Kuželovy sečky

# Polární rovnice elipsy

*Žán Pól Kastról*

11. července 2022

# 1 Parametr elipsy $p$

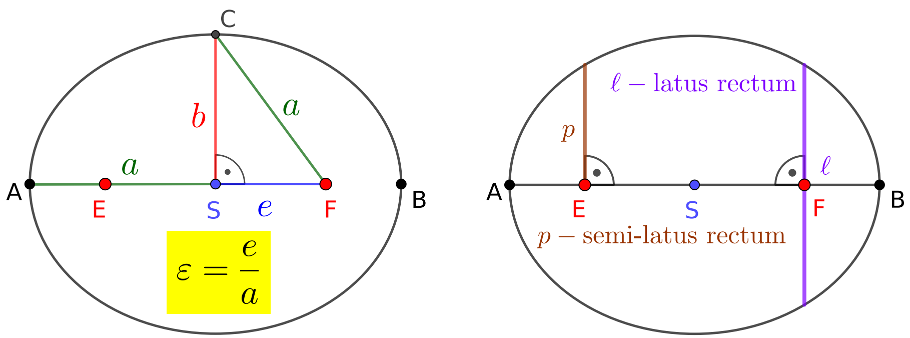
Čummež na obrázek 1a. Každej blbec zná $a, b, e$ a vztah mezi nimi (*Pýthagorova* věta v $\Delta CSF$):

$$b^2 = a^2 - e^2 \tag{1}$$

a definici **relativní excentricity** $\varepsilon$:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} \tag{2}$$

Méně známá je **ohnisková šířka elipsy** $\ell$ (latus rectum[1]) a její po-




(a) $e$ – **excentricita** (lineární)
$\varepsilon$ – **relativní excentricita** (numerická)

(b) $\ell$ – **ohnisková šířka elipsy**
$p$ – **parametr** ($p = \ell/2$)

Obr. 1

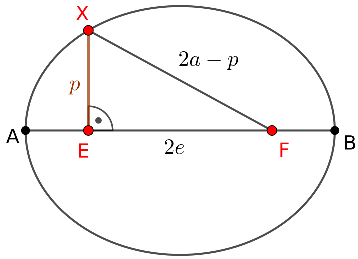
lovina, **parametr elipsy** $p$ (obr. 1b). Pojem **parametr** známe u paraboly a má úplně stejný význam – polovina ohniskové šířky paraboly. Není divu – parabola je elipsa s jedním ohniskem v nekonečnu. Stejně tak se ale setkáme s pojmem parametr i u hyperboly[2].

[1] Tento podivný až obskurní pojem vznikl ve starověké řecké mathematice a je základem Apolloniových vět o kuželosečkách.

[2] V definici kuželosečky pomocí řídící přímky a ohniska ve vzdálenosti $d$ je $p = d \cdot \varepsilon$.

## Příklad 1: Výpočet paramatru $p$

Vyjádři $p$ pomocí $a, b, \varepsilon$!




Dle obrázku stačí použít *Pýthagorovu* větu pro $\Delta XEF$. Dle definice elipsy je délka provázku $E - X - F$ rovna $2a$, pročež $|XF| = 2a - p$.

$$(2a-p)^2 = p^2 + 4e^2$$
$$4a^2 - 4ap + \cancel{p^2} = \cancel{p^2} + 4e^2$$
$$\underbrace{a^2 - e^2}_{b^2} = ap$$

Takže dostáváme

$$\boxed{p = \frac{b^2}{a}} \tag{3}$$

Respektive po dosazení (1) do (3):

$$p = \frac{a^2 - e^2}{a}$$

Ale z (2) máme $e^2 = a^2\varepsilon^2$, takže

$$p = \frac{a^2 - a^2\varepsilon^2}{a} = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{a}$$

A odtud:

$$\boxed{p = a(1 - \varepsilon^2)} \tag{4}$$

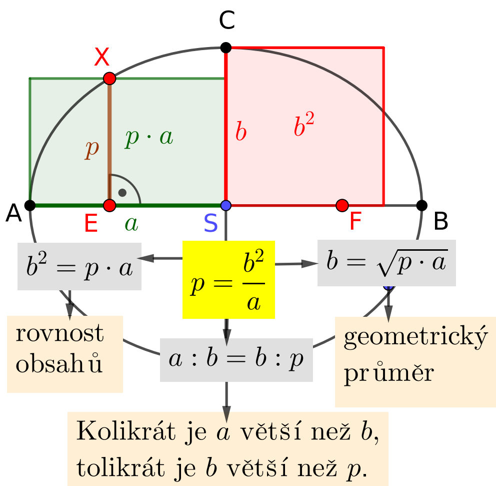
A po umocnění na kvadrát:

$$\begin{aligned}
p^2 &= a^2(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2) \\
p^2 &= (a^2 - a^2\varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2) \\
p^2 &= (a^2 - e^2)(1 - \varepsilon^2) \\
p^2 &= b^2(1 - \varepsilon^2)
\end{aligned}$$

