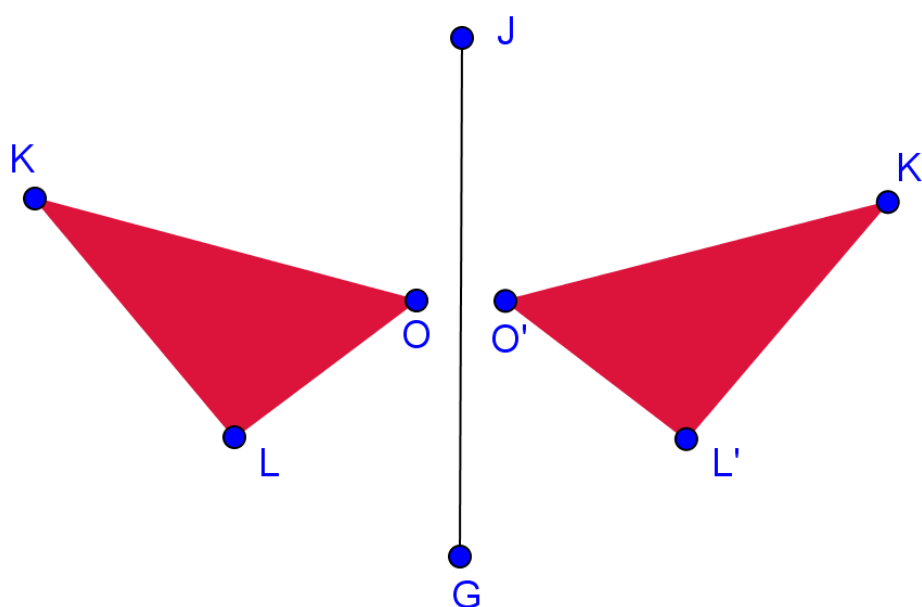


# MATEMATICĂ ȘI ȘTIINȚE

clasele VI-VIII



## Simetria axială

Manualul Profesorului  
Indicații metodologice  
de utilizare  
Partea a III-a

## V. MODULUL 3. TEME DE SINTEZĂ. AXE DE SIMETRIE

<b>Materia</b>	Matematică
<b>Modulul 3</b>	Teme de sinteză. Axe de simetrie
<b>Clasa</b>	a VII-a, a VIII-a
<b>Scurtă descriere a materialului</b>	Modulul final tratează probleme de sinteză legate de noțiunea de simetrie axială. Modulul pune la dispoziție trei aplicații realizate cu <i>GeoGebra</i> .
<b>Cunoștințe științifice / teoretice necesare la începutul lecției</b>	<p>Pentru parcurgerea lecțiilor elevul trebuie să cunoască:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- cazurile de congruență ale triunghiurilor</li> <li>- liniile importante în triunghi</li> <li>- definiția cercului</li> <li>- definiția și proprietățile triunghiului isoscel și echilateral</li> <li>- definiția și proprietățile patrulaterelor speciale</li> <li>- teorema lui Pitagora</li> <li>- definiția poligonului regulat</li> <li>- utilizarea coordonatelor carteziane</li> <li>- calculul unor lungimi și arii</li> <li>- condiții de coliniaritate a trei puncte</li> <li>- asemănarea triunghiurilor</li> </ul>
<b>Cuvinte-cheie</b>	Axe de simetrie, Mediatoare, Bisectoare, Înălțime, Cerc, Triunghi isoscel, Triunghi echilateral, Trapez isoscel, Dreptunghi, Romb, Pătrat, Poligon regulat, Coordonate carteziane, Lungimi, Arii
<b>Componentele modulului</b>	<p>Definirea axei de simetrie</p> <p>Determinarea axelor de simetrie ale figurilor geometrice cunoscute. Învățare prin rezolvare de probleme</p> <p>Test de autoevaluare, cu itemi și reprezentări grafice generate dinamic.</p> <p>Joc: Caleidoscopul cu întrebări</p>
<b>Timp total</b>	100 min

## V.1. Aplicația 7. Axele de simetrie ale unei figuri geometrice

<b>Obiectiv</b>	Definirea axei de simetrie și determinarea axelor de simetrie ale unor figuri geometrice cunoscute
<b>Durata în timp pentru utilizarea la clasă</b>	50 min
<b>Descrierea conținutului</b>	În descrierea de mai jos
<b>Reprezentare vizuală a lecției la care se referă aplicația (capturi de ecran)</b>	În descrierea de mai jos
<b>Instrucțiuni de utilizare</b>	În descrierea de mai jos
<b>Tipul de itemi de învățare</b>	Text, Imagini, Simulare, Rezolvare de probleme, Animație

### Descrierea aplicației ” Axele de simetrie ale unei figuri geometrice”

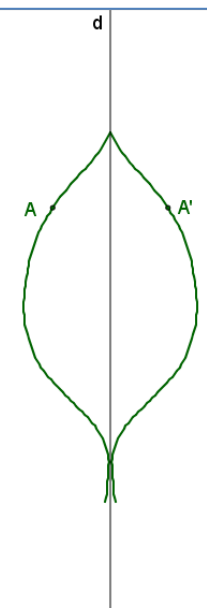
În primul cadru al aplicației este definită noțiunea de axă de simetrie a unei figuri geometrice și este prezentată o figură geometrică cu o axă de simetrie. Elevii pot să deplasa punctul notat cu  $A$  de-a lungul figurii geometrice, observând că pentru fiecare poziție a acestuia simetricul său față de dreapta  $d$  aparține de asemenea figurii respective (Figura 63).

**Ce înțelegem prin axa de simetrie a unei figuri geometrice?**

*Definiție:*  
Spunem că o figură geometrică  $F$  admite ca axă de simetrie dreapta  $d$  dacă pentru orice punct  $A \in F$ , avem  $\text{sim}_d A \in F$ .

*Notăție:*  
Am notat cu  $\text{sim}_d A$  simetricul punctului  $A$  față de dreapta  $d$ .

În imaginea alăturată dreapta  $d$  este axă de simetrie a figurii geometrice reprezentate. Poți deplasa punctul  $A$  pe figura geometrică și vei observa că simetricul său față de dreapta  $d$ , punctul  $A'$ , aparține de asemenea figurii geometrice.

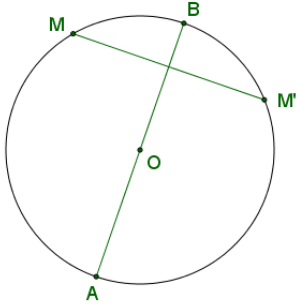


1

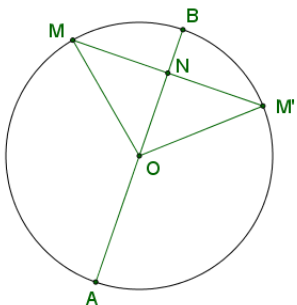
▶

Figura 1. Definirea axei de simetrie. Exemplificare interactivă

Se lansează întrebarea care va fi urmărită pe parcursul aplicației: *Câte axe de simetrie poate avea o figură geometrică?* Elevii vor demonstra mai întâi că orice diametru al cercului este o axă de simetrie a acestuia (Figurile 64, 65). Vor folosi congruența unor triunghiuri, verificând îndeplinirea condițiilor din definiția enunțată anterior. Aplicația oferă la cerere indicații de rezolvare și permite utilizarea interactivă a reprezentărilor grafice: punctul  $M$  poate fi deplasat pe cerc, iar poziția diametrului  $AB$  poate fi modificată.

<p><i>Câte axe de simetrie poate avea o figură geometrică?</i></p> <p>Câte axe de simetrie are un triunghi isoscel?                  Dar un triunghi echilateral? Dar un dreptunghi sau un romb?                  Dar un pătrat? Sau un alt poligon regulat?</p> <p><i>Există figuri geometrice cu o infinitate de axe de simetrie?                  Să demonstrăm că orice diametru este axă de simetrie a cercului.</i></p> <p><input type="checkbox"/> Indicație</p> <p style="text-align: center;">2</p>	
--	--

**Figura 2. Axele de simetrie ale unui cerc. Problematizare**

<p><i>Câte axe de simetrie poate avea o figură geometrică?</i></p> <p>Câte axe de simetrie are un triunghi isoscel?                  Dar un triunghi echilateral? Dar un dreptunghi sau un romb?                  Dar un pătrat? Sau un alt poligon regulat?</p> <p><i>Există figuri geometrice cu o infinitate de axe de simetrie?                  Să demonstrăm că orice diametru este axă de simetrie a cercului.</i></p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Indicație</p> <p>Fie <math>M</math> un punct oarecare pe cerc și <math>M'</math> simetricul său față de diametrul <math>AB</math>. Notăm cu <math>N</math> punctul de intersecție dintre segmentul <math>(MM')</math> și diametrul <math>(AB)</math>. Demonstrează că triunghiurile dreptunghice <math>MON</math> și <math>M'ON</math> sunt congruente (cazul catetă-catetă). Atunci <math>OM'=OM</math>, de unde rezultă că <math>M'</math> aparține cercului.</p> <p style="text-align: center;">2</p>	
---	---

**Figura 3. Axele de simetrie ale cercului. Indicație de rezolvare a problemei**

### Simetria axială

Următoarea problemă este legată de simetria triunghiului isoscel. Se cere demonstrarea faptului că înălțimea corespunzătoare bazei este axă de simetrie a triunghiului isoscel (Figura 66). Aplicația oferă indicații de rezolvare, iar reprezentarea grafică este dinamică: punctele  $I$  și  $J$  pot fi deplasate de-a lungul laturilor triunghiului (Figura 67). Concluzia va putea fi utilizată pentru determinarea axelor de simetrie ale rombului, triunghiului echilateral și trapezului isoscel (Figurile 68-74).

*Axa de simetrie a unui triunghi isoscel*

Să considerăm triunghiul isoscel  $PQR$ , cu  $PQ=PR$  și fie  $PH$  înălțimea corespunzătoare bazei  $QR$ . Demonstrează că  $PH$  este axă de simetrie a triunghiului.

Indicație

3

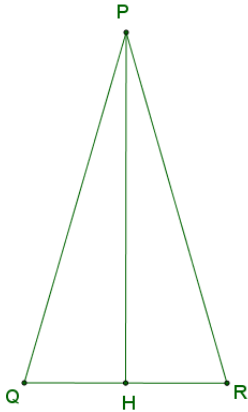


Figura 4. Axa de simetrie a triunghiului isoscel

*Axa de simetrie a unui triunghi isoscel*

Să considerăm triunghiul isoscel  $PQR$ , cu  $PQ=PR$  și fie  $PH$  înălțimea corespunzătoare bazei  $QR$ . Demonstrează că  $PH$  este axă de simetrie a triunghiului.

Indicație

Este necesar să demonstrezi că pentru orice punct situat pe una dintre laturile triunghiului, simetricul său față de dreapta  $PH$  aparține de asemenea unei laturi a triunghiului. Vei studia două cazuri posibile: cazul când punctul este situat pe una dintre laturile congruente, ( $PQ$ ) sau ( $PR$ ), și cazul în care punctul aparține bazei ( $QR$ ).

3

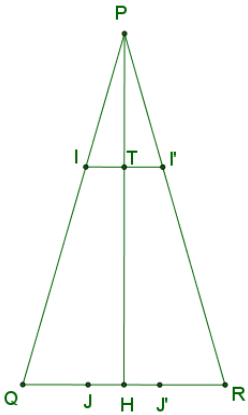


Figura 5. Axa de simetrie a triunghiului isoscel. Indicație de rezolvare

Care sunt axele de simetrie ale unui romb?

Răspuns

4

Figura 6. Axele de simetrie ale rombului

Care sunt axele de simetrie ale unui romb?

