Jak animovat pohyb planety v GeoGebře

1. Polární rovnice elipsy

Žán Pól Kastról

4. srpna 2022

https://www.geogebra.org/m/m3q5cd4r

1 Parametr elipsy p

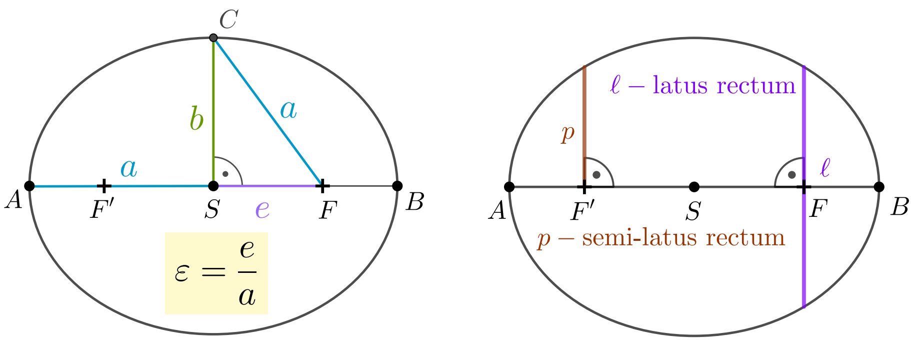
Čummež na obrázek 1a. Každej blbec zná a, b, e a vztah mezi nimi (*Pýthagorova* věta v ΔCSF):

$$b^2 = a^2 - e^2 \tag{1}$$

a definici **relativní excentricity** ε (viz odkaz v popisku obrázku):

$$\varepsilon = \frac{e}{a} \tag{2}$$

Méně známá je **ohnisková šířka elipsy** ℓ (latus rectum[1]) a její polovina, **parametr elipsy** p (obr. 1b). Pojem **parametr** známe u paraboly a má úplně stejný význam – polovina ohniskové šířky paraboly.



(a) e – **excentricita** (lineární)
ε – **relativní excentricita** (numerická)

(b) ℓ – **ohnisková šířka elipsy**
p – **parametr** ($p = \ell/2$)

Obr. 1:

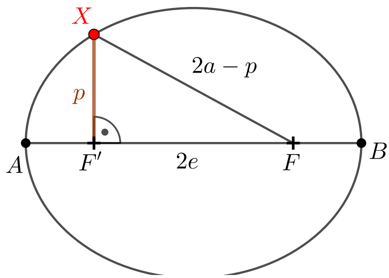
https://www.geogebra.org/m/vjuav6js

[1]Tento podivný až obskurní pojem vznikl ve starověké řecké mathematice a je základem Apolloniových vět o kuželosečkách (https://www.geogebra.org/m/X8b7qvmz#chapter/504312).

Není divu – parabola je elipsa s jedním ohniskem v nekonečnu. Stejně tak se ale setkáme s pojmem parametr i u hyperboly[2].

Příklad 1: Výpočet paramatru p

Vyjádři p pomocí a, b, ε!



Dle obrázku stačí použít *Pýthagorovu* větu pro ΔXEF. Dle definice elipsy je délka provázku $E - X - F$ rovna $2a$, pročež $|XF| = 2a - p$.

$$
\begin{aligned}
(2a-p)^2 &= p^2 + 4e^2 \\
4a^2 - 4ap + \cancel{p^2} &= \cancel{p^2} + 4e^2 \\
\underbrace{a^2 - e^2}_{b^2} &= ap
\end{aligned}
$$

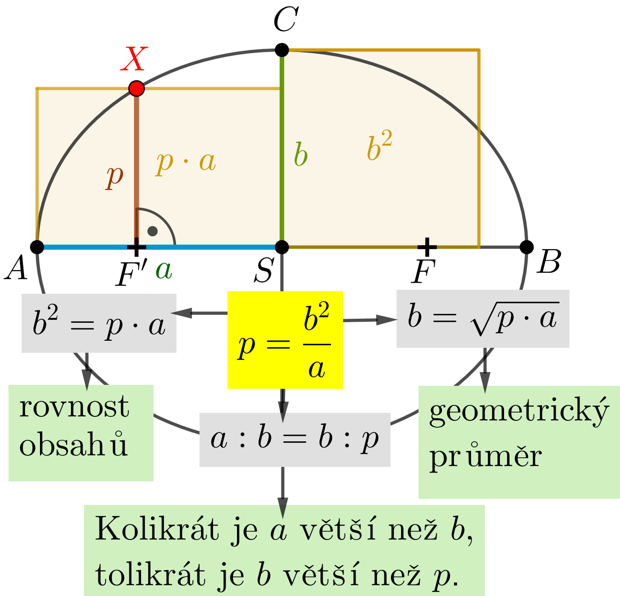
Takže dostáváme

$$\boxed{p = \frac{b^2}{a}} \tag{3}$$

Respektive po dosazení (1) do (3):

$$p = \frac{a^2 - e^2}{a}$$

[2]V definici kuželosečky pomocí řídící přímky a ohniska ve vzdálenosti d je $p = d \cdot \varepsilon$.



