Ejercicios resueltos sobre distribución binomial y normal

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach	Estadística 04	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

INFORMACIÓN GENERAL

Problemas resueltos sobre distribución binomial y normal.

Vídeo asociado:

https://youtu.be/4p9Rsre1S6c

PROBLEMA 1

En una ciudad una de cada tres familias posee teléfono fijo en casa. Si se eligen al azar 90 familias, calcular la probabilidad de que entre ellas haya más de 30 con teléfono fijo.

Estamos ante un claro ejemplo de variable aleatoria discreta binomial. Cada familia es un ensayo, que puede dar lugar a dos opciones: tener teléfono fijo (éxito) o no tenerlo (fracaso).

El tamaño de la muestra es 90. Por lo que superamos el valor límite de 30 para poder aproximar a la binomial.

El valor de la probabilidad de éxito es 1/3, por lo que:

n·p = 90·1/3 = 30 → Supera el valor 5.

n·(1-p) = 90·2/3 = 60 → También supera el valor 5.

En consecuencia, podemos considerar la aproximación a la distribución normal de parámetros estadísticos:

- Media: $\mu = n \cdot p = 90 \cdot 1/3 = 30$
- Desviación típica:$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{90 \cdot 1/3 \cdot 2/3} = \sqrt{20}$

La probabilidad que pide el enunciado se obtiene mediante la probabilidad tipificada:

$$P(X > 30) = P(Z > \frac{30-30}{\sqrt{20}}) = P(Z > 0) = 1 - P(Z \leq 0) = 1 - 0{,}50 = 0{,}50$$

PROBLEMA 2

Sea una población formada por los elementos 3, 4, 5 y 8. Se pretende seleccionar una muestra de tamaño 2 con reemplazamiento.

a) Calcule todas las muestras posibles.
b) Calcule la varianza de la población.
c) Calcule la varianza de las medias muestrales.

Las muestras de tamaño 2 son las que están formadas por dos elementos de la población. Si hay reemplazamiento, significa que los valores que forman la muestra pueden repetirse.

Conjunto de todas las muestras:

{3,3},{3,4},{3,5},{3,8}

{4,3},{4,4},{4,5},{4,8}

{5,3},{5,4},{5,5},{5,8}

{8,3},{8,4},{8,5},{8,8}

El orden importa, por eso no es lo mismo la muestra {3,4} que la muestra {4,3}.

b) La varianza de la población se obtiene considerando de manera separada los elementos que forman la población. La media de esos cuatro elementos resulta:

$$\mu = \frac{3+4+5+8}{4} = 5$$

Siendo N=4 el tamaño de la población.

La varianza se obtiene con la expresión:

$$s^2 = \frac{n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + \ldots + n_n(n_n-\overline{x})^2}{n_1+n_2+\ldots+n_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i-\overline{x})^2}{N} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\overline{x})^2$$

Por lo que podemos formar la siguiente tabla para poder obtener la varianza.

x	**n**	**n·(x-μ)²**
3	1	4
4	1	1
5	1	0
8	1	9
Acumulado	**4**	**14**

Por lo tanto:

$$\sigma^2 = \frac{14}{4} = 3{,}5$$

c) La media de cada muestra se obtiene sumando los dos elementos que la forman y dividiendo entre dos. Así obtenemos las siguientes medias muestrales (medias de las muestras):

3	3,5	4	5,5
3,5	4	4,5	6
4	4,5	5	6,5
5,5	6	6,5	8

Contamos con 16 valores, por lo que el tamaño es N=16. La media se obtiene sumando todas las medias y dividiendo entre 16:

$$\mu = 5$$

Podemos realizar la siguiente tabla estadística:

x	**n**	**n·(x-μ)²**
3	1	4
3,5	2	4,5
4	3	3
4,5	2	0,5
5	1	0
5,5	2	0,5
6	2	2
6,5	2	4,5
8	1	9
Acumulado	**16**	**28**

Quedando la varianza:

$$\sigma^2 = \frac{28}{16} = 1{,}75$$

Fíjate que la media de las muestras ha coincidido con la media de la población. Ambas han sido igual a 5.

