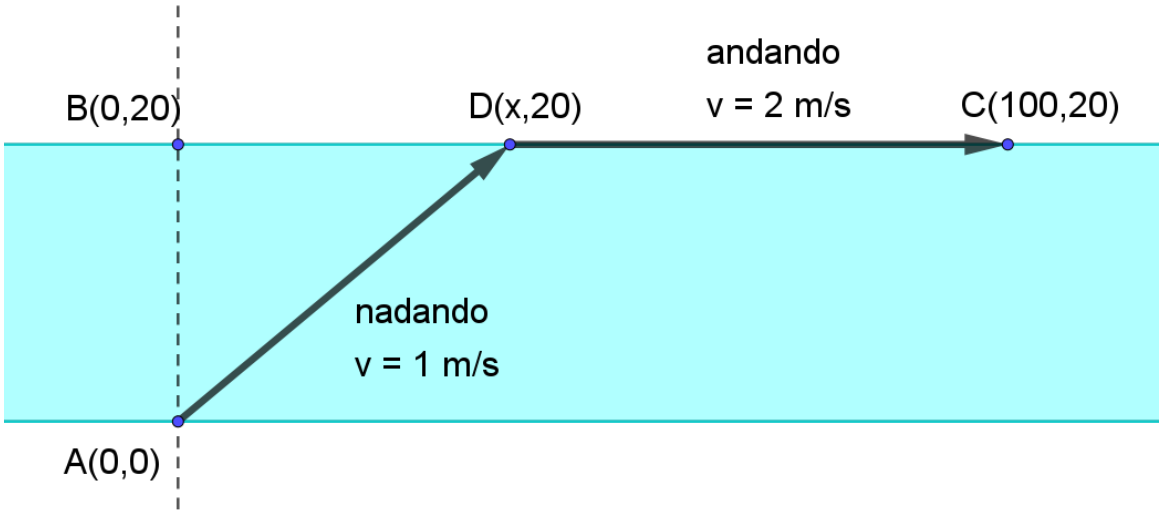
Problemas tipo Selectividad con enunciado contextualizado y/o con pregunta conceptual

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
2ºBach Mates II	Tema 3: Ampliación derivabilidad	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Un joven se sitúa en el punto A en una orilla de un río de 20 metros de ancho. Sea B el punto de la orilla opuesta justo enfrente de A. El joven desea llegar a un punto C situado a 100 metros de B, en la orilla opuesta de A. Para ello, puede cruzar a nado desde A hasta un cierto punto D situado entre B y C a una velocidad de 1 m/s. Luego, puede continuar a pie de D a C a una velocidad de 2 m/s. ¿A qué distancia debe estar el punto D de B para que el joven llegue de A a C en el menor tiempo posible?

Un dibujo esquemático, en dos dimensiones, nos ayuda mucho a entender el problema. Es muy recomendable dar coordenadas en el plano a los puntos A, B, C y D.



Asumimos que el río no lleva corriente, por lo que no afecta el módulo de la velocidad final a nado. Y suponemos movimientos rectilíneos uniformes, con velocidad constante.

La velocidad media es igual al espacio recorrido entre el tiempo empleado. Por lo tanto:

$$t_{total} = t_{nadando} + t_{caminando}$$

$$t_{total} = \frac{espacio_{nadando}}{velocidad_{nadando}} + \frac{espacio_{caminando}}{velocidad_{caminando}}$$

El espacio recorrido nadando se obtiene con la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por los puntos ABD. La altura del triángulo es 20 metros y la anchura es x.

La altura y la anchura son los catetos del triángulo rectángulo. Por lo tanto:

$$espacio_{nadando} = +\sqrt{20^2 + x^2}$$

El espacio recorrido caminando es la distancia que separa los puntos D y C, que están alineados en la misma recta horizontal.

$$espacio_{caminando} = 100 - x$$

Conocemos las velocidades en cada tramo. En consecuencia:

$$t_{total} = \frac{\sqrt{400 + x^2}}{1} + \frac{100 - x}{2}$$

Esta es la función a minimizar. Su dominio es toda la recta real, poque el discriminante de la raíz siempre es una cantidad positiva. Nos centraremos en los valores de $x \geq 0$ ya que, por el contexto, necesitamos que el nadador se acerque (y no se aleje) del punto final C.

