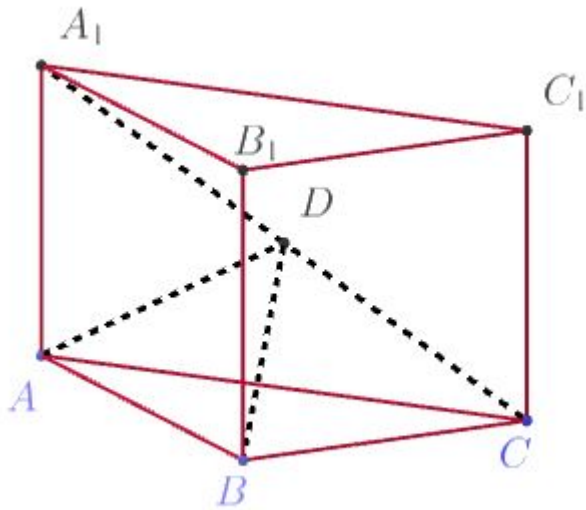
13. $(1 - \frac{y}{x})(x + y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为 _____ (用数字作答)。
14. 写出与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$ 都相切的一条直线的方程 _____
15. 若曲线 $y = (x + a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线, 则 a 的取值范围是 _____
16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, C 的上顶点为 A , 两个焦点为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$, 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D, E 两点, $|DE| = 6$, 则 $\triangle ADE$ 的周长是 _____

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 1, \{\frac{S_n}{a_n}\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列。
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$

18. (12分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}$ 。
(1) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$, 求 B ;
(2) 求 $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 的最小值。

19. (12分) 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 4, $\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$ 。
(1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离;
(2) 设 D 为 A_1C 的中点, $AA_1 = AB$, 平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 求二面角 $A - BD - C$ 的正弦值。



20. (12分) 一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯 (卫生习惯分为良好和不够良好两类) 的关系。在已患该疾病的病例中随机调查了100例 (称为病例组), 同时未患该疾病的人群中随机调查了100人 (称为对照组), 得到如下数据:

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2) 从该地的人群中任选一人, A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”, B 表示事件“选到的人患有该疾病”, $\frac{P(B|A)}{P(B|\bar{A})}$ 与 $\frac{P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{B}|A)}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标, 记该指标为 R .

(i) 证明: $R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$;

(ii) 利用该调查数据, 给出 $P(A|B), P(A|\bar{B})$ 的估计值, 并利用 (i) 的结果给出 R 的估计值。

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

21. (12分) 已知点 $A(2, 1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-1} = 1$ ($a > 1$) 上, 直线 l 交 C 于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 的斜率之和为 0.

(1) 求 l 的斜率;

(2) 若 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 求 $\triangle PAQ$ 的面积.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值.

(1) 求 a ;

(2) 证明: 存在直线 $y = b$, 其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.