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza. La desviación de la población sería $\sqrt{3{,}5}$ mientras que la desviación de las muestras sería $\sqrt{1{,}75}$.

El tamaño de las muestras ha sido 2. Fíjate que se cumple la siguiente relación:

$$\sqrt{1{,}75} = \frac{\sqrt{3{,}5}}{\sqrt{2}}$$

Es decir: la desviación de las muestras coincide con la desviación de la población dividido por la raíz cuadrada del tamaño de cada muestra.

Esta relación entre los valores de la población y los valores medios de una muestra lo volveremos a estudiar más adelante, en lo que denominaremos distribución muestral de medias.

PROBLEMA 3

En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio sigue una distribución normal, con media 23º y desviación típica 5º. Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21º y 27º.

Asumimos una distribución normal N(23,5) para las temperaturas máximas de junio. Debemos tipificar la variable para obtener:

$$P(21 \leq X \leq 27) = P(\frac{21-23}{5} \leq Z \leq \frac{27-23}{5}) = P(-0{,}4 \leq Z \leq 0{,}8)$$

Para obtener la probabilidad de este intervalo razonamos de la siguiente forma. A la probabilidad acumulada para z=0,8 debemos restar la probabilidad acumulada para z=-0,4:

$$\mathrm{P}(-0{,}4 \leq \mathrm{Z} \leq 0{,}8) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 0{,}8) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq -0{,}4)$$

Y la probabilidad acumulada por z=-0,4 será igual a 1 menos la probabilidad acumulada por z=+0,4:

$$P(Z \leq 0{,}8) - P(Z \leq -0{,}4) = P(Z \leq 0{,}8) - (1 - P(Z \leq 0{,}4))$$

Y estos valores podemos encontrarlos en la tabla de probabilidades acumuladas.

$$P(Z \leq 0{,}8) - (1 - P(Z \leq 0{,}4)) = 0{,}7881 - (1 - 0{,}6554) = 0{,}7881 - 0{,}3446 = 0{,}4435$$

Es decir, el 44,35% de los días de junio se espera que sus temperaturas máximas oscilen entre 21º y 27º.

Si junio cuenta con 30 días:

$$30 \cdot 0{,}4435 = 13{,}305$$

Significa que 13 días del mes cumplirán los requisitos marcados por el ejercicio. Como el número de días es una variable discreta, aproximamos el valor 13,305 al número entero 13.

PROBLEMA 4

La media de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es de 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponemos que los pesos se distribuyen normalmente. Hallar cuántos estudiantes pesan:

a) Entre 60 kg y 70 kg.

b) Más de 90 kg.

c) Menos de 64 kg.

d) Exactamente 64 kg.

La variable X sigue una distribución normal N(70,3).

a) El porcentaje de alumnos con pesos entre 60 y 70 kg se obtienen con la tipificación:

$$P(60 \leq X \leq 70) = P(\frac{60-70}{3} \leq Z \leq \frac{70-70}{3}) = P(-3{,}33 \leq Z \leq 0)$$

La probabilidad acumulada por z=0 es igual a 0,50 (la distribución normal es simétrica respecto de la media). Por lo que a ese valor 0,50 deberemos restarle la probabilidad acumulada por z=-3,33:

$$P(-3{,}33 \leq Z \leq 0) = 0{,}50 - P(Z \leq -3{,}33) = 0{,}50 - (1 - P(Z \leq 3{,}33)) = -0{,}50 + P(Z \leq 3{,}33)$$

Consultando la tabla de probabilidad acumulada:

$$P(-3{,}33 \leq Z \leq 0) = -0{,}50 + 0{,}99955 = 0{,}499955$$

El número total de alumnos que cumplen este requisito será:

$$500 \cdot 0{,}499955 = 249{,}775$$

Aproximando al entero inferior, 249 alumnos.