Răspuns

Construim diagonalele  $AC$  și  $BD$  și notăm cu  $O$  punctul lor de intersecție. Triunghiurile  $CBD$  și  $ABD$  sunt isoscele, cu baza  $BD$ . Deoarece în romb diagonalele sunt perpendiculare, rezultă că  $CO$  și  $AO$  sunt înălțimile corespunzătoare bazelor celor două triunghiuri isoscele, deci sunt axe de simetrie ale acestora. De aici rezultă că diagonala  $AC$  este axă de simetrie a rombului.

*În mod asemănător, demonstrează că diagonala  $BD$  este o altă axă de simetrie a rombului.*

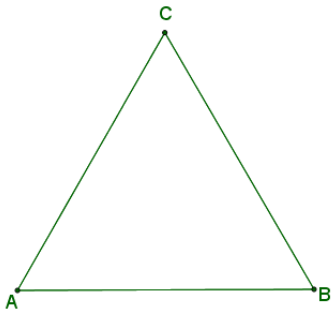
4

Figura 7. Axele de simetrie ale rombului. Reducerea la o problemă anterior rezolvată

## Simetria axială

Care sunt axele de simetrie ale unui triunghi echilateral?

Răspuns



5

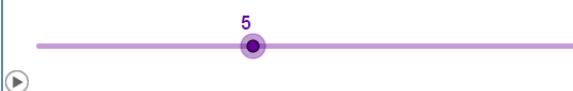
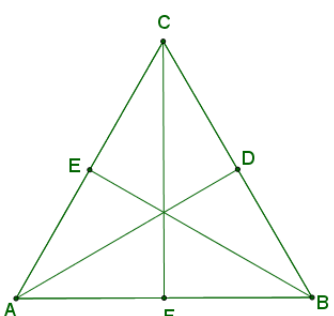


Figura 8. Axele de simetrie ale triunghiului echilateral

Care sunt axele de simetrie ale unui triunghi echilateral?

Răspuns

Cele trei înălțimi sunt axe de simetrie ale triunghiului echilateral, deoarece acesta poate fi privit ca un triunghi isoscel având ca bază oricare dintre cele trei laturi.



5


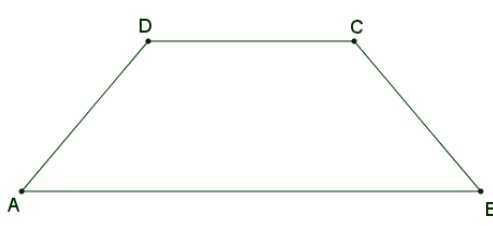


Figura 9. Axele de simetrie ale triunghiului echilateral. Rezolvare

Care este axa de simetrie a unui trapez isoscel?

Afișează axa de simetrie



6

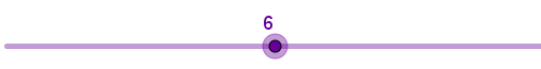


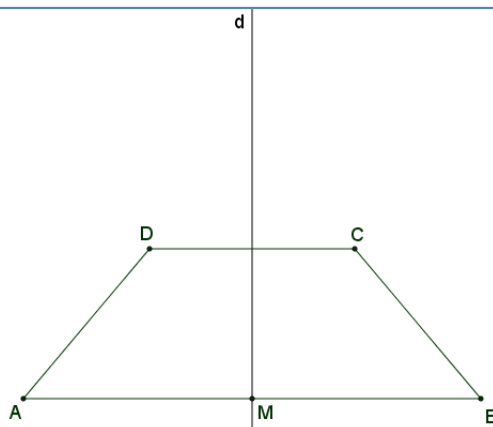
Figura 10. Axa de simetrie a unui trapez isoscel

Care este axa de simetrie a unui trapez isoscel?

Afișează axa de simetrie

Cum poți demonstra că mediatoarea bazei AB este axă de simetrie a trapezului?

Arată o demonstrație



6

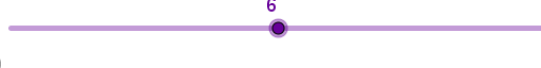


Figura 11. Axa de simetrie a unui trapez isoscel. Reprezentare



## Simetria axială

Care este axa de simetrie a unui trapez isoscel?

Afișează axa de simetrie

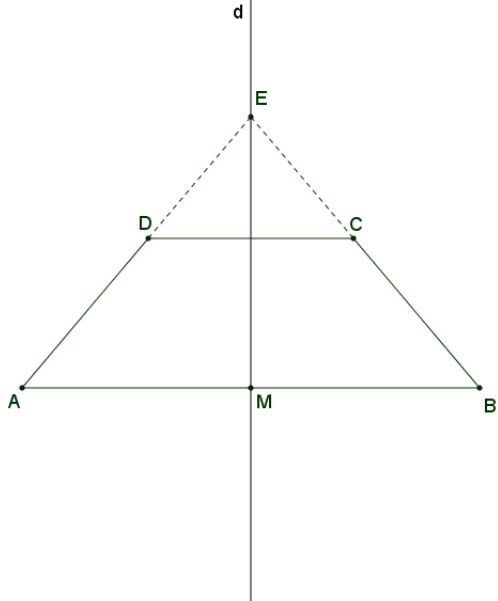
Cum poți demonstra că mediatoarea bazei AB este axă de simetrie a trapezului?

Arată o demonstrație

Prelungirile laturilor neparalele AD și BC se intersectează într-un punct E. Poți arăta că:

- punctul E aparține mediatoarei AB;
- triunghiul ABE este isoscel

Conform celor anterior demonstrate, dreapta EM va fi axă de simetrie a triunghiurilor isoscele EAB și EDC, și de aici va rezulta că este și axă de simetrie a trapezului ABCD.




6

Figura 12. Axa de simetrie a unui trapez isoscel. Demonstrație

Care sunt axele de simetrie ale unui dreptunghi?

Afișează o axă de simetrie



7

Figura 13. Axele de simetrie ale dreptunghiului

După ce elevii demonstrează că mediatoarele laturilor dreptunghiului sunt axele sale de simetrie (Figurile 75-78), vor putea folosi acest rezultat și în cazul pătratului. Deoarece pătratul este atât dreptunghi cât și romb, va avea axele de simetrie caracteristice ambelor clase de patrulatere (Figurile 79-81).


## Simetria axială

Care sunt axele de simetrie ale unui dreptunghi?

Afișează o axă de simetrie

Demonstrează că mediatoarea laturii AB, dreapta d, este o axă de simetrie a dreptunghiului.

Indicație



7

Figura 14. Axele de simetrie ale dreptunghiului. Reprezentare

Care sunt axele de simetrie ale unui dreptunghi?


Afișează o axă de simetrie

Demonstrează că mediatoarea laturii AB, dreapta d, este o axă de simetrie a dreptunghiului.

Indicație

Este necesar să demonstrezi că pentru orice punct aparținând uneia dintre laturile dreptunghiului, simetricul său față de dreapta d aparține de asemenea unei laturi a dreptunghiului.

Afișează a doua axă de simetrie



7

Figura 15. Axele de simetrie ale dreptunghiului. Indicație

## Simetria axială

*Care sunt axele de simetrie ale unui dreptunghi?*

Afișează o axă de simetrie

Demonstrează că mediatoarea laturii AB, dreapta d, este o axă de simetrie a dreptunghiului.

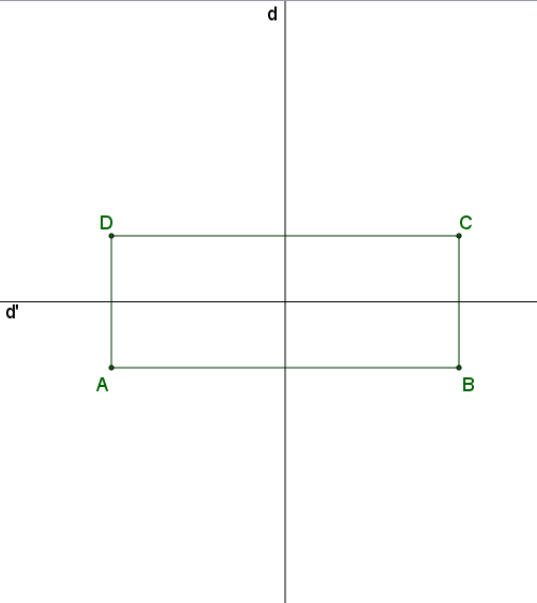
Indicație

Este necesar să demonstrezi că pentru orice punct aparținând uneia dintre laturile dreptunghiului, simetricul său față de dreapta d aparține de asemenea unei laturi a dreptunghiului.

Afișează a doua axă de simetrie

Analog se demonstrează că mediatoarea laturii AD este axă de simetrie a dreptunghiului.

7



The diagram shows a rectangle with vertices labeled A (bottom-left), B (bottom-right), C (top-right), and D (top-left). A vertical line labeled 'd' passes through the midpoint of the bottom side AB and the top side CD, representing the perpendicular bisector of AB. A horizontal line labeled 'd'' passes through the midpoint of the left side AD and the right side BC, representing the perpendicular bisector of AD. The two lines intersect at the center of the rectangle.

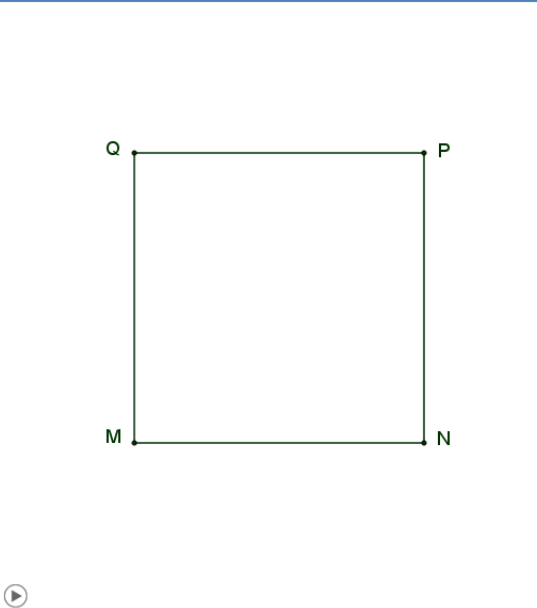
Figura 16. A doua axă de simetrie a dreptunghiului

*Care sunt axele de simetrie ale unui pătrat?*

Răspuns

Afișează axele de simetrie

8



The diagram shows a square with vertices labeled Q (top-left), P (top-right), M (bottom-left), and N (bottom-right). The square is oriented with its sides parallel to the axes of the page.

Figura 17. Axele de simetrie ale pătratului

Care sunt axele de simetrie ale unui pătrat?

Răspuns

Deoarece pătratul este în același timp și romb și dreptunghi, va avea axele de simetrie caracteristice ambelor tipuri de patrulatere. Prin urmare, atât diagonalele, cât și mediatoarele laturilor vor fi axe de simetrie.

Afîșează axele de simetrie

8

Figura 18. Axele de simetrie ale pătratului. Soluție

Care sunt axele de simetrie ale unui pătrat?

Răspuns

Deoarece pătratul este în același timp și romb și dreptunghi, va avea axele de simetrie caracteristice ambelor tipuri de patrulatere. Prin urmare, atât diagonalele, cât și mediatoarele laturilor vor fi axe de simetrie.

Afîșează axele de simetrie

Dreptunghiul are 4 axe de simetrie.

8

Figura 19. Axele de simetrie ale pătratului. Reprezentare

O altă problemă propusă elevilor este determinarea axelor de simetrie ale unui poligon regulat cu  $n$  laturi (Figura 82). Elevii vor discuta două cazuri posibile. Dacă  $n$  este număr impar, axele de simetrie sunt cele  $n$  mediatoare ale laturilor, care sunt și bisectoarele unghiurilor opuse (Figura 83). Dacă  $n$  este număr par, mediatoarele laturilor opuse coincid. Totuși, poligonul are, și în acest caz,  $n$  axe de simetrie: mediatoarele laturilor și bisectoarele unghiurilor (Figura 84).

