Euler poliéder tétele

A nyomtatás felfedezésétől tizennyolcadik-tizenkilencedik századig egy-egy munka nyomdába kerülése és megjelenése között sokszor több év is eltelt. Ezért a matematikusok inkább egymásnak írt leveleikben közölték kutatásaik eredményét. 1750 novemberében Euler[1] egy Goldbach[2]nak szóló levelében a síklapokkal határolt testekről (poliéderekről) szólva megemlített néhány igen érdekes összefüggést, melyek közül a legfontosabbat ma Euler-formulaként ismerjük:

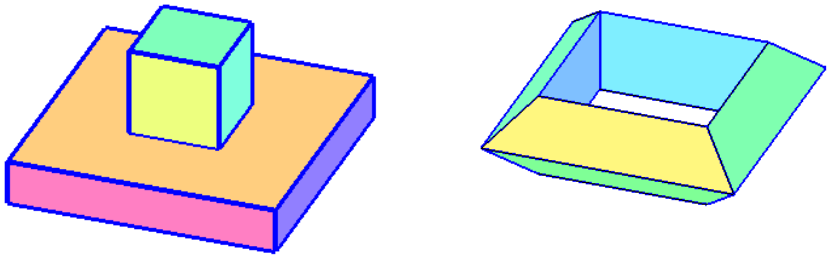
$$L+C-E=2$$

ahol L egy poliéder lapjainak, C a csúcsainak, E az éleinek a számát jelöli. Ezzel a képlettel kapcsolatban ezt írta:

> „*Meglepőnek találtam, hogy tudomásom szerint a térgeometriának ezt az általános tételét eddig még senki nem fedezte fel; továbbá az is meglepő, hogy ez a fontos összefüggés .... olyan nehéz, hogy most még nem találom a kielégítő bizonyítását.*”

Az Euler-féle poliéder-tétel nehézsége éppen abban van, hogy pontosan meg kell(ene) határoznunk azoknak a poliédereknek a körét, amelyekre érvényes ez az összefüggés, valamint azokét, amelyekre nem.

Például egy n oldalú hasábnak $L=n+2$ lapja, $C=2n$ csúcsa, $E=3n$ éle van, így $L+C-E=(n+2)+2n-3n=2$. Vagy egy n oldalú gúlánál $L+C-E=(n+1)+(n+1)-2n=2$. Ugyanakkor az alábbi két poliéderre, már nem igaz az összefüggés.



Ezekre a poliéderekre nem teljesül az Euler-féle $L+C-E=2$ összefüggés

A filozófia tudományelmélettel kapcsolatos kérdései iránt érdeklődő olvasóinknak figyelmébe ajánljuk Lakatos Imre „Bizonyítások és cáfolatok” c. könyvét, ahol az Euler-tételről szóló fiktív beszélgetés formájában – amely egy hallgatag, de mindig a legjobb pillanatban közbeszóló tanár, és néhány igen éles eszű és jó humorú tanítványa között zajlik – ismerkedhetünk meg a tudományos kutatás módszereinek a filozófiai hátterével. Ezekben a fiktív beszélgetésekben épp úgy, mint annak idején az élvonalbeli matematikusok körében, példák, bizonyítások, és egy-egy bizonyítás hiányosságait feltáró ellenpéldák keresésével kristályosodott ki maga a tétel. Itt például Euler tételének tizenhat bizonyítása olvasható.

---

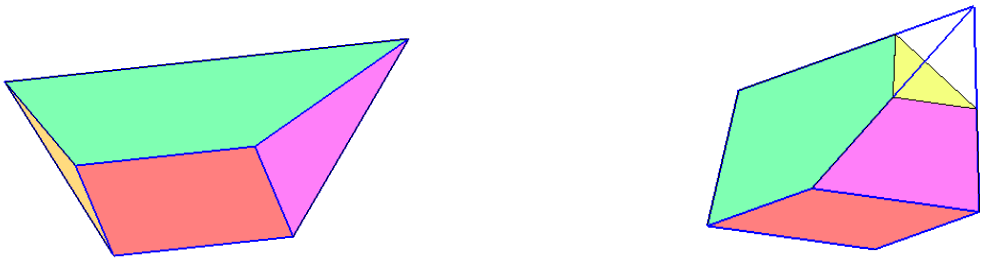
[1] Leonard Euler (1707 -1783) A szentpétervári, később a berlini akadémiának is tagja. A matematika szinte minden területén igen jelentős művekett alkotott. Munkásságát 72 kötetnyi könyvben adták ki, 1911 és 1981 között.