Además, por el contexto, no tiene sentido una distancia horizontal mayor a 100. Por lo que podemos acotar el dominio al intervalo cerrado $[0, 100]$.

$$t' = \frac{2x}{2\sqrt{400 + x^2}} - \frac{1}{2} \rightarrow t' = \frac{x}{\sqrt{400 + x^2}} - \frac{1}{2} \rightarrow t' = \frac{2x - \sqrt{400 + x^2}}{2\sqrt{400 + x^2}}$$

$$t' = 0 \rightarrow 2x - \sqrt{400 + x^2} = 0 \rightarrow 2x = \sqrt{400 + x^2}$$

Elevamos ambos miembros al cuadrado.

$$4x^2 = 400 + x^2 \rightarrow 3x^2 = 400 \rightarrow x = +\frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11{,}55\ m \rightarrow punto\ crítico$$

Como hemos indicado, nos quedamos solo con los valores mayores o iguales a cero en el estudio de los extremos relativos.

Miramos el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

$$\left[0, \frac{20\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow t'(1) < 0 \rightarrow t(x)\ estrictamente\ decreciente$$

$$\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}, 100\right] \rightarrow t' > 0 \rightarrow t(x)\ estrictamente\ creciente$$

El valor $x = +\frac{20\sqrt{3}}{3}$ minimiza el tiempo. Al ser el único extremo relativo en el intervalo de definición, tenemos garantizado que también será mínimo absoluto.

Conclusión de distancias:

$$\overline{DB} = x = \frac{20\sqrt{3}}{3}\ metros$$

PROBLEMA 2

Se han realizado varios estudios para determinar el modo en que se transmiten los bulos en cierta red social. Un primer estudio ha establecido que el número (aproximado) de personas $f(t)$ (expresado en miles) que conocen y difunden un bulo viene dado por la función:

$$f(t) = \frac{18}{1 + 2^{-t+3}}$$

donde t representa el tiempo (en días).

a) Según este modelo, ¿cuántas personas empiezan a difundir el bulo?

b) A medida que transcurre el tiempo, ¿está limitado el número de personas que conocen el bulo? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite y por qué?

c) En un segundo estudio, han simplificado el modelo anterior y han establecido que el número (aproximado) de personas g(t) (expresado en miles) que conocen y difunden un bulo viene dado por la función:

$$g(t) = \frac{18}{\pi}\, arctg(t-3) + 9$$

donde t representa el tiempo (en días).

Según este segundo modelo, ¿en qué momento empieza a disminuir la velocidad a la que se propaga el bulo? ¿Cuántas personas conocen en dicho momento el bulo?

a) El número inicial de personas se conoce con la imagen de la función en el tiempo inicial t=0.

$$f(0) = \frac{18}{1 + 2^{-0+3}} = \frac{18}{9} = 2 \ \rightarrow 2.000\ personas$$

b) El comportamiento de la función en el infinito nos ofrece información sobre si la imagen de la función está acotada, o si crece de manera indefinida.

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{18}{1 + 2^{-t+3}} = evaluar = \frac{18}{1 + 2^{-\infty}} = \frac{18}{1+0} = 18$$

Existe AH en $y = 18$. Por lo que la función nunca alcanza la cota superior de 18.000 personas, por mucho tiempo que pase desde el inicio del bulo.

c) La función arcotangente es continua en toda la recta real. No obstante, nos interesa el comportamiento de la función para $t \geq 0$.

¡Ojo! La velocidad de propagación es la derivada de la función que determina el número de personas que conocen el bulo. Por lo tanto, no nos están pidiendo estudiar la monotonía de $g(t)$; están pidiendo estudiar la monotonía de $g'(t)$.

Si una función da la imagen de un valor, la derivada de esa función da la velocidad con que cambia la imagen. Y estudiar cuándo disminuye la velocidad implica estudiar la monotonía de la función derivada.

$$g'(t) = \frac{18}{\pi}\frac{1}{1+(t-3)^2} \rightarrow a\ la\ derivada\ de\ g(t)\ la\ llamamos\ h(t) = \frac{18}{\pi}\frac{1}{1+(t-3)^2}$$

Y ahora estudiamos la monotonía de $h(t)$. El dominio de h(t) también es oda la recta real, porque el denominador siempre es positivo y, por lo tanto, nunca se anula.

$$h'(t) = \frac{18}{\pi} \cdot \frac{-2(t-3)}{[1+(t-3)^2]^2} \rightarrow h'(t) = 0 \rightarrow -36(t-3) = 0 \rightarrow t = 3\, punto\ crítico$$

Miramos el signo de la derivada en los siguientes intervalos (consideramos tiempos mayores o iguales que cero).