Care sunt axele de simetrie ale unui poligon regulat cu  $n$  laturi?

$n=5$

Indicație

Studiază separat cazurile în care numărul de laturi este par, respectiv impar.

Arată axele de simetrie

Poți modifica numărul  $n$  de laturi ale poligonului regulat reprezentat cu ajutorul cursorului de mai jos.

5

9

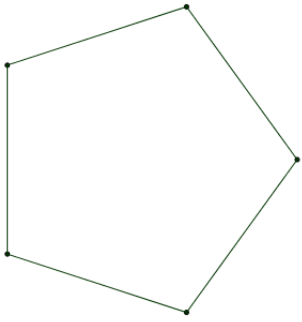


Figura 20. Axele de simetrie ale unui poligon regulat. Indicație

Care sunt axele de simetrie ale unui poligon regulat cu  $n$  laturi?

$n=5$

Indicație

Studiază separat cazurile în care numărul de laturi este par, respectiv impar.

Arată axele de simetrie

Poți modifica numărul  $n$  de laturi ale poligonului regulat reprezentat cu ajutorul cursorului de mai jos.

5

9

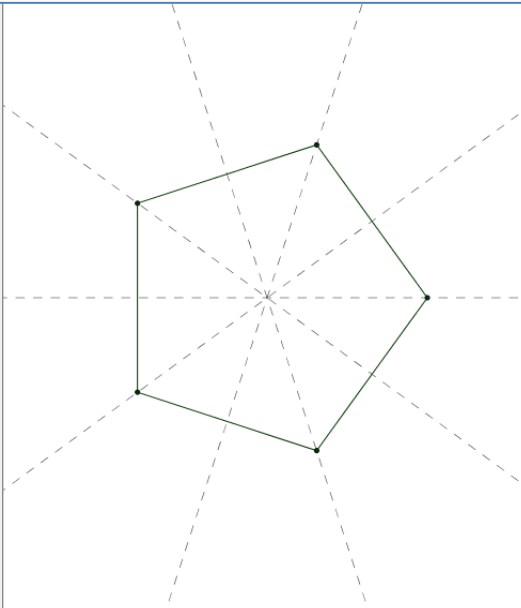


Figura 21. Axele de simetrie ale unui poligon regulat (1)

Care sunt axele de simetrie ale unui poligon regulat cu  $n$  laturi?

$n=6$

Indicație

Studiază separat cazurile în care numărul de laturi este par, respectiv impar.

Arată axele de simetrie

Poți modifica numărul  $n$  de laturi ale poligonului regulat reprezentat cu ajutorul cursorului de mai jos.

6

9

Figura 22. Axele de simetrie ale unui poligon regulat (2)

În imaginea alăturată este reprezentată o linie poligonală cu 10 laturi. Câte axe de simetrie are acesta?

Răspuns

10

Figura 23. Axele de simetrie ale unui poligon. Problemă

Ultima problemă se referă la determinarea numărului axelor de simetrie ale unui poligon cu 10 laturi, care nu este poligon regulat, dar are toate unghiurile congruente, iar laturile sunt congruente câte cinci (Figura 85). Poligonul are cinci axe de simetrie, dar, dacă deplasăm punctul  $A$  astfel încât acesta să fie plasat pe bisectoarea unui unghi format de două axe consecutive, figura va avea din nou 10 axe de simetrie (figura 86).

În imaginea alăturată este reprezentată o linie poligonală cu 10 laturi. Câte axe de simetrie are acesta?

Răspuns

Această linie poligonală are 5 axe de simetrie.

Poți deplasa punctul A și vei obține noi figuri geometrice cu 5 axe de simetrie. Cu ajutorul butonului Play poți porni animația.

O situație specială apare dacă deplasezi punctul A pe bisectoarea unui unghi format de două axe de simetrie consecutive astfel încât să obții un poligon regulat cu 10 laturi. Poți arăta că în acest caz figura geometrică obținută are 10 axe de simetrie?

10

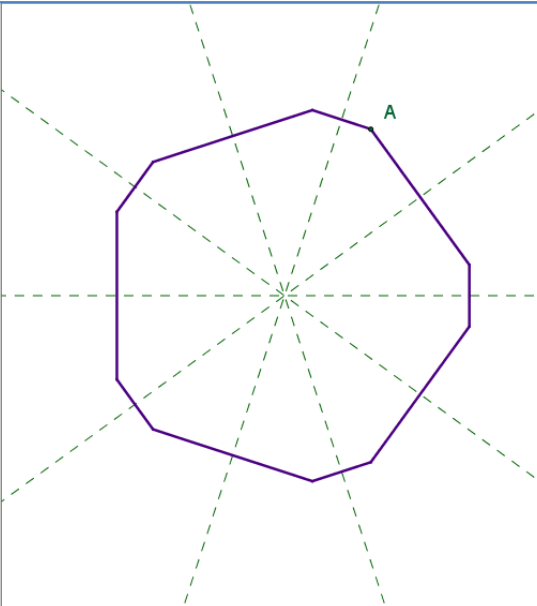


Figura 24. Axele de simetrie ale unui poligon. Răspuns

Figuri cu mai multe axe de simetrie. Animație

Cu ajutorul cursorului din panoul alăturat poți obține linii poligonale cu mai multe axe de simetrie. Deplasând punctul A vei obține figuri geometrice interesante. Pentru ca deplasarea punctului A să se realizeze automat poți acționa butonul "Play".

Pentru a întrerupe animația apasă butonul "Pause".

Afișează axele de simetrie

11

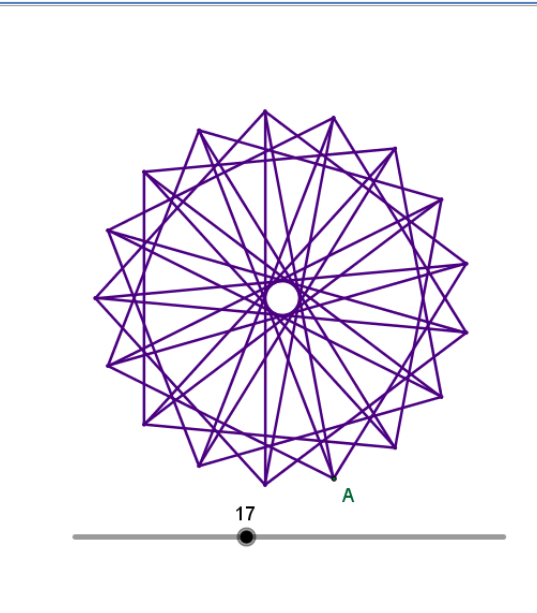
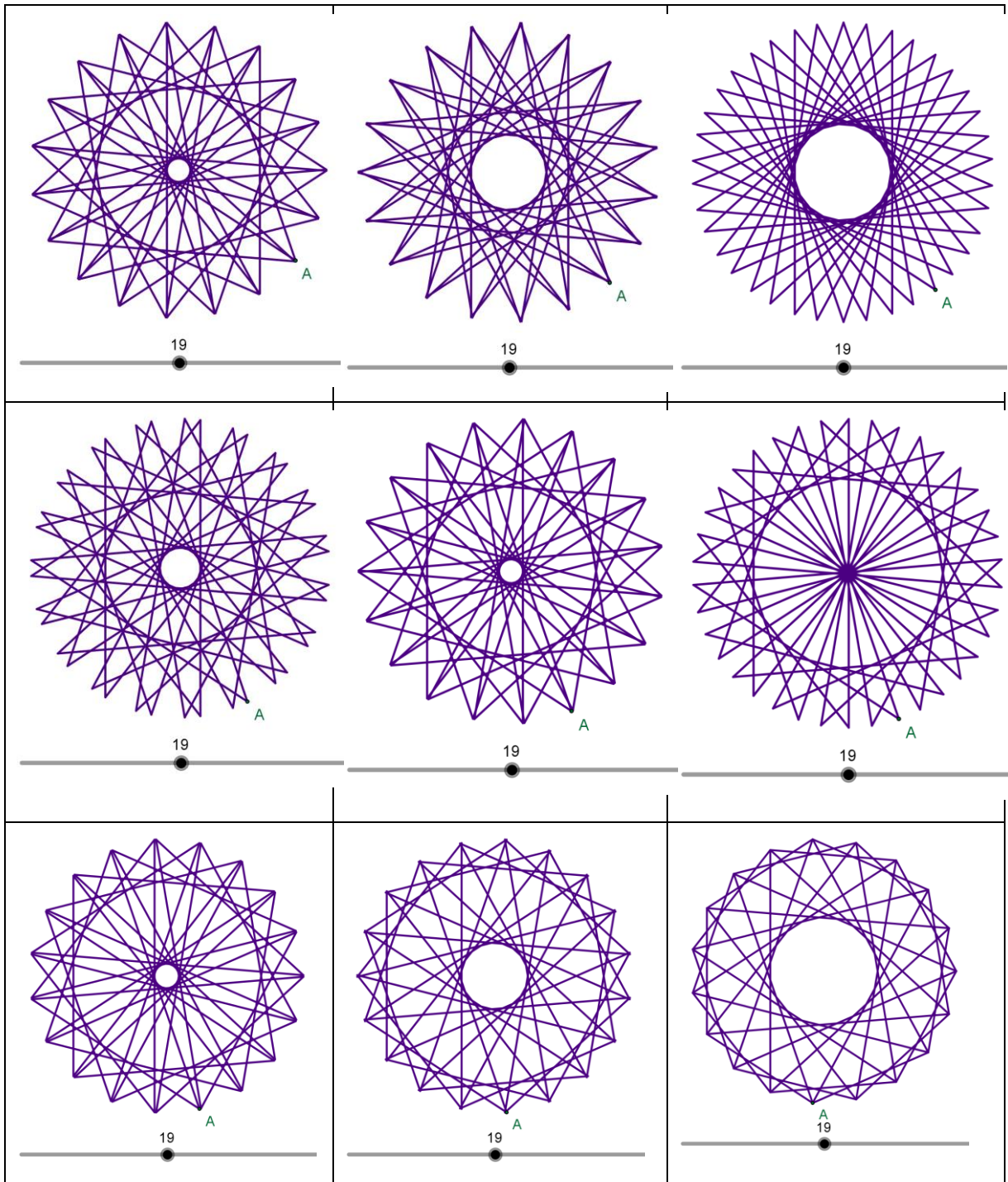


Figura 25. Figuri cu mai multe axe de simetrie. Animație

Ultimul moment al aplicației oferă o reprezentare animată a unor linii poligonale cu un număr fixat de axe de simetrie. Animația este realizată prin rotirea vârfului A în jurul punctului de intersecție a axelor de simetrie. În tabelul următor sunt surprinse câteva cadre ale animației, când numărul axelor de simetrie este setat la 19.

*Simetria axială*



**V.2. Aplicația 8. Test de autoevaluare. Teme de sinteză**

<b>Obiectiv</b>	Autoevaluarea cunoștințelor despre simetria axială și corelarea lor cu alte cunoștințe de geometrie
<b>Durata în timp pentru utilizarea la clasă</b>	40 min



<b>Descrierea conținutului</b>	În descrierea de mai jos
<b>Reprezentare vizuală a lecției la care se referă aplicația (capturi de ecran)</b>	În descrierea de mai jos
<b>Instrucțiuni de utilizare</b>	În descrierea de mai jos
<b>Tipul de itemi de învățare</b>	Text, Imagini, Evaluare, Rezolvare de probleme

### Descrierea aplicației "Test de autoevaluare. Teme de sinteză"

Testul de evaluare propune șase probleme, cu indicații de rezolvare și răspunsuri. Pentru a trece la următoarea problemă, se manevrează cursorul din panoul din stânga al aplicației (Figura 88). La fiecare rulare, problemele vor avea date diferite. Prima problemă cere determinarea coordonatelor simetricilor unui punct dat față de axele de coordonate, apoi a simetricului față de axa  $Oy$  a simetricului față de axa  $Ox$  a punctului dat. Reprezentările punctelor simetrice și coordonatele acestora pot fi afișate simultan sau nu, în funcție de cum se bifează cele trei casete de validare (Figurile 89-92).