[2] Christian Goldbach (1690-1764) német matematikus. Nevét az utókor amiatt a máig sem bizonyított sejtése miatt örizte meg, miszerint bármely 6-nál nagyobb egész szám felírható legfeljebb három prímszám összegeként. Erről 1742-ben írt Eulernek.

Egyetértünk Lovász Lászlóval aki szerint *„Egy tételt nem azért kell többféleképpen bizonyítani, mert két bizonyítás meggyőzőbb, mint egy, hanem azért, mert minden bizonyítás rámutat a tétel valami olyan kapcsolatára, amire a másik bizonyítás esetleg nem. Ezek a kapcsolatok azok, amelyek a dolog lényegét jelentik.*"

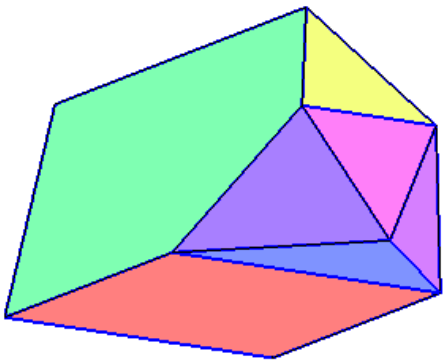
Mi is meg fogjuk ismerni a tétel több bizonyítását. Mielőtt erre rátérnénk, nézzünk néhány olyan „műveletet" amellyel egy adott poliéderből olyan új poliédereket kaphatunk, amelyek nem változtatják meg az eredeti poliéder – *Euler karakterisztikájának* nevezett – $K=L+C-E$ értékét, ahol L, C, E rendre az eredeti poliéder lapjainak, csúcsainak és éleinek a száma.

Az egyik műveletet nevezzük „*csonkolás*"-nak. Ha egy poliédert elmetszünk egy olyan síkkal, amelynek az egyik félterében csak egyetlen (n fokszámú) csúcsa van a poliédernek, akkor az így levágott n oldalú gúlát eltávolítva a maradék poliédernek keletkezett egy új n oldalú lapja, amelyre n új csúcs és n új él illeszkedik, miközben az eredeti poliéder egy csúcsa elveszett. Így: $K'=L+1+C+(-1+n)-(E+n)=K$. Az is megengedhető, hogy a metsző síkra illeszkedjen az eredeti poliéder egy vagy két csúcsa. Ha ezt a műveletet egy konvex poliéderre alkalmazzuk, akkor az új poliéder szükségképpen ugyancsak konvex lesz.



A „csonkolás", amely nem változtatja meg egy poliéder Euler-karakterisztikáját.

Másik műveletünk legyen a „*kiegészítés*". Ha egy poliéder valamelyik lapja egy n oldalú sokszög, akkor ennek a lapjának a helyére illeszthetünk egy n oldalú gúlát. Így 1 -el csökkentettük és n db. új háromszöggel növeltük a poliéder lapjainak a számát. A csúcsok száma 1-el, az élek száma a gúla oldaléleinek a számával, tehát n-el lett több. Így a kapott poliéder Euler-karkterisztikája: $K'=L+(-1+n)+C+1-(E+n)=K$.

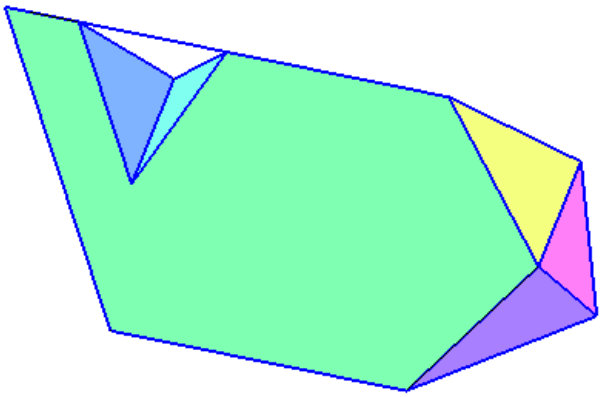


A „kiegészítés" során ugyancsak változatlan marad a poliéder Euler-karaktrisztikája

Ha a „kiegészítés" során a hozzáillesztett gúla magasságát elég kicsire választjuk, akkor elérhető, hogy egy konvex poliéderből ugyancsak konvex poliéder keletkezzék.