b) La probabilidad acumulada por encima de 90 será:

$$P(X > 90) = P(Z > \frac{90-70}{3}) = P(Z > 6{,}66) = 1 - P(Z < 6{,}66) = 1 - 0{,}9999 \cong 0$$

Las tablas tipificadas dan un valor prácticamente igual a 1 para probabilidades acumuladas por encima de z=4, por lo que podemos aproximar a 0 el porcentaje de alumnos con peso superior a los 90 kg.

c) La probabilidad acumulada por debajo de 64 será:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} < 64) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < \frac{64-70}{3}) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < -2) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} > 2) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

Por lo que el número de alumnos sería:

$$500 \cdot 0{,}0228 = 11{,}4$$

Un total de 11 alumnos tiene un peso inferior a 64 kg.

d) Si consideramos la variable X como una variable continua con infinitos decimales disponibles, la probabilidad de un valor concreto x=64 se considera 0 por definición.

Pero si consideramos la variable X como discreta, que solo toma valores enteros, podemos realizar la siguiente aproximación:

$$P(X = 64) \cong P(64 - 0{,}5 \leq X \leq 64 + 0{,}5) = P(63{,}5 \leq X \leq 64{,}5)$$

Donde estamos considerando un intervalo de anchura unidad alrededor del valor x=64. Así, al tipificar, tendremos:

$$\mathrm{P}(63{,}5 \leq \mathrm{X} \leq 64{,}5) = \mathrm{P}(\frac{63{,}5-70}{3} \leq \mathrm{Z} \leq \frac{64{,}5-70}{3}) = \mathrm{P}(-2{,}17 \leq \mathrm{Z} \leq -1{,}83)$$

$$P(-2{,}17 \leq Z \leq -1{,}83) = P(1{,}83 \leq Z \leq 2{,}17) = P(Z \leq 2{,}17) - P(Z \leq 1{,}83) = 0{,}9850 - 0{,}9664$$

$$P(-2{,}17 \leq Z \leq -1{,}83) = 0{,}0186$$

Y el número de alumnos que, aproximadamente, tendrían un peso de 64 kg sería:

$$500 \cdot 0{,}0186 = 9{,}3$$

Es decir, se espera que 9 alumnos tengan un peso igual a 64 kg.

PROBLEMA 5

Las notas de un examen sigue una distribución normal N(65,18). Se desea clasificar a los alumnos en tres grupos: nivel bajo, nivel medio, nivel alto. Se desea que en el nivel bajo haya un 20% de los alumnos, un 65% en el nivel medio y un 15% en el nivel alto. ¿Qué puntuaciones marcan el paso de un nivel a otro?

Necesitamos encontrar, con la variable tipificada, los valores que acumulan el 20% de los estudiantes y el 85% de los estudiantes (20% + 65% = 85%).

$$P(X \leq x) = 0{,}20$$

$$P(Z \leq z = \frac{x - 65}{18}) = 0{,}20$$

El valor "z" que acumula 0,20 será simétrico respecto al valor de "z" que deja por encima una probabilidad de 0,20 (o lo que es lo mismo, que acumula 1-0,20=0,80).

$P(Z \leq z) = 0{,}80$ → Aproximando en tabla tipificada → $z = 0{,}85$

Por lo tanto, al ser simétrico respecto al valor medio z=0:

$\frac{x-65}{18} = -0{,}85$ → $x = 49{,}7$

Si consideramos que la nota del examen no toma decimales (variable discreta), el valor x=49 marca la nota máxima de los alumnos con nivel bajo.

A partir de x=50 comenzaría el nivel medio. Para obtener la nota máxima del nivel medio repetimos el mismo razonamiento: necesitamos acumular un 85% de los estudiantes (20% + 65% = 85%).

$$P(X \leq x) = 0{,}85$$

$$P(Z \leq z = \frac{x - 65}{18}) = 0{,}85$$

$P(Z \leq z) = 0{,}85$ → Aproximando en tabla tipificada → $z = 1{,}04$

$\frac{x-65}{18} = 1{,}04$ → $x = 83{,}72$

Si consideramos que la nota del examen no toma decimales (variable discreta), el valor x=83 marca la nota máxima de los alumnos con nivel media.