The screenshot displays the application's instruction panel on the left and a coordinate grid on the right. The instruction panel contains the following text:

**Test de autoevaluare. Probleme de sinteză**

Acest test conține 6 probleme legate de determinarea coordonatelor unor puncte față de cele două axe și de calculul unor lungimi și arii.

*Pentru a trece la următoarea întrebare, deplasează spre dreapta cursorul de mai jos.*

Pentru a exersa, poți rezolva acest test de mai multe ori. La fiecare rulare, aplicația generează alte date ale problemelor.

Below the text is a progress indicator consisting of a green circle with the number '0' and a horizontal green line.

The coordinate grid on the right has x and y axes ranging from -5 to 5. A point labeled 'A' is plotted at the coordinates (-4, 1).

Figura 26. Instrucțiuni la lansarea testului

## Simetria axială

Punctul A din imagine are coordonatele  $(-5, 1)$ . Ce coordonate are punctul A', simetricul lui A față de axa Ox?

Răspuns

Ce coordonate are punctul A'', simetricul lui A față de axa Oy?

Răspuns

Ce coordonate are simetricul lui A' față de axa Oy?  
Dar simetricul lui A'' față de axa Ox?

Răspuns




Figura 27. Problema 1. Simetricul unui punct față de axele de coordonate

Punctul A din imagine are coordonatele  $(-5, 1)$ . Ce coordonate are punctul A', simetricul lui A față de axa Ox?

Răspuns

Punctul A'=sim<sub>Ox</sub> A are coordonatele  $(-5, -1)$ .

Ce coordonate are punctul A'', simetricul lui A față de axa Oy?

Răspuns

Ce coordonate are simetricul lui A' față de axa Oy?  
Dar simetricul lui A'' față de axa Ox?

Răspuns




Figura 28. Problema 1. Simetricul față de axa Ox

## Simetria axială

Punctul A din imagine are coordonatele (-5, 1). Ce coordonate are punctul A', simetricul lui A față de axa Ox?

Răspuns

Punctul A'=sim<sub>Ox</sub> A are coordonatele (-5, -1).

Ce coordonate are punctul A'', simetricul lui A față de axa Oy?

Răspuns

Punctul A''=sim<sub>Oy</sub> A are coordonatele (5, 1).

Ce coordonate are simetricul lui A' față de axa Oy?  
Dar simetricul lui A'' față de axa Ox?

Răspuns

1

**Figura 29. Problema 1. Simetricul față de axa Oy**

Punctul A din imagine are coordonatele (-5, 1). Ce coordonate are punctul A', simetricul lui A față de axa Ox?

Răspuns

Punctul A'=sim<sub>Ox</sub> A are coordonatele (-5, -1).

Ce coordonate are punctul A'', simetricul lui A față de axa Oy?

Răspuns

Punctul A''=sim<sub>Oy</sub> A are coordonatele (5, 1).

Ce coordonate are simetricul lui A' față de axa Oy?  
Dar simetricul lui A'' față de axa Ox?

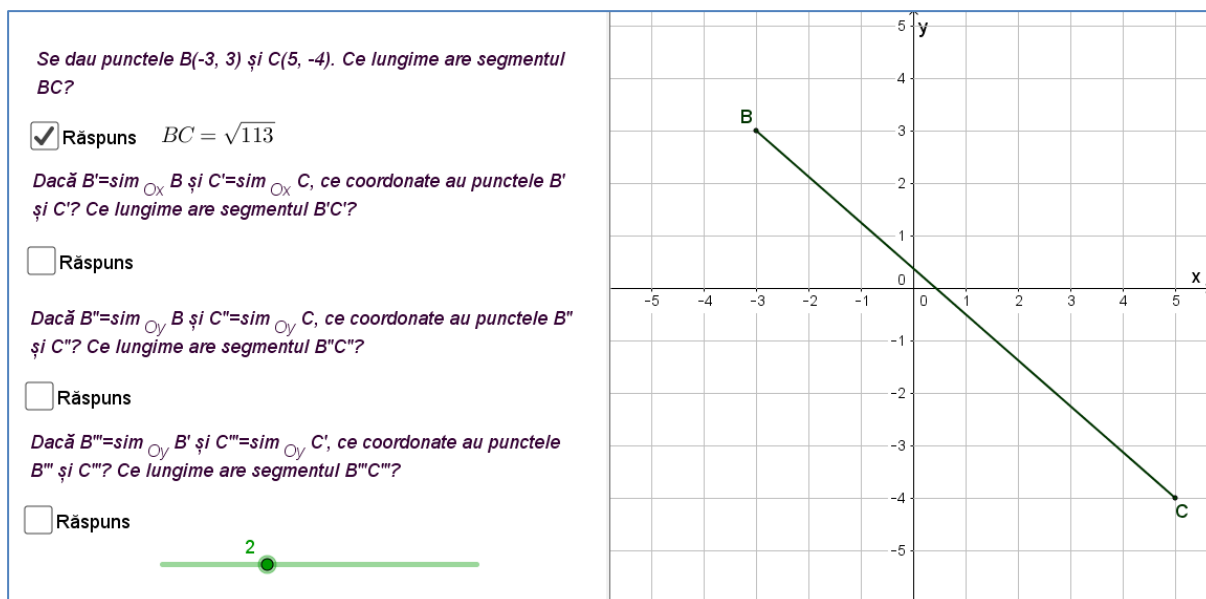
Răspuns

Punctul A'''=sim<sub>Oy</sub> A'=sim<sub>Ox</sub> A'' are coordonatele (5, -1).

1

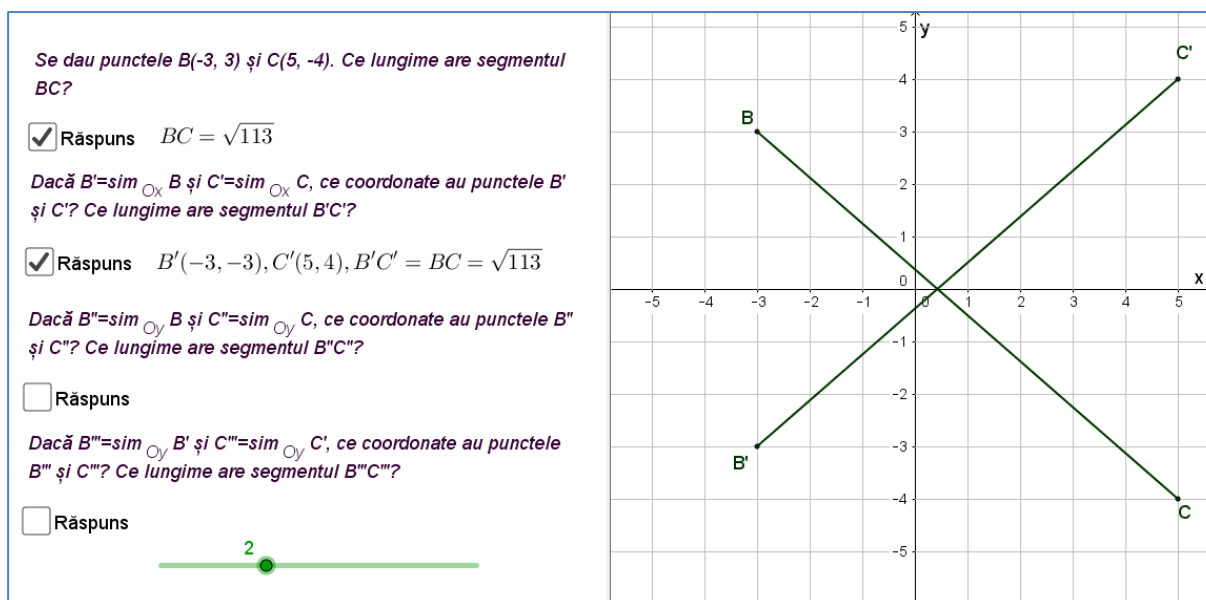
**Figura 30. Problema 1. Simetricul față de axa Oy a simetricului față de Ox**

## Simetria axială



**Figura 31. Problema 2. Lungimea unui segment**

A doua problemă cere determinarea lungimii unui segment, fiind cunoscute coordonatele capetelor segmentului (Figura 93). Se cer coordonatele simetricelor celor două puncte față de axele de coordonate și lungimile simetricelor segmentului față de axe. Aplicația oferă pentru verificare răspunsurile la întrebările formulate, după bifarea casetelor de validare (Figurile 94-96).



**Figura 32. Problema 2. Simetricul unui segment față de axa Ox**

## Simetria axială

Se dau punctele  $B(-3, 3)$  și  $C(5, -4)$ . Ce lungime are segmentul  $BC$ ?

Răspuns  $BC = \sqrt{113}$

Dacă  $B' = \text{sim}_{Ox} B$  și  $C' = \text{sim}_{Ox} C$ , ce coordonate au punctele  $B'$  și  $C'$ ? Ce lungime are segmentul  $B'C'$ ?

Răspuns

Dacă  $B'' = \text{sim}_{Oy} B$  și  $C'' = \text{sim}_{Oy} C$ , ce coordonate au punctele  $B''$  și  $C''$ ? Ce lungime are segmentul  $B''C''$ ?

Răspuns  $B''(3, 3), C''(-5, -4), B''C'' = BC = \sqrt{113}$

Dacă  $B''' = \text{sim}_{Oy} B'$  și  $C''' = \text{sim}_{Oy} C'$ , ce coordonate au punctele  $B'''$  și  $C'''$ ? Ce lungime are segmentul  $B'''C'''$ ?

Răspuns

2

**Figura 33. Problema 2. Simetricul unui segment față de axa Oy**

Se dau punctele  $B(-3, 3)$  și  $C(5, -4)$ . Ce lungime are segmentul  $BC$ ?

Răspuns  $BC = \sqrt{113}$

Dacă  $B' = \text{sim}_{Ox} B$  și  $C' = \text{sim}_{Ox} C$ , ce coordonate au punctele  $B'$  și  $C'$ ? Ce lungime are segmentul  $B'C'$ ?

Răspuns  $B'(-3, -3), C'(5, 4), B'C' = BC = \sqrt{113}$

Dacă  $B'' = \text{sim}_{Oy} B$  și  $C'' = \text{sim}_{Oy} C$ , ce coordonate au punctele  $B''$  și  $C''$ ? Ce lungime are segmentul  $B''C''$ ?