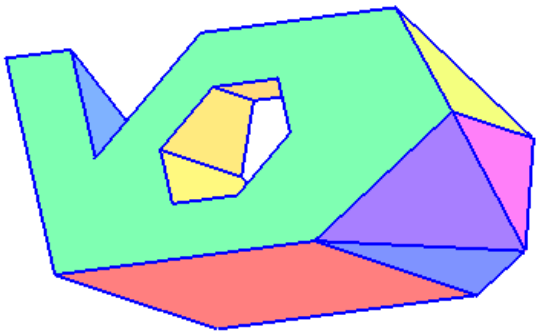
Harmadik műveletünket nevezzük „*bemetszés*nek". Ez lényegében azt jelenti, hogy a poliéder két szomszédos lapjából kimetsszük egy tetraédert. Ezzel két új háromszöglappal, és – amennyiben két részre vágtuk a szomszédos lapok közös élét, akkor négy új csúccsal és hat új

éllel növekedett az eredeti poliéder lapjainak, csúcsainak ill. éleinek a száma: $K'=L+2+C+4-(E+6)=K$. Ezzel az eljárással azonban egy konvex poliéderből egy egyszerű, de szükségképpen konkáv poliédert kaptunk, mivel a két lap, amelynek a közös éle mentén végeztük a bemetszést áthidalóan szomszédossá vált. Emiatt nem létezik vele azonos szerkezetű konvex poliéder. Belátható, hogy ez a „bemetszés" akkor sem változtat a poliéder Euler-karakterisztikáján, ha a bemetszés két pontja nem az él két belső pontja, hanem egyik, vagy mindkettő az él végpontja.



A „bemetszés" nem változtatja meg a poliéder Euler karakterisztikáját.
Keletkezhetnek olyan lapok, áthidalóan szomszédosak.

Végül nevezzük „átfúrásnak" azt a műveletet, amely során egy n oldalú hasábot vágunk ki a poliéderünkből úgy, hogy a metsző hasáb palástján essen kívül az eredeti poliéder összes éle és csúcsa, úgy hogy ez a hasáb két „szemközti" lapból messen ki egy-egy n oldalú sokszöget. Ezzel a kapott poliédernek két lapja körgyűrű-szerűvé válik. Keletkezik a poliédernek n új lapja, $2n$ új csúcsa, $3n$ új éle, így a „leltár egyenlege" továbbra is jó: $K'=L+n+C+2n-(E+3n)=K$. Ha ezt a műveletet egy konvex poliéderre alkalmazzuk, akkor már nem is közönséges poliédert kapuk, hiszen a kapott poliéder élhálózata nem összefüggő, mivel van két körgyűrű-szerű lapja.



Az „átfúrás" nem változtatja meg az Euler karakterisztikát.
Keletkezik két körgyűrű-szerű poliéder lap, így a kapott poliéder közönséges, de biztosan nem egyszerű.

További „Euler-karakterisztika-tartó" műveletek keresését olvasóinkra bízzuk. Már az eddigi műveleteink többszöri alkalmazásával is létre tudjuk hozni a poliédereknek egy igen változatos tárházát, amelyek mindegyikének 2 az Euler-karakterisztikája, ha egy ilyen tulajdonságú poliéderből, pl. hasábból, vagy gúlából indulunk ki.

Így hát le kell tennünk arról – mint ahogy Euler és kortársai is letettek –, hogy meghatározzuk az összes olyan poliéder típust, amelyre $K=L+C-E=2$

Évek hosszú sora, bizonyítások és ellenpéldák súlya alatt kristályosodott ki Euler poliéder-tétele, amely a ma is használatos megfogalmazásában így hangzik:

Tétel (Euler poliédertétele):

> *Bármely egyszerű poliéderre igaz, hogy a lapjainak és csúcsainak a száma 2-vel több, mint az éleinek a száma.*

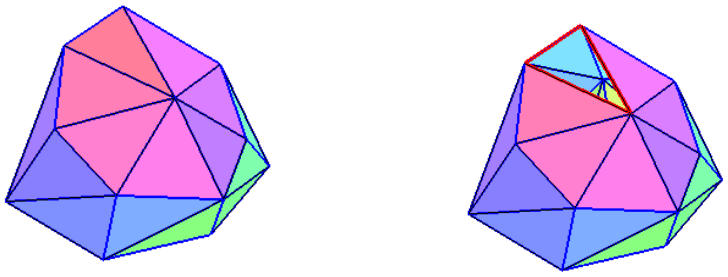
Ugyanez másképpen:

> *Az egyszerű poliéderek Euler-karakterisztikája kettő. Azaz* $K= L+C- E=2$

Az említett levél keletkezésénél egy évvel később született meg Euler bizonyítása. Ebben Euler arra törekedett, hogy egyre kevesebb lappal rendelkező poliéderre vezessen vissza minden poliédert, míg végül olyanhoz jut, amelyre nyilvánvaló az állítás. Hamarosan kiderült, hogy lehet olyan poliédert találni, amelynél nem működik ez az egyszerűsítés. Az első korrekt bizonyítást Legendre[3] adta. Bizonyítása – amely nem túl egyszerű – azon alapszik, hogy a poliédert kivetítette egy belső pontjából egy gömbre, majd az azon keletkező szögek közötti összefüggésekkel igazolta a tételt.

Mi most Cauchy bizonyításával fogunk megismerkedni, amely viszont egy igazi gyöngyszem. Kevés matematikai apparátust használ, és – reméljük – igen könnyen érthető.

> Tekintsünk egy tetszőleges egyszerű poliédert. A $K=L+C-E$ érték meghatározása szempontjából elegendő a poliéder szerkezetét vizsgálnunk, a poliéder metrikus adatai nem befolyásolják a vizsgálatunkat. Így pl. lényegtelen, hogy a poliéder valamely élén találkozó két lap egy síkban van-e, vagy sem.
>
> Ha a tekintett poliédernek valamely lapját két részre osztjuk egy átlóval, akkor ezzel a művelettel eggyel növeltük a poliéder lapjainak, és ugyancsak eggyel az éleinek a számát. Mivel a lapok és élek a $K=L+C-E$ képletben ellenkező előjellel szerepelnek, ezért nem változik a poliéder K karakterisztikájának az értéke, ha a poliéder minden lapját átlókkal háromszögekre bontjuk, és ezeket az átlókat is a poliéder éleinek tekintjük. Így elegendő olyan poliéderekre igazolnunk a tételt, amelynek minden lapja háromszög.
>
> Vegyünk el a poliéderfelületből egy (háromszög) lapot. Az így kapott háromszögekből álló alakzatnak (amely már nem osztja két részre a teret, tehát nem poliéder) $K'=K-1$ a karakterisztikája, mivel 1-el kevesebb lapja van, miközben az élek és a csúcsok száma nem változott. Ezzel a művelettel keletkezett a felületnek egy háromszögvonalból álló „széle”.



Egy háromszögekre bontott (triangulált) egyszerű poliéder, és egy felület, amelynek egy lapja hiányzik, (így ez már nem tekinthető poliédernek).

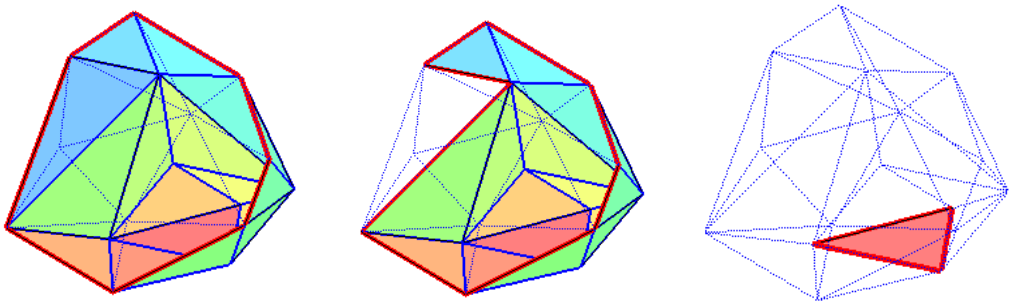
[3] Adrien Marie Legendre (1752-1833) francia matematikus. Nevét inkább a párhuzamossági axiómával kapcsolatos vizsgálatai miatt jegyezte meg az utókor.

A „széléről szedve” rendre távolítsuk el a felületnek a lapjait, ügyelve arra, hogy az alakzat széle mindig egy (térbeli) egyszerű sokszögvonal maradjon. Ezt kétféleképpen tehetjük meg:

- ha annak a háromszögnek, amelyet éppen el akarunk venni egy éle tartozik az alakzat széléhez, akkor ezt elvéve a lapok száma és az élek száma eggyel csökken, a csúcsok száma nem változik;

-ha az eltávolítandó háromszögnek két éle tartozik az alakzat széléhez, akkor ennek a lapnak az eltávolításával a lapok száma eggyel, a csúcsok száma 1-gyel, az élek száma viszont 2-vel csökken.