$$[0,3) \rightarrow h'(1) > 0 \rightarrow h(t)\ estrictamente\ creciente$$

$$(3,\infty) \rightarrow h'(4) < 0 \rightarrow h(t)\ estrictamente\ decreciente$$

Conclusión: $t = 3\, horas$ es un máximo relativo de la función derivada de $g(t)$. Por lo que el máximo de la velocidad de propagación se alcanza en $t = 3\, horas$. A partir de ese tiempo, la velocidad de propagación disminuye. Y en ese momento, el número de personas que conocen el bulo se obtiene con la imagen de la función original.

$$g(3) = \frac{18}{\pi}\, arctg(3-3) + 9 = 0 + 9 = 9 \rightarrow 9.000\, personas$$

PROBLEMA 3

El número de moléculas en una placa de ensayo viene dado por la función $f(x) = e^{x^2-2x}$ expresado en miles de moléculas, donde $x\epsilon[0,5]$ indica el tiempo en horas.

a) Realiza el estudio del crecimiento de dicha función. ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima? ¿En qué momento se alcanzan?

b) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento a las tres horas? ¿Cuál es la velocidad media de crecimiento en el intervalo [0,5]?

a) El dominio de la función es toda la recta real, por ser el exponente de la exponencial un polinomio.

$f'(x) = e^{x^2-2x} \cdot (2x-2) \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 1 \in [0,5]$

Evaluamos la derivada a la izquierda y a la derecha del punto crítico.

$$[0,1) \rightarrow f'(0,5) < 0 \rightarrow f(x)\ estrictamente\ decreciente$$

$$(1,5] \rightarrow f'(4) > 0 \rightarrow f(x)\ estrictamente\ creciente$$

En $x = 1$ encontramos un mínimo relativo. Para responder a la pregunta debemos comparar la imagen del mínimo relativo con las imágenes de los puntos de inicio y final del intervalo.

$$f(0) = e^0 = 1 \rightarrow 1.000\ moléculas$$

$$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37 \rightarrow 370\ moléculas$$

$$f(5) = e^{15} \rightarrow 1000 \cdot e^{15}\ moléculas$$

El mínimo absoluto se alcanza en el mínimo relativo $x = 1$. Mientras que el máximo absoluto se alcanza en el punto de cierre del intervalo $x = 5$.

b) ¡Ojo! La velocidad de crecimiento es la derivada de la función original. Cuando tenemos una función que devuelve la imagen de lo que sea (distancia, número de personas, concentración de una sustancia, etc.), la derivada de la función ofrece la velocidad de crecimiento de la función original.

$$f'(x) = e^{x^2-2x} \cdot (2x-2)$$

$$f'(3) = e^3 \cdot (2 \cdot 3 - 2) = 80{,}34 \rightarrow velocidad\ instantánea\ de\ 80.340\ moléculas\ por\ hora$$

La velocidad media, como estudiamos en 1ºBach al introducir el concepto de derivada, es una aplicación de la Tasa de Variación Media de la función en un intervalo $[a,b]$.

$$TVM = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$TVM = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{e^{15} - 1.000}{5} \approx 653.603{,}47$$

La velocidad media es de aproximadamente $653.603.470$ moléculas por hora.

PROBLEMA 4

Una firma de alta perfumería pretende sacar al mercado un frasco de un perfume exclusivo que contenga 12 mL de esencia pura más una cantidad variable x de alcohol.

El precio de la esencia pura es de 48 euros el mililitro. Al añadir alcohol a la esencia, el precio de la mezcla resultante disminuye. Sabiendo que por cada mililitro de alcohol añadido el precio del mililitro de mezcla se reduce 3 euros, se pide determinar el valor de x para el que se obtiene el frasco de perfume (mezcla) de precio máximo. Indicar en ese caso el precio resultante.

$$x: mililitro\ de\ alcohol\ que\ se\ añade\ a\ la\ mezcla$$
$$Volumen\ de\ la\ mezcla: 12 + x$$
$$Precio\ por\ mililitro: 48 - 3x$$
$$Precio\ de\ la\ mezcla: Volumen \times Precio\ por\ unidad\ de\ volumen \rightarrow P = (12 + x) \cdot (48 - 3x)$$

La función a maximizar es el precio. Su dominio es toda la recta real, por ser un polinomio. Por el contexto del enunciado, la variable x no puede ser negativa.