A odtud:

$$\boxed{p = b\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \tag{5}$$

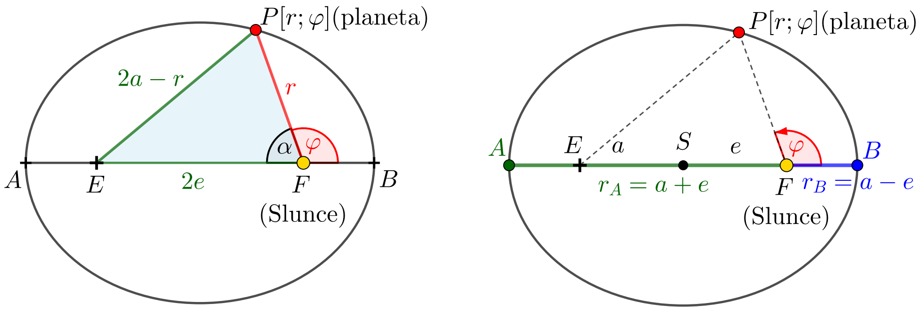
Geometrické důsledky vztahu (3) vidíme v obr. 2




Obr. 2: Čísla $a, b, p$ tvoří geometrickou posloupnost.

# 2 Odvození polární rovnice elipsy

Při popisu pohybu planety po elipse kolem Slunce $F$ jsou vhodné polární souřadnice – poloha planety $P$ je určena dvěma souřadnicemi – vzdáleností od Slunce $r$ a úhlem $\varphi$, který svírá průvodič planety $PF$ se spojnicí Slunce-perihelium $FB$ (obr. 3a). Úhel $\varphi$ se nazývá **azimut** planety, případně **pravá anomálie**.




(a) (b)

Obr. 3

Vztah mezi souřadnicemi $r$ a $\varphi$ snadno najdeme pomocí cosinové věty pro $\Delta EFP$. Zřejmě $|EF| = 2e$ a z definice elipsy dostáváme $|EP| = 2a - r$. Přitom $\cos\alpha = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$.

$$(2a - r)^2 = 4e^2 + r^2 - 4er\cos\alpha$$
$$4a^2 - 4ar + \cancel{r^2} = 4e^2 + \cancel{r^2} + 4er\cos\varphi$$
$$a^2 - e^2 = ar + er\cos\varphi$$
$$b^2 = r(a + e\cos\varphi)$$
$$r = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi}$$
$$r = \frac{pa}{a + e\cos\varphi}$$

A vydělením $a$ dostáváme

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} \tag{6}$$

Pomocí této *polární rovnice elipsy* můžeme snadno spočítat pro libovolný azimut $\varphi$ vzdálenost planety od Slunce.

Speciálně pro afélium $A$ a perihélium $B$ dostáváme:

- $B \rightarrow \varphi = 0° \rightarrow \cos \varphi = 1$

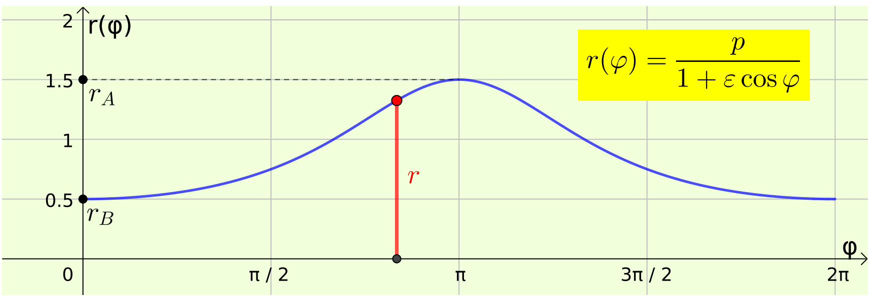
$$r_B = \frac{p}{\underline{\underline{1+\varepsilon}}} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon) = \underline{\underline{a-e}}$$

- $A \rightarrow \varphi = 180° \rightarrow \cos \varphi = -1$

$$r_A = \frac{p}{\underline{\underline{1-\varepsilon}}} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon} = a(1+\varepsilon) = \underline{\underline{a+e}}$$

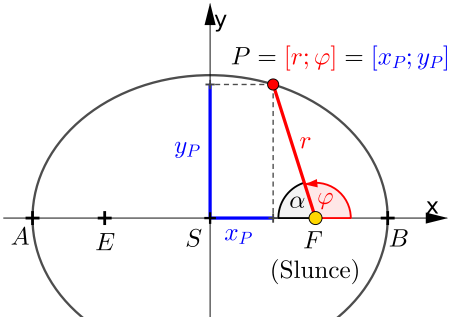
Jak vidíme, je to krástně v souladu s obr. 3b.