A *K’* értke egyik esetben sem változik, mivel *E* előjele ellentétes, *L* és *C* előjeléhez képest.



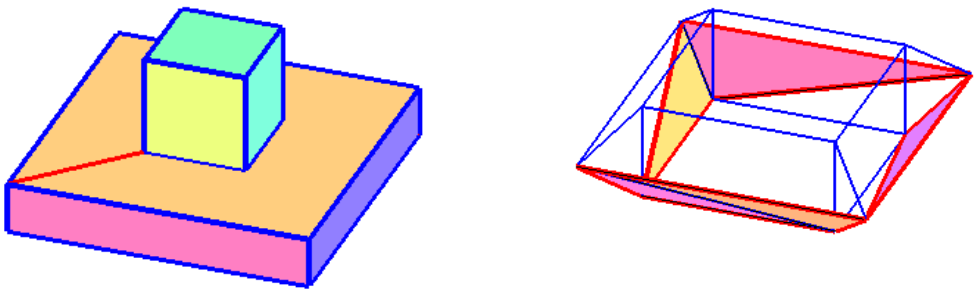
A felület Euler-karakterisztikája nem változik,
ha a „széléről szedve” egyenként távolítjuk el a lapjait.

Végül egyetlen háromszögünk marad, amelynek *L=1* lapja *C=3* csúcsa és *E=3* éle van, így K’=*1+3-3=1*.

Mivel *K’=K-1 =1* volt, így *K=2*. Ezt akartuk igazolni.

Végül – bár ez nem tartozik a tétel igazolásához – vizsgáljuk meg, hogy hol akadna el ez a bizonyítás, ha az ellenpéldáinkra próbálnánk alkalmazni.

Abban az esetben, ha van a poliédernek egy körgyűrű-szerű lapja, ami nem egyszerű sokszög, akkor ennek a lapnak a háromszögeke bontásakor nem minden átló behúzásával válik ketté a lap. Ha pedig a poliéder minden lapja egyszerű sokszög, de maga a poliéder egy toroid, akkor a háromszögeket rendre „szabályszerűen” elvéve végül egy háromszögekből álló zárt „lánc” marad, és nem egyetlen háromszöglap.



Poliéderek, melyekre nem alkalmazható az Euler-tétel Cauchy-féle bizonyítása

Tekintsük át, hogy egyszerű poliéderek lapjainak, csúcsainak és éleinek a száma között az Euler-féle összefüggésen túlmenően milyen összefüggések írhatók még fel.

Mivel egy poliéder minden lapjának és minden csúcsának legalább három a fokszáma, érvényes a $3L \le 2E$ és az $3C \le 2E$ egyenlőtlenség. Ezeket Euler-tételével összevetve kapjuk, hogy:

$$\frac{L}{2} + 2 \le C \le 2L - 4 \text{ és ugyanígy: } \frac{C}{2} + 2 \le L \le 2C - 4$$

Euler tételéből az is adódik, hogy bármely egyszerű poliédernek vagy van háromszög lapja, vagy van háromélű testszöglete. Ha ugyanis nem lenne, akkor annak is teljesülnie kellene, hogy $2E = 4L_4 + 5L_5 + ...nL_n \ge 4L_4 + 4L_5 + ...4L_n \ge 4L$,ahol $L_4, L_5, ...L_n$ rendre a *4, 5, ... n* oldalú lapok számát jelenti. Hasonlóan: $2E \ge 4C$ amely egyenlőtlenségeket Euler-tételével összevetve azt kapnánk, hogy $\frac{E}{2} + \frac{E}{2} \ge L + C = E + 2$, ami viszont lehetetlen. Ez persze csak az egyszerű poliéderek körében érvényes megállapítás, az ellenpéldaként használt toroidnak minden csúcsa és minden lapja 4 fokszámú. Az is könnyen belátható – amit Euler említett is a már idézett levelében – , hogy szerkezetét tekintve egyetlen hat élű, és egy nyolc élű poliéder létezik (a tetraéder és a négyszög alapú gúla), hét élű poliéder viszont nincs.