A partir de x=84 tendríamos los alumnos con nivel alto.

PROBLEMA 6

En una distribución normal de media 4 y desviación típica 2, calcular el valor de "a" para que se cumpla:

$\boldsymbol{P(4-a \leq X \leq 4+a) = 0,5934}$

La distribución normal tipificada es simétrica respecto al valor medio z=0. Si tipificamos la variable:

$$P(\frac{(4-a)-4}{2} \leq Z \leq \frac{(4+a)-4}{2}) = 0,5934$$

$$P(\frac{-a}{2} \leq Z \leq \frac{a}{2}) = 0,5934$$

La probabilidad acumulada entre $z = 0$ y $z = \frac{a}{2}$ será la mitad de la probabilidad acumulada entre $z = \frac{-a}{2}$ y $z = \frac{a}{2}$. Por lo tanto:

$$P(0 \leq Z \leq \frac{a}{2}) = 0,2967$$

Y esta probabilidad acumulada entre $z = 0$ y $z = \frac{a}{2}$ será igual la probabilidad acumulada por $z = \frac{a}{2}$ menos 0,50.

$$0,2967 = P(Z \leq \frac{a}{2}) - 0,50$$

$$0,7967 = P(Z \leq \frac{a}{2})$$

Aproximando con la tabla de probabilidades acumuladas:

$$\frac{a}{2} = 0,83 \rightarrow a = 1,66$$

PROBLEMA 7

La altura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.

a) Calcula la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.

b) Calcula qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.

c) Calcula la altura máxima que es superada por el 33% de la población.

a) Tipificamos la variable.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Si x=170, tendremos:

$$z = \frac{170-175}{4} = -\frac{5}{4} = -1{,}25$$

Por lo tanto, buscamos la probabilidad en la distribución gaussiana tipificada de que la variable z se encuentre por encima del valor -12,5.

$$P(Z \geq -1{,}25)$$

La tabla con la que trabajamos ofrece probabilidades acumuladas inferiores para valores superiores a z=0. Por simetría podemos deducir:

$$P(Z \geq -1{,}25) = P(Z \leq 1{,}25)$$

Mirando la tabla, la probabilidad acumulada por debajo de z=1,25 es igual a 0,8944. Por lo tanto:

$$P(Z \geq -1{,}25) = 0{,}8944$$

Tendremos una probabilidad del 89,44% de elegir a un individuo que mida más de 170 cm.

b) Volvemos a tipificar los dos valores de la variable estadística, para obtener la probabilidad acumulada entre ambos valores.

$$z = \frac{170-175}{4} = -\frac{5}{4} = -1{,}25$$

$$z = \frac{185-175}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

$$P(-1{,}25 \leq z \leq 2{,}5)$$

Recordamos que nuestra tabla ofrece valores acumulados inferiores. Y que es simétrica alrededor de z=0. Por lo tanto:

$$P(-1{,}25 \leq Z \leq 2{,}5) = P(Z \leq 2{,}5) - P(Z \leq -1{,}25) = P(Z \leq 2{,}5) - [1 - P(Z \leq 1{,}25)]$$

Mirando la tabla:

$$P(-1{,}25 \leq Z \leq 2{,}5) = 0{,}9938 - [1 - 0{,}8944] = 0{,}9938 - [0{,}1056] = 0{,}8882$$

Obteniendo una probabilidad del 88,82%.