$$P(x) = (12 + x) \cdot (48 - 3x)$$
$$P(x) = 576 - 36x + 48x - 3x^2$$
$$P(x) = -3x^2 + 12x + 576$$

La condición necesaria de extremo relativo, implica anular la primera derivada.

$$P'(x) = -6x + 12 \rightarrow P'(x) = 0 \rightarrow -6x + 12 = 0 \rightarrow x = 2\ (punto\ crítico)$$

La condición suficiente de extremo relativo nos pide evaluar el punto crítico en la segunda derivada.

$$P''(x) = -6 \rightarrow P''(2) = -6 < 0 \rightarrow el\ punto\ crítico\ es\ un\ máximo\ relativo$$

Por ser el único extremo relativo en el dominio, también será máximo absoluto.

El precio se maximiza para $x = 2\ mililitros$ de alcohol. Por lo que el volumen de la mezcla será: $12 + 2 = 14\ mililitros$.

El coste máximo es la imagen de la función precio, evaluada en el extremo relativo:

$$P(2) = -3(2)^2 + 12(2) + 576 = 588\ euros$$

PROBLEMA 5

Sea la función:

$$f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$$

Con ayuda del estudio del crecimiento de la función, con ayuda de la detección de los extremos relativos y con ayuda del Teorema de Bolzano, justifica de manera razonada cuántas veces corta la gráfica de la función al eje horizontal.

La función es polinómica. Su dominio es toda la recta real.

El crecimiento se estudia mirando el signo de la derivada.

$$f'(x) = 12x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 12x^3 + 3x^2 = 0 \rightarrow 3x^2(4x+1) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{4}, x = 0 \ (puntos\ críticos)$$

Evaluamos la derivada en los siguientes intervalos:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \rightarrow f'(-10) < 0 \rightarrow f(x)\ estrictamente\ decreciente$$

$$\left(-\frac{1}{4}, 0\right) \rightarrow f'(-0.1) > 0 \rightarrow f(x)\ estrictamente\ creciente$$

$$(0, \infty) \rightarrow f'(10) > 0 \rightarrow f(x)\ estrictamente\ creciente$$

Conclusión: en $x = -\frac{1}{4}$ aparece un mínimo relativo, mientras que en $x = 0$ tenemos un punto de inflexión. Sacamos las imágenes de estas abscisas.

$$f(-1/4) = 3(-1/4)^4 + (-1/4)^3 - 1 = -1.0039 \rightarrow A\ (-1/4, -1.0039) \rightarrow por\ debajo\ del\ eje\ OX$$

$$f(0) = 3(0)^4 + (0)^3 - 1 = -1 \rightarrow B\ (0, -1) \rightarrow imagen\ por\ debajo\ del\ eje\ horizontal$$

La función, al ser estrictamente decreciente a la izquierda de $x = -\frac{1}{4}$, y al ser la imagen $f(-1/4)$ negativa, seguro que corta una sola vez al eje horizontal a la izquierda de $x = -\frac{1}{4}$. Haciendo uso del Teorema de Bolzano:

$$f(x)\ continua\ en\ [-10, -\frac{1}{4}]$$

$$f(-10) > 0$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) < 0$$

$$f(-10) \cdot f\left(-\frac{1}{4}\right) < 0$$

$$\exists c \in \left(-10, -\frac{1}{4}\right) \ / \ f(c) = 0$$

Hemos demostrado la existencia de un primer punto de corte con el eje horizontal.

Aplicando el mismo razonamiento, vemos que la función es estrictamente creciente a la derecha de $x = -\frac{1}{4}$. Y como la imagen de $f(-1/4)$ es negativa, seguro que hay un solo punto de corte a la derecha de $x = -\frac{1}{4}$. Por Bolzano:

$$f(x)\ continua\ en\ [-\frac{1}{4}, 10]$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) < 0$$