Răspuns  $B''(3, 3), C''(-5, -4), B''C'' = BC = \sqrt{113}$

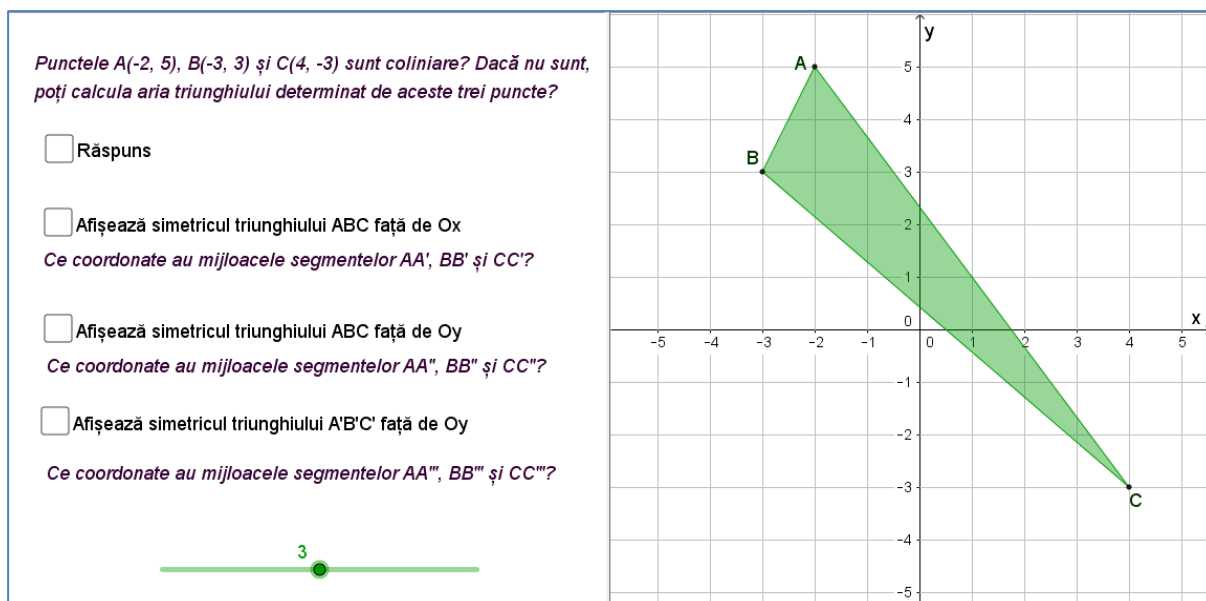
Dacă  $B''' = \text{sim}_{Oy} B'$  și  $C''' = \text{sim}_{Oy} C'$ , ce coordonate au punctele  $B'''$  și  $C'''$ ? Ce lungime are segmentul  $B'''C'''$ ?

Răspuns  $B'''(3, -3), C'''(-5, 4), B'''C''' = BC = \sqrt{113}$

2

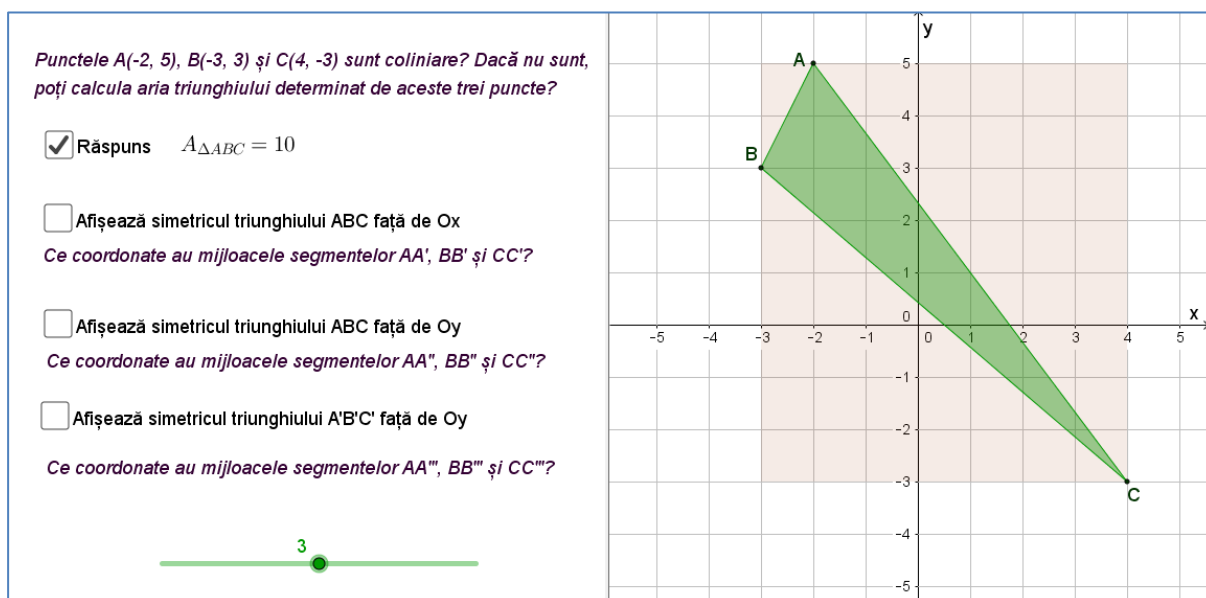
**Figura 34. Problema 2. Simetricul simetricului unui segment**

## Simetria axială



**Figura 35. Problema 3. Aria unui triunghi**

A treia problemă cere determinarea ariei unui triunghi, când se cunosc coordonatele vârfurilor sale (Figura 97). Aplicația oferă răspunsul și o sugestie de rezolvare: din aria dreptunghiului care conține triunghiul, evidențiat în imagine, se pot scădea ariile unor suprafețe cunoscute (Figura 98). Problema cere determinarea coordonatelor mijloacelor segmentelor care au o extremitate în unul din punctele date și cealaltă în simetricul acestui punct față de una din axe sau față de originea sistemului de axe. Elevii vor observa că mijloacele se găsesc fie pe una dintre axe, fie în originea sistemului (figurile 99-101).



**Figura 36. Problema 3. Aria triunghiului. Indicație și răspuns**

## Simetria axială

Punctele  $A(-2, 5)$ ,  $B(-3, 3)$  și  $C(4, -3)$  sunt coliniare? Dacă nu sunt, poți calcula aria triunghiului determinat de aceste trei puncte?

Răspuns  $A_{\Delta ABC} = 10$

Afișează simetricul triunghiului ABC față de Ox  
Ce coordonate au mijloacele segmentelor  $AA'$ ,  $BB'$  și  $CC'$ ?

Afișează simetricul triunghiului ABC față de Oy  
Ce coordonate au mijloacele segmentelor  $AA''$ ,  $BB''$  și  $CC''$ ?

Afișează simetricul triunghiului  $A'B'C'$  față de Oy  
Ce coordonate au mijloacele segmentelor  $AA'''$ ,  $BB'''$  și  $CC'''$ ?

3

**Figura 37. Problema 3. Simetricul unui triunghi față de axa Ox**

Punctele  $A(-2, 5)$ ,  $B(-3, 3)$  și  $C(4, -3)$  sunt coliniare? Dacă nu sunt, poți calcula aria triunghiului determinat de aceste trei puncte?

Răspuns  $A_{\Delta ABC} = 10$

Afișează simetricul triunghiului ABC față de Ox  
Ce coordonate au mijloacele segmentelor  $AA'$ ,  $BB'$  și  $CC'$ ?

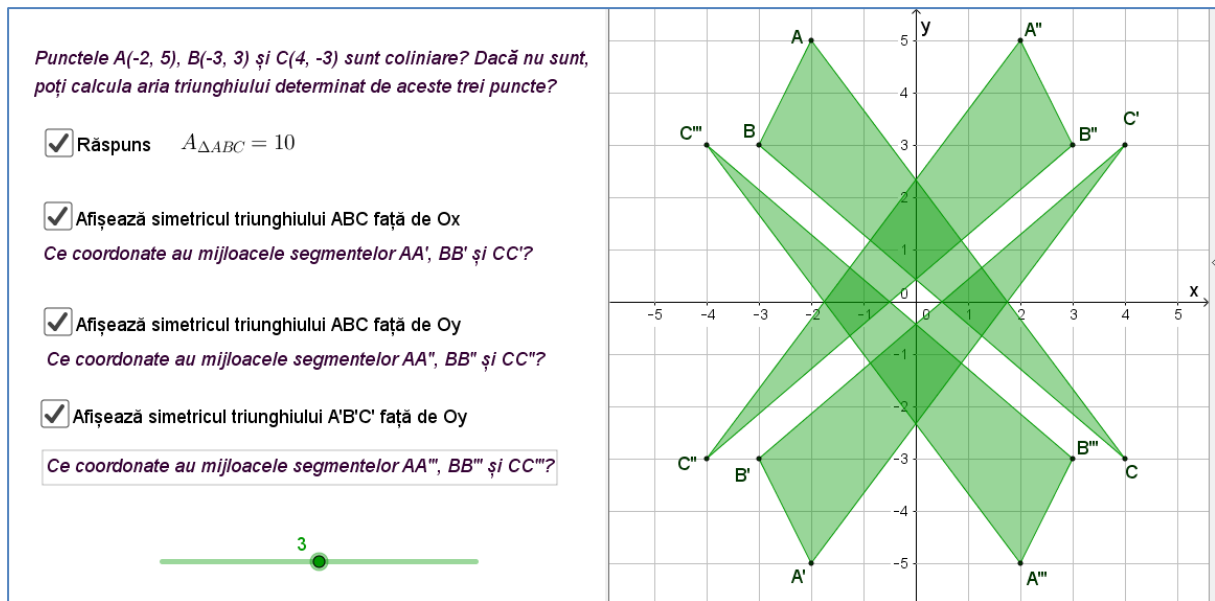
Afișează simetricul triunghiului ABC față de Oy  
Ce coordonate au mijloacele segmentelor  $AA''$ ,  $BB''$  și  $CC''$ ?

Afișează simetricul triunghiului  $A'B'C'$  față de Oy  
Ce coordonate au mijloacele segmentelor  $AA'''$ ,  $BB'''$  și  $CC'''$ ?

3

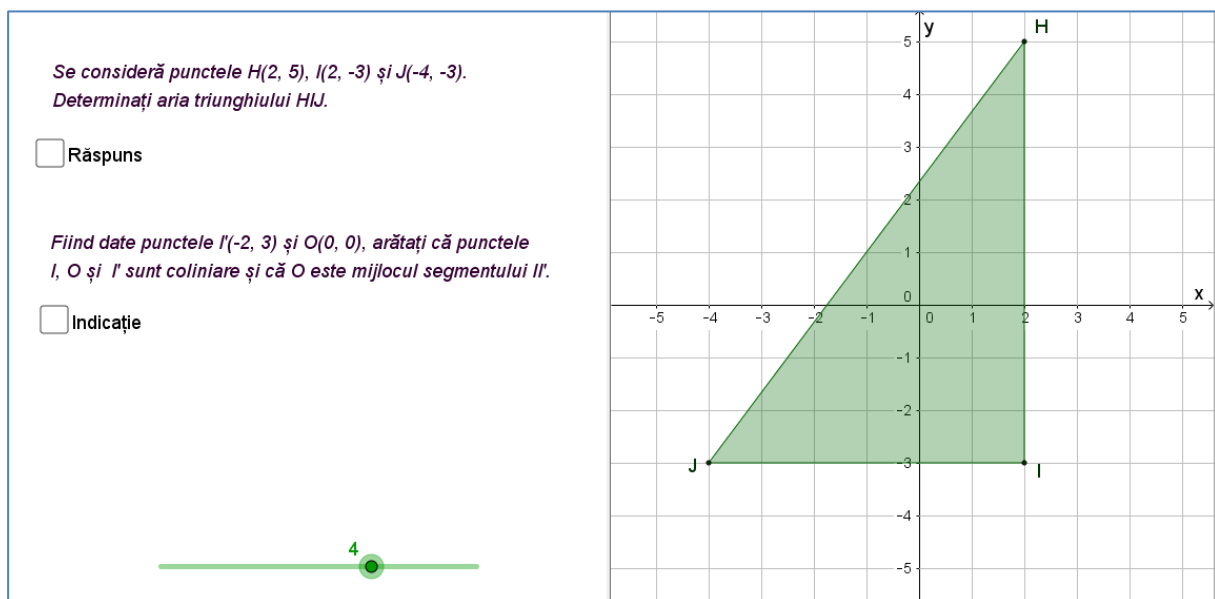
**Figura 38. Problema 3. Simetricul unui triunghi față de axa Oy**