c) En el último apartado, a diferencia de los dos anteriores, nos dan el porcentaje y nos piden obtener el valor de la variable que acumula a su derecha ese porcentaje. Es decir:

$$P(Z \geq z) = 0{,}33$$

Por simetría, podemos decir:

$$P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq z)$$

Llegando a la ecuación:

$$1 - P(Z \leq z) = 0{,}33$$

$$P(Z \leq z) = 0{,}67$$

Es decir, buscamos el valor z de la variable tipificada que acumula inferiormente el 67% de las observaciones. Si miramos la tabla:

$$z = 0{,}44$$

A partir del valor tipificado z, obtenemos el valor de la variable x:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$0{,}44 = \frac{x - 175}{4}$$

$$x = 176{,}76\ cm$$

A partir de una altura de 176,76 cm (asumimos variable real continua), tendremos a la derecha el 33% de las observaciones. Es decir, el 33% de los individuos que superan esa altura.

PROBLEMA 8

La edad de los habitantes de cierta ciudad se distribuye normalmente, con una media de 40 años. Se sabe además que el 2,28% de los habitantes de esa ciudad tiene más de 60 años.

a) Calcula la desviación típica de la distribución.

b) Si la edad de la población siguiera una distribución N(40,10), calcula el porcentaje de habitantes con menos de 35 años.

a) Nuestra variable X representa la edad de las personas. Sabemos, por el enunciado, que:

$$P(X \geq 60) = 0{,}0228$$

Por simetría de la distribución normal, podemos decir:

$$P(X \leq 60) = 1 - 0{,}228 = 0{,}9772$$

Es decir: buscamos el valor de la variable tipificada Z que acumule a su izquierda el 97,72% de las observaciones:

$$P(Z \leq z) = 0{,}9772$$

Mirando la tabla:

$$z = 2$$

De la ecuación para tipificar:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$2 = \frac{60 - 40}{\sigma}$$

La única incógnita es la desviación típica:

$$\sigma = 10$$

b) Tipificamos la variable con los datos del segundo apartado.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{35 - 40}{10}$$

$$z = -0{,}5$$

El porcentaje de individuos con edad inferior a los 35 años coincide con la probabilidad acumulada inferior por el valor tipificado z=-0,5.

$$P(Z \leq -0{,}5)$$

Ya sabemos que nuestra tabla da valores acumulados inferiores a partir de z=0. Por simetría podemos decir:

$$P(Z \leq -0{,}5) = P(Z \geq 0{,}5) = 1 - P(Z \leq 0{,}5)$$

En la tabla encontramos que a la izquierda de z=0,5 se acumula el 69,15%. Es decir:

$$1 - P(Z \leq 0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$$

El 30,85% de los individuos tienen menos de 35 años.

PROBLEMA 9

El peso de los estudiantes de determinada localidad sigue una distribución Normal de media 75 kg y varianza 36 kg^2.

a) Calcula el porcentaje de alumnado cuyo peso está comprendido entre 68 y 80 kg.

b) Si se sabe que uno de los estudiantes pesa más de 76 kg, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 80 kg?

a) ¡Ojo con el dato trampa! No dan la desviación. Dan la varianza. Recuerda que la desviación es la raíz cuadrada de la varianza. Fíjate que el dato de la varianza tiene unidades al cuadrado (kg^2). Por lo tanto:

$$\sigma = \sqrt{36\,kg^2} = 6\,kg$$

Tipificamos los valores 68 y 80.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{68-75}{6} = -\frac{7}{6} = -1{,}17$$

$$z = \frac{80-75}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}83$$

Debemos obtener el porcentaje acumulado entre ambos valores tipificados.

$$P(-1{,}17 \leq Z \leq 0{,}83) = P(Z \leq 0{,}83) - P(Z \leq -1{,}17)$$

Como la tabla ofrece los valores acumulados inferiores, a partir de z=0, razonamos por simetría:

$$P(Z \leq 0{,}83) - P(Z \leq -1{,}17) = P(Z \leq 0{,}83) - P(Z \geq 1{,}17) = P(Z \leq 0{,}83) - [1 - P(Z \leq 1{,}17)]$$

Mirando la tabla:

$$P(Z \leq 0{,}83) - [1 - P(Z \leq 1{,}17)] = 0{,}7967 - [1 - 0{,}8790] = 0{,}6757$$

El 67,67% de los estudiantes posee masa comprendida entre 68kg y 80kg.

b) Este apartado también hay que leerlo con calma. De todos los estudiantes que pesan más de 76 kg, cuál es el porcentaje que también cumpla pesar más de 80 kg.