Zajímavý je graf závislosti $r$ na $\varphi$ dané polární rovnicí (6). Je to estétická zvonovitá křivka (obr. 4) s maximem v *aféliu* a minimem v *perihéliu*.




Obr. 4: Zři též aplet: https://www.geogebra.org/m/uzqg9dfa

# 3 Důkaz ekvivalence polární rovnice se středovou rovnicí




Obr. 5: Vztah mezi polárními a kartézskými souřadnicemi planety $P$.

Čummež na obrázek 5. Planeta $P$ má vedle polárních souřadnic $P[r;\varphi]$, jimž odpovídá *polární rovnice* (6), samozdřejmě taktéž souřadnice kartézské $P[x_P; y_P]$, jimž odpovídá *středová rovnice elipsy* ($\mathcal{SREL}$):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{7}$$

Snadno dokážeme ekvivalenci obou rovnic.

Dle obr. 5 platí mezi polárními a kartézskými souřadnicemi vztahy:

$$x_P = e - r\cos\alpha = \underline{\underline{e + r\cos\varphi}} \tag{8}$$

$$y_P = \underline{\underline{r\sin\varphi}} \tag{9}$$

Sem dosadíme za $r$ z polární rovnice (6).

Pro $x_P$ dostáváme:

$$x_P = e + \frac{p\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{e + e\varepsilon\cos\varphi + p\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{\varepsilon a + (e\varepsilon + p)\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} =$$

$$= \frac{\varepsilon a + (\varepsilon^2 a + a(1-\varepsilon^2))\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{\varepsilon a + a\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = a\frac{\varepsilon + \cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

Pro $y_P$ dostáváme:

$$y_P = \frac{p\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{(\varepsilon+\cos\varphi)^2}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} + \frac{p^2\sin^2\varphi}{b^2(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \\
&= \frac{(\varepsilon+\cos\varphi)^2}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} + \frac{(1-\varepsilon^2)\sin^2\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \\
&= \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi - \varepsilon^2\sin^2\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \\
&= \frac{1 + 2\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2\cos^2\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = 1
\end{aligned}$$

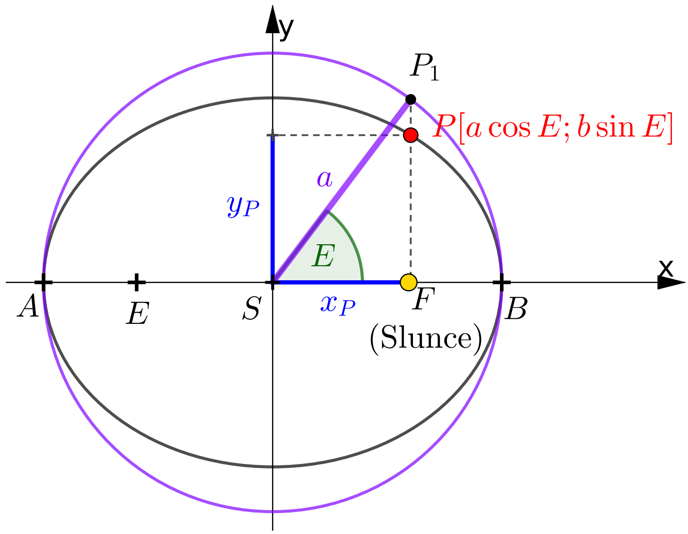
**Poznámka:** Rovnice 8 a 9 jsou vlastně **parametrickým** vyjádřením elipsy, která má střed v počátku a parametrem rovnice (nikoliv elipsy $p$) je azimut planety (**pravá anomálie**) $\varphi = \angle BFP$, který běží od nuly do 360°.

Elipsu však můžeme zadat parametricky také tak, že parametrem rovnice bude úhel $E = \angle BSP_1$ (**excentrická anomálie planety**), který rovněž běží od nuly do 360° (obr. 6).

Potom jsou rovnice jednodušší:

$$x_P = a\cos E \tag{10}$$

$$y_P = b\sin E \tag{11}$$




Obr. 6

O těchto rovnicích podrobněji zde:

- https://www.geogebra.org/m/xqg8unrd
- https://www.geogebra.org/m/dyj5thph