## Simetria axială



**Figura 39. Problema 3. Simetricul simetricului unui triunghi**

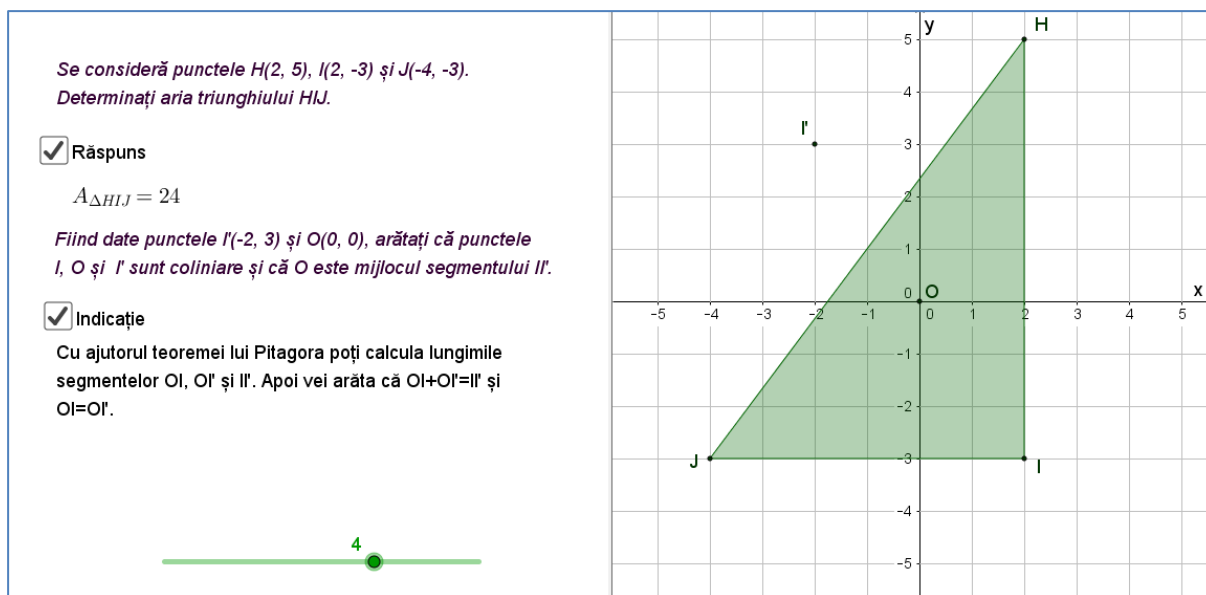
Problema 4 cere calculul ariei unui triunghi dreptunghic pentru care se cunosc coordonatele vârfurilor, apoi verificarea coliniarității a trei puncte cu coordonate date (Figurile 102-103).



**Figura 40. Problema 4. Coliniaritate**

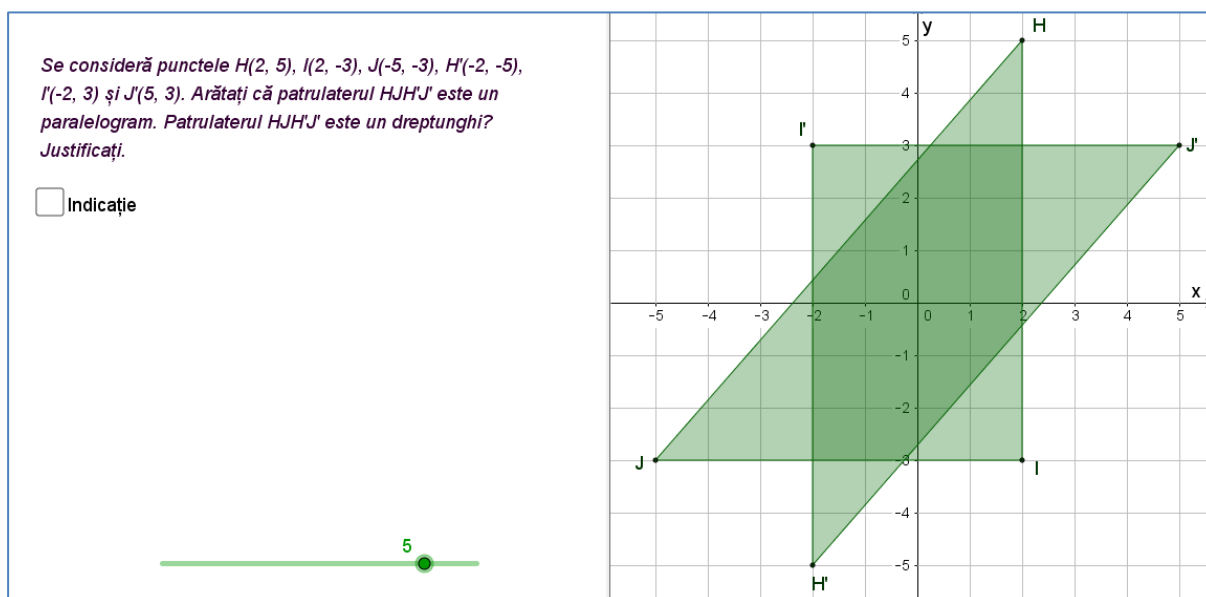


## Simetria axială



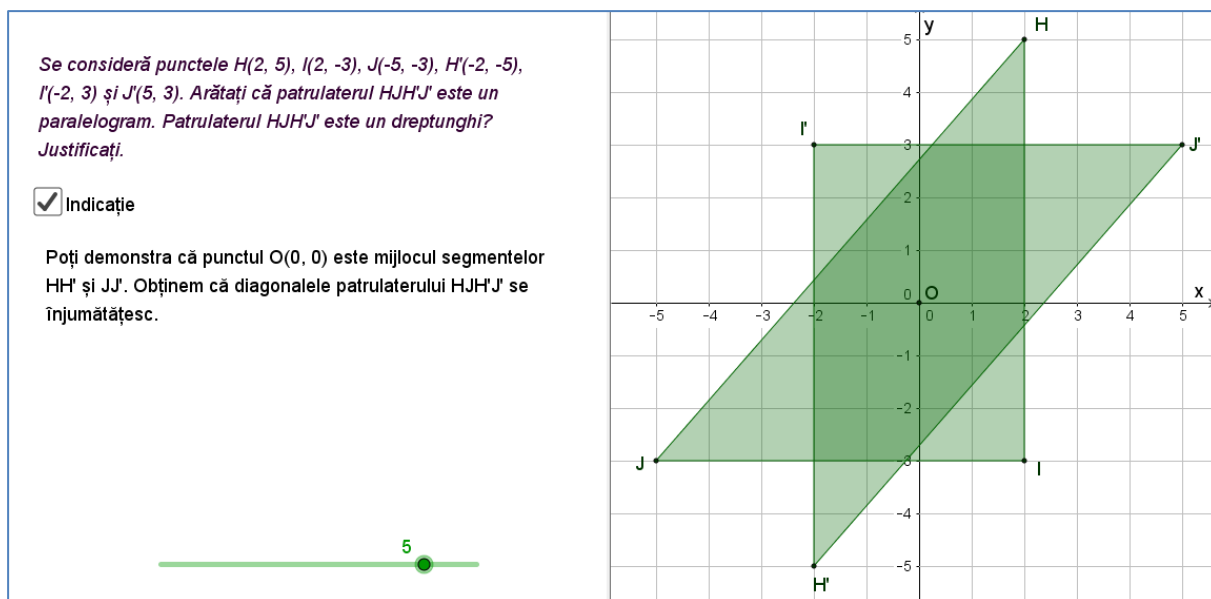
**Figura 41. Problema 4. Indicație de rezolvare**

Cea de a cincea problemă solicită verificarea faptului că patru puncte de coordonate date sunt vârfurile unui paralelogram. La cerere, elevul poate primi indicații de rezolvare (Figurile 104-105).



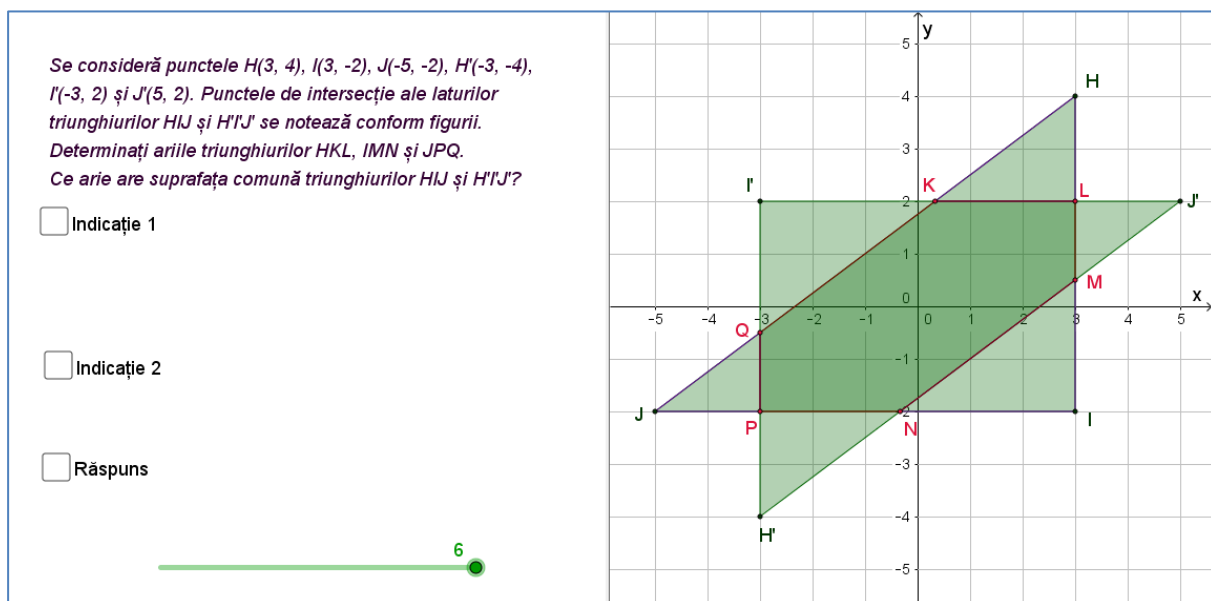
**Figura 42. Problema 5. Paralelogram sau dreptunghi?**

## Simetria axială



**Figura 43. Problema 5. Indicație de rezolvare**

Ultima problemă propune determinarea ariei suprafeței comune unui triunghi dreptunghic și a simetricului său față de origine. Aplicația oferă indicații succesive, și în final, pentru verificare, răspunsul corect (figurile 106-109).



**Figura 44. Problema 6. Aria suprafeței comune**

Simetria axială

Se consideră punctele  $H(3, 4)$ ,  $I(3, -2)$ ,  $J(-5, -2)$ ,  $H'(-3, -4)$ ,  $I'(-3, 2)$  și  $J'(5, 2)$ . Punctele de intersecție ale laturilor triunghiurilor  $HIJ$  și  $H'I'J'$  se notează conform figurii. Determinați ariile triunghiurilor  $HKL$ ,  $IMN$  și  $JPQ$ .  
Ce arie are suprafața comună triunghiurilor  $HIJ$  și  $H'I'J'$ ?

Indicație 1

Calculează aria triunghiului  $HIJ$  și folosește apoi următoarea teoremă: "Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare."

Indicație 2

Răspuns

6

Figura 45. Problema 6. Indicație de rezolvare (1)

Se consideră punctele  $H(3, 4)$ ,  $I(3, -2)$ ,  $J(-5, -2)$ ,  $H'(-3, -4)$ ,  $I'(-3, 2)$  și  $J'(5, 2)$ . Punctele de intersecție ale laturilor triunghiurilor  $HIJ$  și  $H'I'J'$  se notează conform figurii. Determinați ariile triunghiurilor  $HKL$ ,  $IMN$  și  $JPQ$ .  
Ce arie are suprafața comună triunghiurilor  $HIJ$  și  $H'I'J'$ ?

Indicație 1

Calculează aria triunghiului  $HIJ$  și folosește apoi următoarea teoremă: "Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare."