Es decir, buscamos la proporción de estudiantes por encima de 80 kg (casos favorables) del total de estudiantes que pesan por encima de 76 kg (casos totales).

$$\frac{P(X \geq 80)}{P(X \geq 76)}$$

Tipificamos los valores.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{76-75}{6} = \frac{1}{6} = 0{,}17$$

$$z = \frac{80-75}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}83$$

$$\frac{P(Z \geq 0{,}83)}{P(Z \geq 0{,}17)} = \frac{1 - P(Z \leq 0{,}83)}{1 - P(Z \leq 0{,}17)} = \frac{1 - 0{,}7967}{1 - 0{,}5675} = \frac{0{,}2033}{0{,}4325} = 0{,}4701$$

De todos los individuos con peso superior a 76 kg, tenemos una probabilidad del 47,01% de que también cumpla que su peso sea superior a 80 kg.

PROBLEMA 10

El peso de las lubinas vendidas en una cadena de hipermercados sigue una distribución normal de media 6.706 gramos. Sabiendo que el 20% de las lubinas pesan más de 7.386 gramos, calcula el porcentaje de lubinas que pesan entre 6 y 8 kg.

En primer lugar, debemos obtener la desviación típica de la distribución. Para ello, usamos el valor de la media (6706 gramos) y el dato de que el 20% supera el peso de 7.386 gramos.

$$P(X \geq 7.386) = 0{,}2$$

Por lo tanto, por debajo del peso de 7.386 tendremos el 80% de las observaciones.

$$P(X \leq 7.386) = 0{,}8$$

¿Qué valor de la variable tipificada Z acumula el 80% de las observaciones? Mirando nuestra tabla, el primer valor de Z que acumula al menos 0,80 es z=0,85. Por lo tanto:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$0{,}85 = \frac{7.386 - 6.706}{\sigma}$$

Podemos despejar fácilmente el valor de la desviación típica.

$$\sigma = 800\ gramos$$

Con el dato de la media del enunciado y con el dato de la desviación que acabamos de obtener, podemos calcular el porcentaje de lubinas cuyo peso oscila entre los 6.000 y los 8.000 gramos.

$$P(6.000 \leq X \leq 8.000)$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{6.000 - 6.706}{800} = -0{,}88$$

$$z = \frac{8.000 - 6.706}{800} = 1{,}62$$

$$P(-0{,}88 \leq Z \leq 1{,}62) = P(Z \leq 1{,}62) - P(Z \leq -0{,}88)$$

Por simetría de la distribución normal:

$$P(Z \leq 1{,}62) - P(Z \leq -0{,}88) = P(Z \leq 1{,}62) - [1 - P(Z \leq 0{,}88)]$$

Mirando la tabla de probabilidad acumulada inferior:

$$P(Z \leq 1{,}62) - [1 - P(Z \leq 0{,}88)] = 0{,}9474 - [1 - 0{,}8106] = 0{,}758$$

Obteniendo un porcentaje del 75,8% de los individuos de la población.

PROBLEMA 11

El peso de una población de elefantes africanos macho sigue una distribución normal de media 6 toneladas y desviación típica 1500 kg.

a) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar pese exactamente 6 toneladas.

b) Calcule qué porcentaje de la población pesa entre 5 y 8 toneladas.

c) Calcule qué peso es superado por el 33% de la población.

a) En una distribución continua (infinitos valores reales), la probabilidad de que ocurra un valor concreto tiende a cero. Debido a la gran cantidad de valores posibles que toma la variable. Esto no significa que no haya ningún elefante cuya masa sea igual a 6 toneladas. Sino que la probabilidad de encontrar uno, elegido al azar entre toda la población, es prácticamente nula.