Obr. 2: Čísla a, b, p tvoří geometrickou posloupnost.

Ale z (2) máme $e^2 = a^2\varepsilon^2$, takže

$$p = \frac{a^2 - a^2\varepsilon^2}{a} = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{a}$$

A odtud:

$$\boxed{p = a(1-\varepsilon^2)} \tag{4}$$

A po umocnění na kvadrát:

$$\begin{aligned} p^2 &= a^2(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2) \\ p^2 &= (a^2 - a^2\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2) \\ p^2 &= (a^2 - e^2)(1-\varepsilon^2) \\ p^2 &= b^2(1-\varepsilon^2) \end{aligned}$$

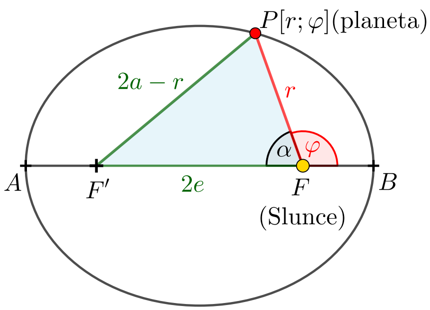
A odtud:

$$\boxed{p = b\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{5}$$

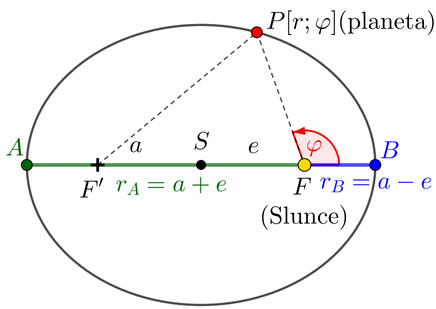
Geometrické důsledky vztahu (3) vidíme v obr. 2.

2 Odvození polární rovnice elipsy

Při popisu pohybu planety po elipse kolem Slunce F jsou vhodné polární souřadnice – poloha planety P je určena dvěma souřadnicemi – vzdáleností od Slunce r a úhlem φ, který svírá průvodič planety PF se spojnicí Slunce-perihelium FB (obr. 3a). Úhel φ se nazývá **azimut** planety, případně **pravá anomálie**.



(a)



(b)

Obr. 3

Vztah mezi souřadnicemi r a φ snadno najdeme pomocí cosinové věty pro ΔEFP. Zřejmě $|EF| = 2e$ a z definice elipsy dostáváme $|EP| = 2a - r$. Přitom $\cos\alpha = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$.

$$(2a-r)^2 = 4e^2 + r^2 - 4er\cos\alpha$$
$$4a^2 - 4ar + \cancel{r^2} = 4e^2 + \cancel{r^2} + 4er\cos\varphi$$

$$
\begin{aligned}
a^2 - e^2 &= ar + er\cos\varphi \\
b^2 &= r(a + e\cos\varphi) \\
r &= \frac{b^2}{a + e\cos\varphi} \\
r &= \frac{pa}{a + e\cos\varphi}
\end{aligned}
$$

A vydělením a dostáváme **polární rovnici** elipsy:

POREL

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}} \tag{6}$$

Pomocí této rovnice můžeme snadno spočítat pro libovolný azimut φ vzdálenost r planety od Slunce.

Speciálně pro *afélium* A a *perihélium* B dostáváme:

- $B \to \varphi = 0° \to \cos\varphi = 1$

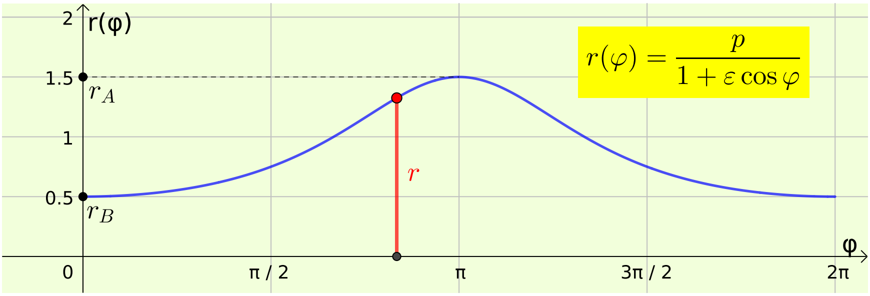
$$r_B = \underline{\underline{\underline{\frac{p}{1+\varepsilon}}}} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon) = \underline{\underline{a - e}}$$

- $A \to \varphi = 180° \to \cos\varphi = -1$

$$r_A = \underline{\underline{\underline{\frac{p}{1-\varepsilon}}}} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon} = a(1+\varepsilon) = \underline{\underline{a + e}}$$

Jak vidíme, je to krástně v souladu s obr. 3b.