Indicație 2

$$A_{KLMNPQ} = A_{\Delta HIJ} - A_{\Delta HKL} - A_{\Delta IMN} - A_{\Delta JPQ}$$

Răspuns

6

Figura 46. Problema 6. Indicație de rezolvare (2)

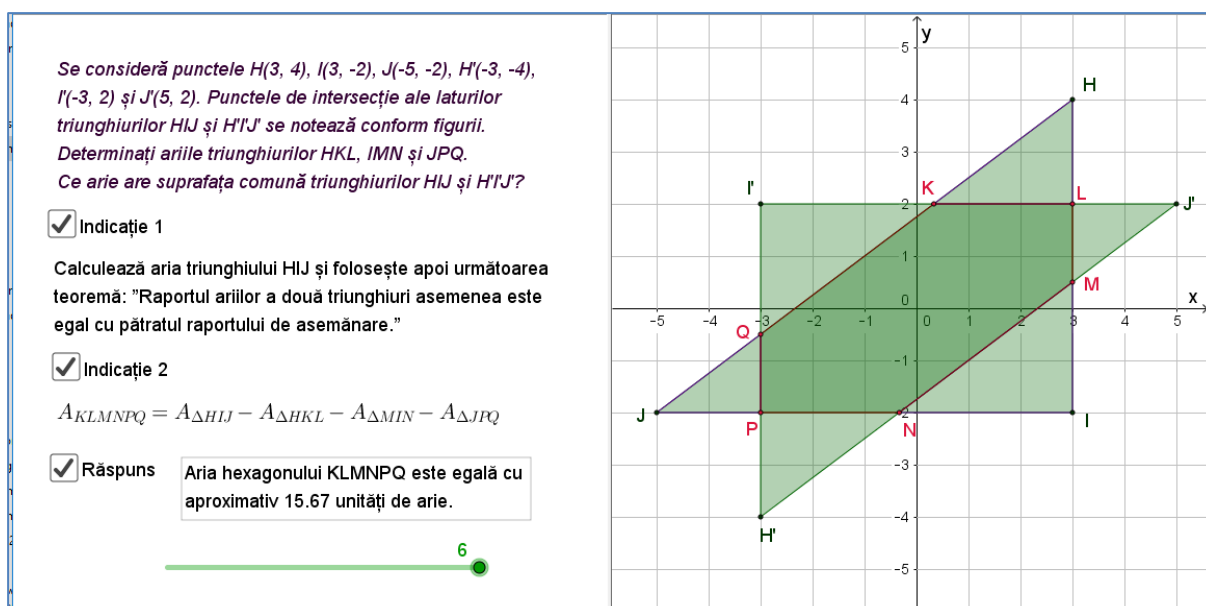


Figura 47. Problema 6. Răspuns

### V.3. Aplicația 9. Joc: Caleidoscopul cu întrebări

<b>Obiectiv</b>	Determinarea unghiului format de două axe de simetrie
<b>Durata în timp pentru utilizarea la clasă</b>	10 min
<b>Descrierea conținutului</b>	În descrierea de mai jos
<b>Reprezentare vizuală a lecției la care se referă aplicația (capturi de ecran)</b>	În descrierea de mai jos
<b>Instrucțiuni de utilizare</b>	În descrierea de mai jos
<b>Tipul de itemi de învățare</b>	Text, Imagini, Simulare, Evaluare

#### Descrierea aplicației "Joc: Caleidoscopul cu întrebări"

Aplicația generează figuri cu  $n$  axe de simetrie. Valoarea numărului  $n$  poate fi modificată cu ajutorul unui cursor (Figura 110). Elevii trebuie să determine valoarea unghiului format de două axe de simetrie consecutive. Răspunsul va fi introdus în caseta de preluare de date. După acționarea tastei *Enter* sau după selectarea unui alt element grafic, aplicația oferă feedback (Figurile 111-112). La fiecare deplasare a cursorului din partea inferioară a panoului explicativ, se generează aleatoriu noi figuri cu  $n$  axe de simetrie. Datorită numărului mare de parametri care se modifică aleatoriu, fiecare figură afișată este practic irepetabilă. Se modifică simultan culoarea, forma,

## Simetria axială

dimensiunile și pozițiile celor 5 triunghiuri, care vor genera, prin simetrie, figura caleidoscopică.

Cu ajutorul cursorului de mai jos poți modifica numărul axelor de simetrie ale figurii.

n = 6

Ce măsură are unghiul format de două axe de simetrie consecutive?

Introdu în casetă răspunsul tău :

Folosește cursorul de mai jos sau acționează butonul "Play" pentru a genera noi figuri.

Figura 48. Interfața jocului "Caleidoscopul cu întrebări"

Cu ajutorul cursorului de mai jos poți modifica numărul axelor de simetrie ale figurii.

n = 6

Ce măsură are unghiul format de două axe de simetrie consecutive?

Introdu în casetă răspunsul tău :

Răspuns corect!

Folosește cursorul de mai jos sau acționează butonul "Play" pentru a genera noi figuri.

Figura 49. Introducerea răspunsului și primirea feedback-ului

## Simetria axială

Cu ajutorul cursorului de mai jos poți modifica numărul axelor de simetrie ale figurii.

$n = 7$

Ce măsură are unghiul format de două axe de simetrie consecutive?

Introdu în casetă răspunsul tău :

**Răspuns corect!**

Folosește cursorul de mai jos sau acționează butonul "Play" pentru a genera noi figuri.

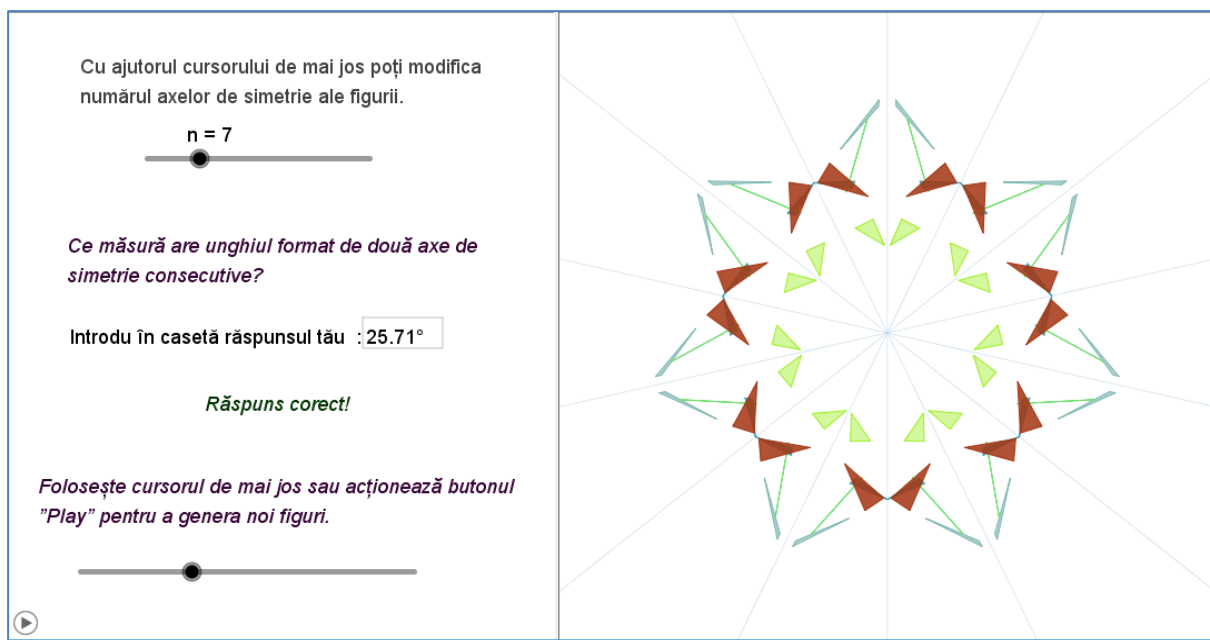
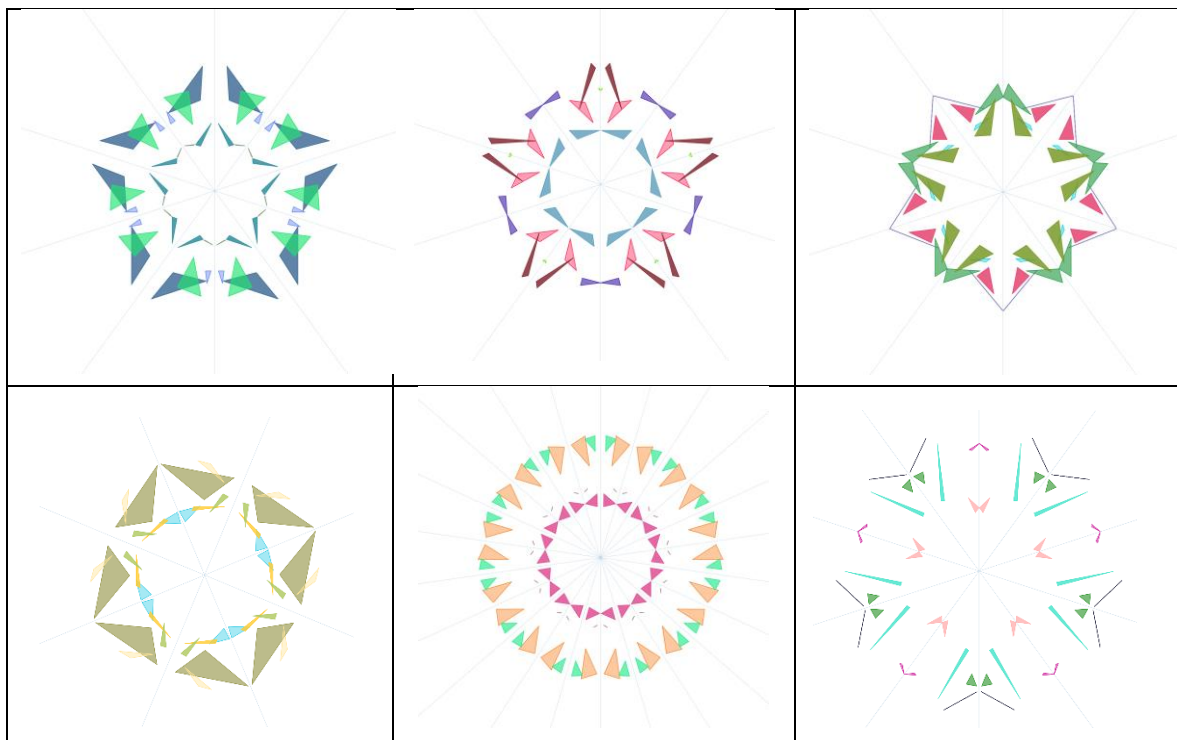
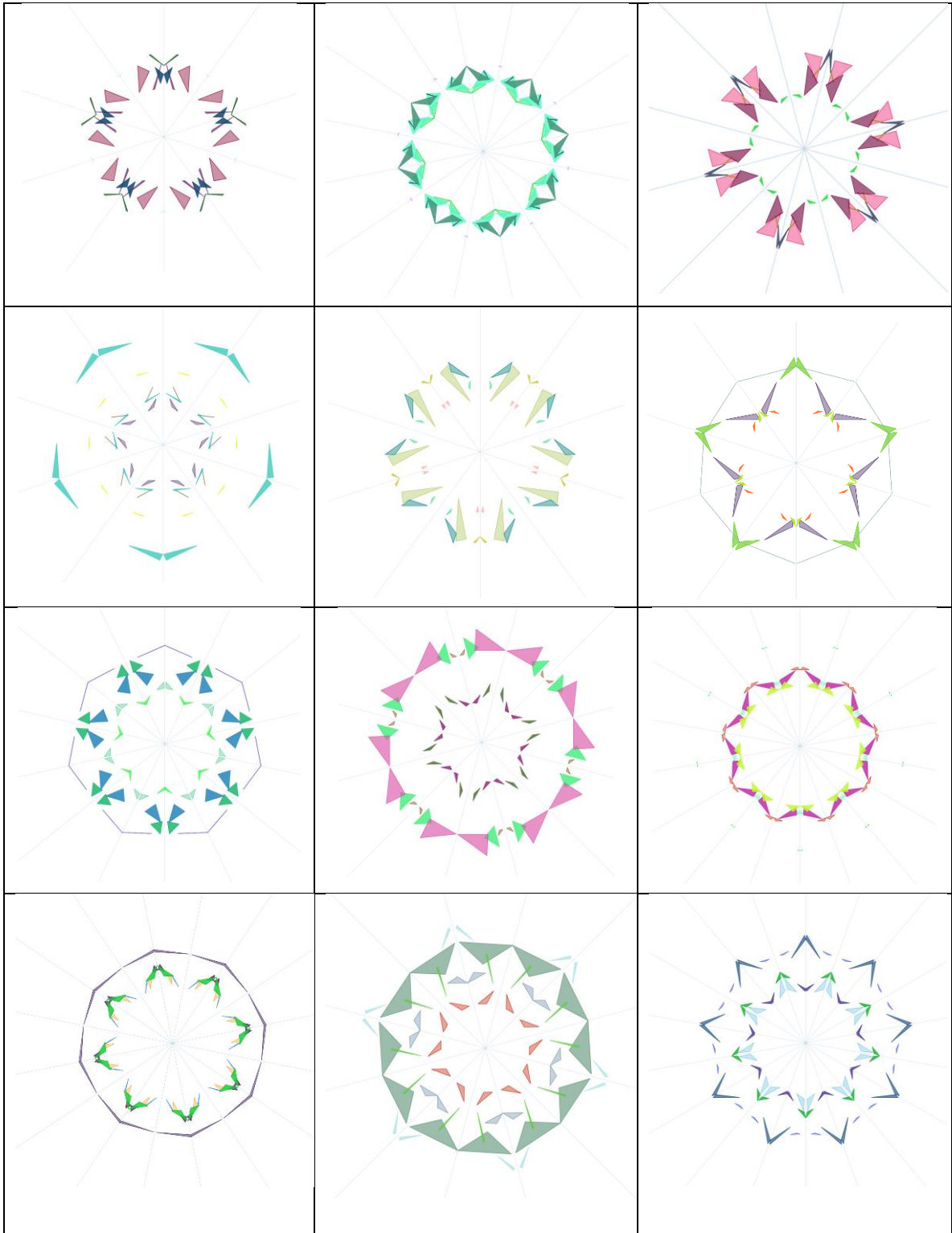