Nuestra función de distribución da probabilidades acumuladas en un intervalo. Esta distribución se obtiene mediante una integral definida. Y la integral definida entre x=6.000 y x=6.000, por definición, es igual a cero por ser idénticos los límites de integración.

b) Ahora sí tenemos un intervalo donde calcular una probabilidad acumulada.

$$P(5.000 \leq X \leq 8.000)$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{5.000 - 6.000}{1.500} = -0,67$$

$$z = \frac{8.000 - 6.000}{1.500} = 1,33$$

$$P(-0,67 \leq Z \leq 1,33) = P(Z \leq 1,33) - P(Z \leq -0,67)$$

Por simetría de la distribución gaussiana:

$$(Z \leq 1,33) - P(Z \leq -0,67) = P(Z \leq 1,33) - P(Z \geq 0,67) = P(Z \leq 1,33) - [1 - P(Z \leq 0,67)]$$

Mirando la tabla de probabilidades acumuladas inferiores:

$$P(Z \leq 1,33) - [1 - P(Z \leq 0,67)] = 0,9082 - [1 - 0,7486] = 0,6568$$

Obteniendo un porcentaje del 65,68%.

c) Buscamos el valor de la variable X que deja a su derecha el 33% de la población. O lo que es lo mismo, el valor de X que deja a su izquierda el 67% de las observaciones.

$$P(X \leq x) = 0,67$$

Con variable tipificada:

$$P(Z \leq z) = 0,67$$

Mirando la tabla, observamos que ocurre para z=0,44

$$P(Z \leq 0,44) = 0,67$$

Con la relación para tipificar la variable:

$$0,44 = \frac{x - 6.000}{1.500}$$

Resultando x=6.660 kg.

PROBLEMA 12

En un laboratorio de análisis clínicos, el 5% de las muestras que llegan no cumplen las condiciones requeridas para obtener resultados concluyentes en el análisis. Si se eligen 5 muestras, calcula:

a) La probabilidad de que de todas las muestras se puedan obtener resultados concluyentes.

b) La probabilidad de que de al menos dos no se obtengan resultados concluyentes.

c) La media y la desviación típica de la distribución.

a) Una muestra puede cumplir las condiciones o puede no cumplirlas. Solo hay dos opciones posibles. La probabilidad de que no la cumpla es p=0.05. Y el tamaño de la muestra es n=5. Estamos ante una binomial B(5, 0.05).

Si deseamos que todas las muestras cumplan las condiciones, significa que ninguna muestra puede no cumplirla. Por lo tanto, en nuestra binomial, buscamos que haya 0 éxitos (0 pruebas que no cumplan las condiciones).

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$P(X=0)=\binom{5}{0}0{,}05^0(0{,}95)^{5-0}=0{,}7738$$

La probabilidad de que todas las muestras cumplan las condiciones para obtener resultados concluyentes es del 77,38%.

b) Si al menos dos pruebas no son concluyentes, significa que pueden existir dos, tres, cuatro o cinco muestras no concluyentes.

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

Si la probabilidad total del espacio muestra es 1, podemos acortar las operaciones usando que:

$$P(X<2)+P(X\geq 2)=1$$

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)$$

$$P(X\geq 2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]$$

El valor P(X=0) lo hemos calculado en el apartado anterior. Nos falta obtener P(X=1).

$$P(X=1)=\binom{5}{1}0{,}05^1(0{,}95)^{5-1}=0{,}2037$$

Por lo tanto:

$$P(X\geq 2)=1-[0{,}7738+0{,}2037]=0{,}0225$$

Obtenemos una probabilidad del 2,25% de que no se obtengan resultados concluyentes de al menos dos muestras.

c) La media en la distribución binomial coincide con el producto del tamaño de la muestra por la probabilidad.