Zajímavý je graf závislosti r na φ dané polární rovnicí (6). Je to estétická zvonovitá křivka (obr. 4) s maximem v *aféliu* a minimem v *perihéliu*.



Obr. 4: Polární rovnice elipsy graficky.

https://www.geogebra.org/m/x7ggyquz

3 Důkaz ekvivalence polární rovnice se středovou rovnicí

Čummež na obrázek 5. Planeta P má vedle polárních souřadnic $P[r; \varphi]$, jimž odpovídá *polární rovnice* (6), samozdřejmě taktéž souřadnice kartézské $P[x_P; y_P]$, jimž odpovídá **středová rovnice elipsy**:

SREL

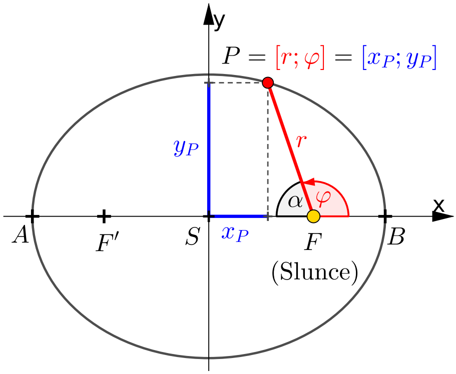
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

Snadno dokážeme ekvivalenci obou rovnic.

Dle obr. 5 platí mezi polárními a kartézskými souřadnicemi vztahy:

$$x_P = e - r\cos\alpha = \underline{\underline{e + r\cos\varphi}} \tag{8}$$

$$y_P = \underline{\underline{r\sin\varphi}} \tag{9}$$



Obr. 5: Vztah mezi polárními a kartézskými souřadnicemi planety P.

Sem dosadíme za r z polární rovnice (6).

Pro x_P dostáváme:

$$x_P = e + \frac{p\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{e + e\varepsilon\cos\varphi + p\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{\varepsilon a + (e\varepsilon + p)\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} =$$
$$= \frac{\varepsilon a + (\varepsilon^2 a + a(1-\varepsilon^2))\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{\varepsilon a + a\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \underline{\underline{a\frac{\varepsilon+\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}}} \tag{10}$$

Pro y_P dostáváme:

$$y_P = \underline{\underline{\frac{p\sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}}} \tag{11}$$

Odtud dostáváme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(\varepsilon+\cos\varphi)^2}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} + \frac{p^2\sin^2\varphi}{b^2(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} =$$
$$= \frac{(\varepsilon+\cos\varphi)^2}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} + \frac{(1-\varepsilon^2)\sin^2\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} =$$
$$= \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi - \varepsilon^2\sin^2\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} =$$

$$= \frac{1 + 2\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2\cos^2\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = 1 \quad \square$$

4 Polární rovnice kuželoseček

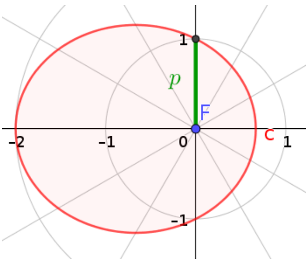
Vokazuje se, že odvozená polární rovnice elipsy funguje krástně i pro ostatní kuželosečky (**polární rovnice kuželosečky**).

POROKUŽ

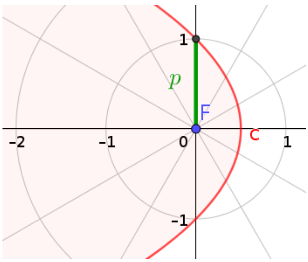
$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi} \tag{12}$$

Hodnota ε je pro *elipsu* menší než 1, pro *parabolu* rovna 1 a pro *hyperbolu* větší než 1.

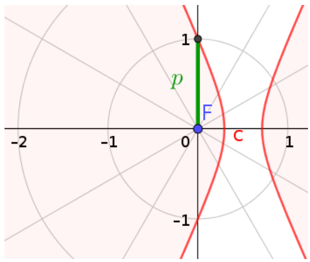
Zři aplet v GeoGebře, kde je to krástně vše vidět (obr. 6). Jen abys z toho nebyla zmatená – v obrázku a v apletu je ohnisko F (Slunce) umístěno do počátku, kdežto předtím jsme do počátku umístili střed kuželosečky (je to pro naše účely popisu pohybu planety vhodnější).



(a) Elipsa: $\varepsilon < 1$



(b) Parabola: $\varepsilon = 1$



(c) Hyperbola: $\varepsilon > 1$

Obr. 6: Všechny tři kuželosečky mají stejnou polární rovnici.

https://www.geogebra.org/m/hzggrtbp

Poznámka: Pokaváď bychom chtěli umístit do počátku levé ohnisko F', stačí dát v GeoGebře do recepisu křivky před ε znamení *minus*.

Δ

Da Sista Les

∞