Figura 50. Introducerea răspunsului în formă zecimală

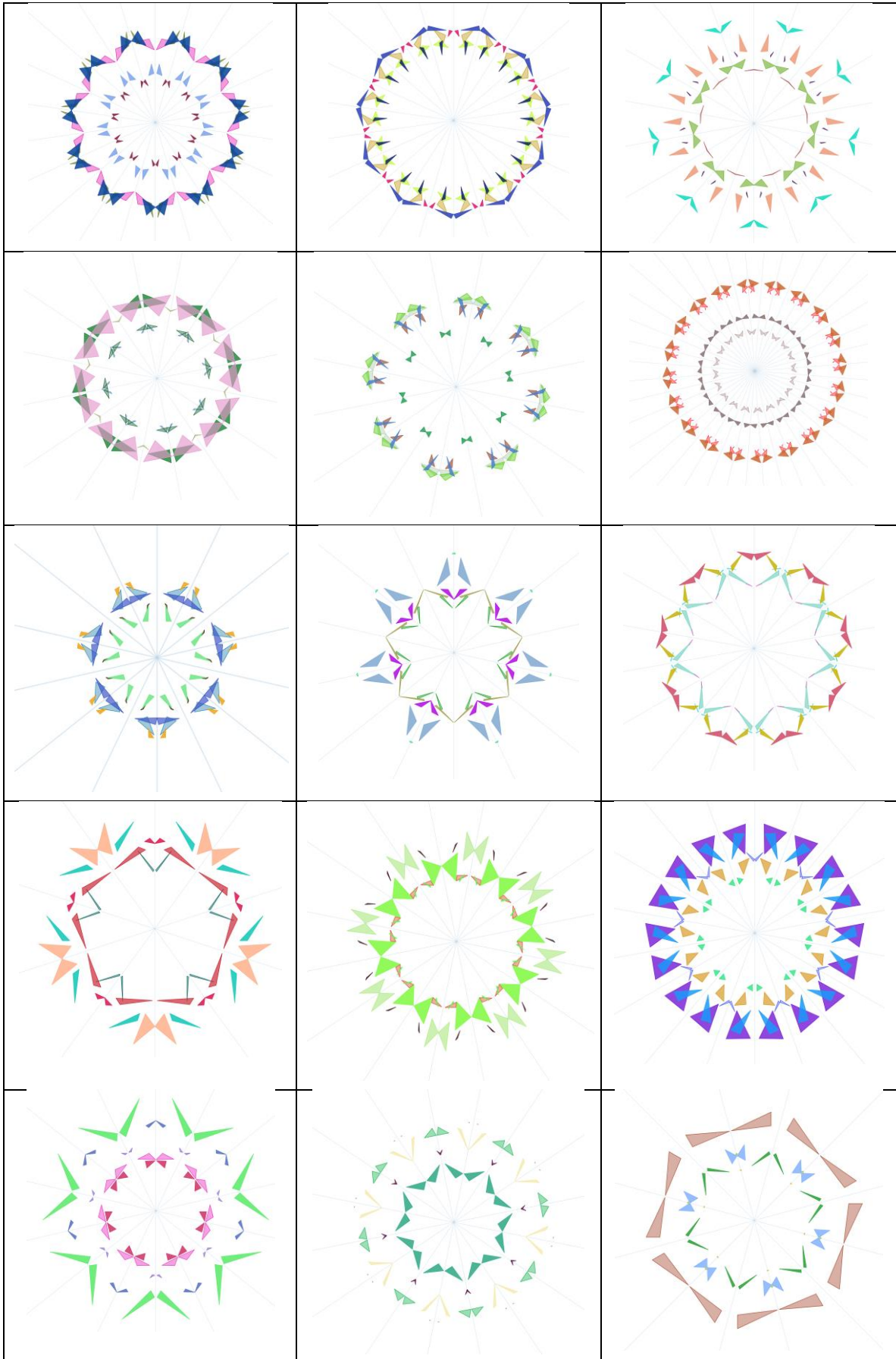
Tabelul următor conține câteva forme generate cu ajutorul aplicației. Aplicația poate fi folosită de profesor în moduri diferite: pentru captarea atenției, drept recompensă, pentru inserarea în lecție a unor momente de relaxare sau pentru unele activități creative, cum ar fi realizarea unor afișe.



*Simetria axială*

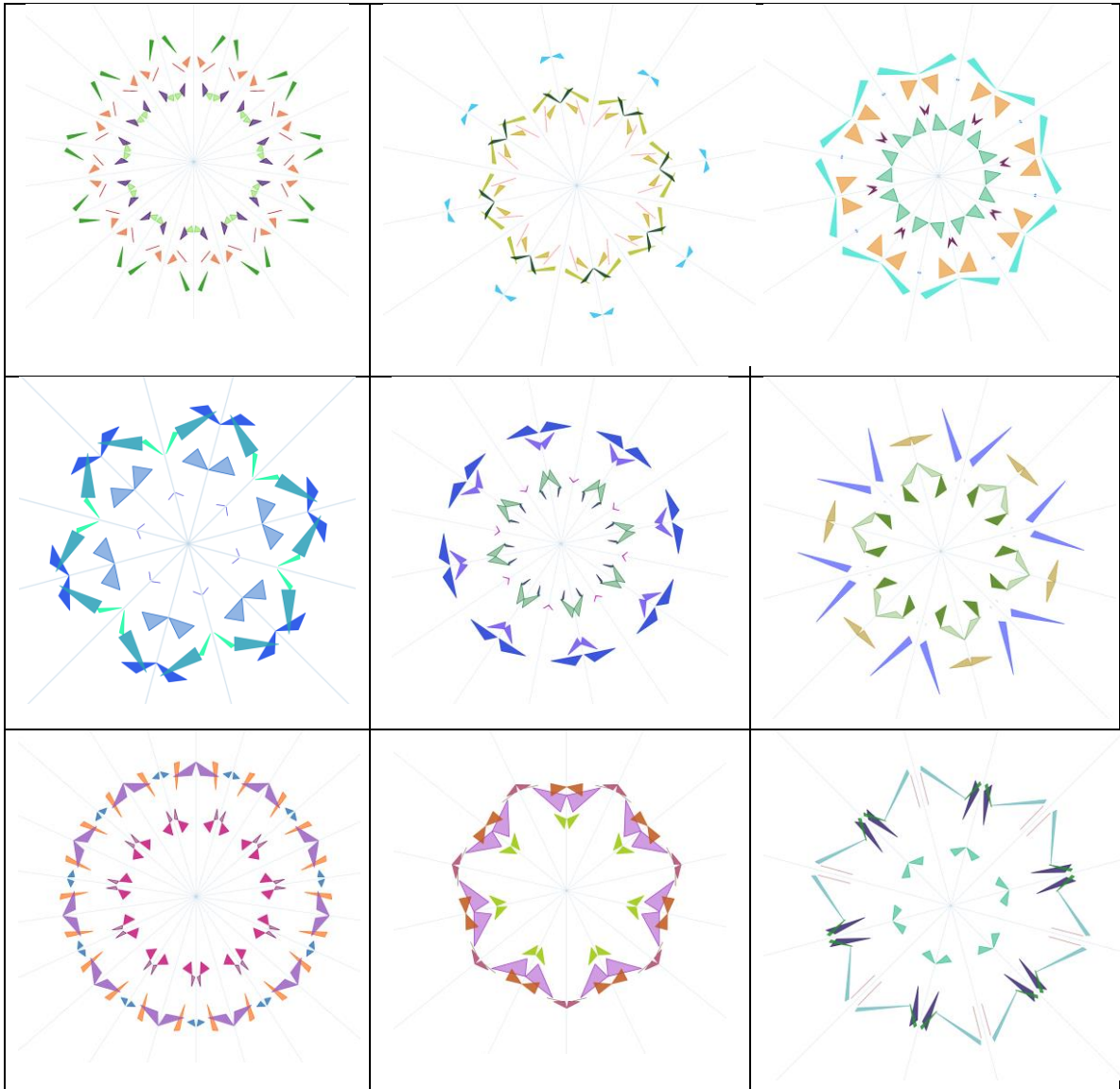


*Simetria axială*





*Simetria axială*



## **VI. REALIZATOR**

---

**Profesor Daly Marciuc** - *Colegiul Național "Mihai Eminescu"* Satu Mare

- ✓ Absolventă a *Facultății de Matematică*, Universitatea din București, 1988
- ✓ Absolventă a Școlii Academice Postuniversitare, Specializarea *Informatică Aplicată și Programare*, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, 2007
- ✓ A urmat Cursul de formare profesională "*Profesorul – creator de soft educațional*", cu premiera la nivel național în cadrul proiectului și participarea la Conferința Internațională *Online Educa Berlin*, 2011
- ✓ Doctorand al Școlii Doctorale de Fizică, Direcția *Fizică Educațională*, Universitatea din București

## **VII. REFERINȚE**

---

- [1] Programa școlară pentru disciplina Matematică, clasele a V-a – a VIII-a, Anexa nr. 2 la ordinul ministrului educației naționale nr. 3393/28.02.2017, Ministerul Educației Naționale
- [2] Programa școlară pentru disciplina Fizică, clasele a VI-a – a VIII-a, Anexa nr. 2 la ordinul ministrului educației naționale nr. 3393/28.02.2017, Ministerul Educației Naționale
- [3] Clark, R. C., & Mayer, R. E. (2016). *E-learning and the science of instruction: Proven guidelines for consumers and designers of multimedia learning*. John Wiley & Sons.
- [4] <https://www.geogebra.org/about>