$$\mu=n\cdot p=5\cdot 0{,}05=0{,}25$$

La desviación típica es la raíz cuadrada del tamaño de la muestra por la probabilidad de éxito y por la probabilidad de fracaso.

$$\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{5\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95}=0{,}4873$$

PROBLEMA 13

Una fábrica de baterías para móviles ha detectado que una de sus máquinas produce un 10% de baterías defectuosas. Si se han seleccionado al azar y de forma independiente 6 baterías:

a) Calcula la probabilidad de que exactamente cuatro baterías sean defectuosas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo la mitad sean defectuosas?

c) ¿Qué es más probable que ninguna sea defectuosa o que lo sean las seis?

a) Estamos ante una variable aleatoria discreta binomial. Tamaño n=6. Probabilidad de éxito p=0.1 (entendiendo éxito como que la batería sea defectuosa).

Si buscamos que justo 4 baterías sean defectuosas, debemos operar:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$P(X=4)=\binom{6}{4}0{,}10^4(0{,}90)^{6-4}=0{,}0012$$

La probabilidad es del 0,12%.

b) Si como máximo la mitad salen defectuosas, buscamos la probabilidad de que haya 0, 1, 2 o 3 defectuosas. Es decir:

$$P(X\le 3)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)$$

Podemos operar de manera más corta razonando así:

$$P(X\le 3)=1-[P(4)+P(5)+P(6)]$$

El valor P(X=4) la obtuvimos en el apartado anterior. Por lo tanto:

$$P(X=5)=\binom{6}{5}0{,}10^5(0{,}90)^{6-5}=0{,}000054$$

$$P(X=6)=\binom{6}{6}0{,}10^6(0{,}90)^{6-6}=0{,}000001$$

Por lo tanto:

$$P(X\le 3)=1-[0{,}0012+0{,}000054+0{,}000001]=0{,}9987$$

Siendo la probabilidad del 99,87%.

c) La probabilidad de que ninguna sea defectuosa se calcula como P(X=0).

La probabilidad de que las seis sean defectuosas se obtiene como P(X=6).

$$P(X=0)=\binom{6}{0}0{,}10^0(0{,}90)^{6-0}=0{,}5314$$

$$P(X=6)=\binom{6}{6}0{,}10^6(0{,}90)^{6-6}=0{,}000001$$

Por lo tanto, es más probable que ninguna sea defectuosa.

PROBLEMA 14

La variedad de naranjas Navel se suele dedicar a naranja de mesa por su tamaño y aspecto. Pero aquellas que no cumplen con los estándares de calidad exigidos, son utilizadas para hacer zumo.

En una finca, una de cada tres naranjas de la variedad Navel recolectadas se destina a hacer zumo. Si se elige un cargamento de 1.200 naranjas de esa finca, calcula la probabilidad de que entre ellas haya un máximo de 420 que se destinen a hacer zumo.

Estamos ante un experimento Binomial: ser naranja de zumo o no serlo.

La probabilidad de éxito "ser naranja de zumo" es p=1/3.

Elegimos una muestra de tamaño 1.200. Podemos aproximar la muestra a la distribución gaussiana, ya que el tamaño 1.200 supera el valor 30, y además:

n·p = 1.200·1/3 = 400 → Supera el valor 5.

n·(1-p) = 1.200·2/3 = 800 → También supera el valor 5.

En consecuencia, podemos considerar la aproximación a la distribución normal de parámetros estadísticos:

- Media: $\mu = n \cdot p = 1.200 \cdot 1/3 = 400$
- Desviación típica: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{1.200 \cdot 1/3 \cdot 2/3} = 16{,}33$

La probabilidad que pide el enunciado se obtiene mediante la probabilidad tipificada:

$$P(X \leq 420) = P(Z \leq \frac{420-400}{16{,}33}) = P(Z \leq 1{,}22) = 0{,}8888$$

Existe un 88,88% de posibilidades de que como máximo haya 420 naranjas destinadas a zumo.