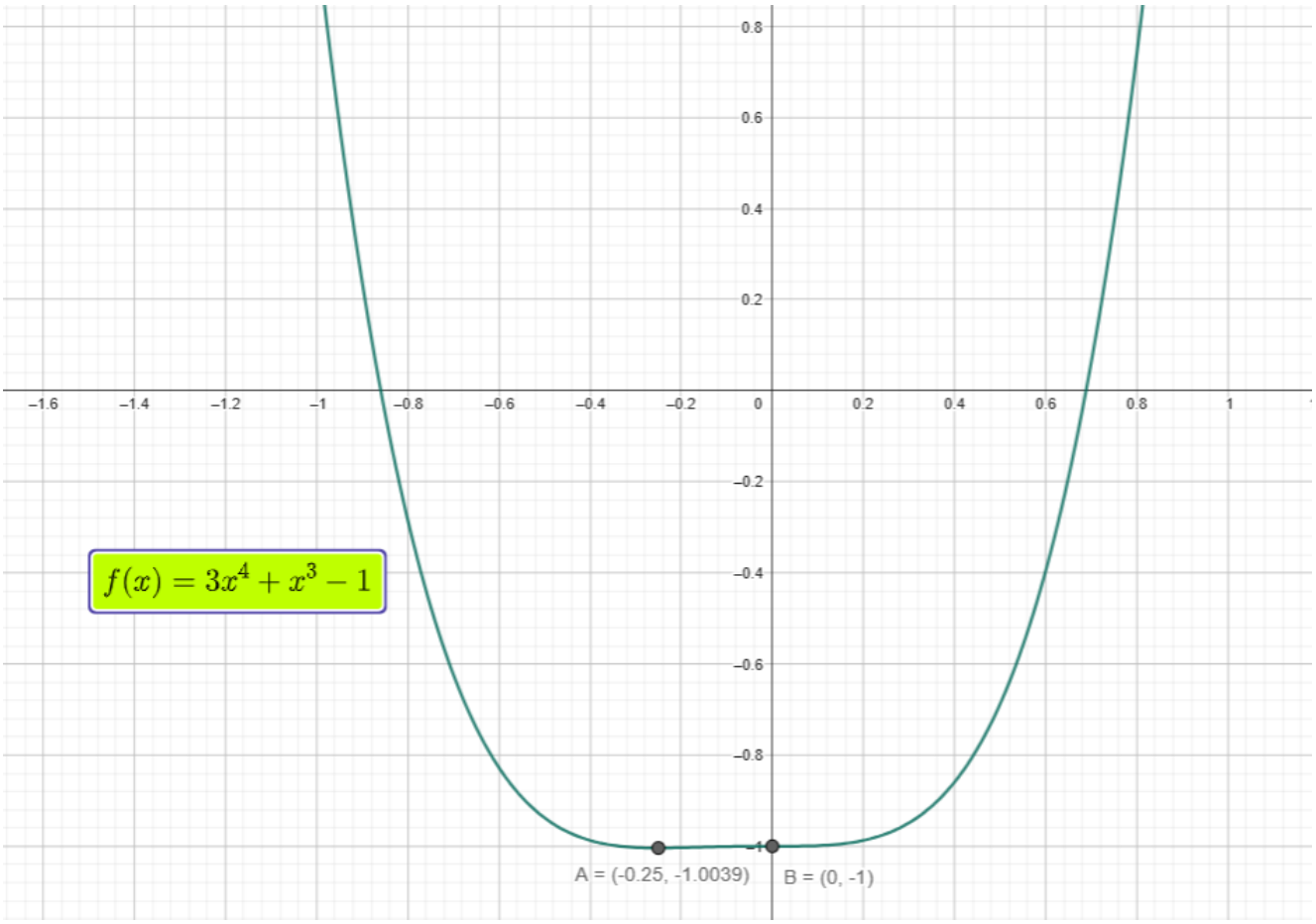
$$f(10) > 0$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot f(10) < 0$$

$$\exists d \in \left(-\frac{1}{4}, 10\right) \ / \ f(d) = 0$$

Problemas tipo Selectividad con enunciado de contexto y con pregunta conceptual
Es decir, aparece un segundo punto de corte con el eje horizontal.

La gráfica dibujada con Geogebra confirma la existencia de dos puntos de corte con ele de abscisas.



PROBLEMA 6

Sean las funciones $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b$ y $g(x) = -2x^3 + c$.

Obtener los parámetros a, b y c para que las gráficas de ambas funciones se corten en el punto $P(1,1)$ y para que en dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes a ambas funciones.

Ambas gráficas tienen imagen igual a 1 cuando la variable independiente vale 1.

$$f(1) = 1 \rightarrow 2 + a + b = 1 \rightarrow a + b = -1$$

$$g(1) = 1 \rightarrow -2 + c = 1 \rightarrow c = 3$$

Si la pendiente de las rectas tangentes coincide en $x = 1$, por la interpretación geométrica de la derivada, la derivada de ambas funciones en $x = 1$ debe coincidir.

$$f'(x) = 8x^3 + 2ax \rightarrow f'(1) = 8 + 2a$$

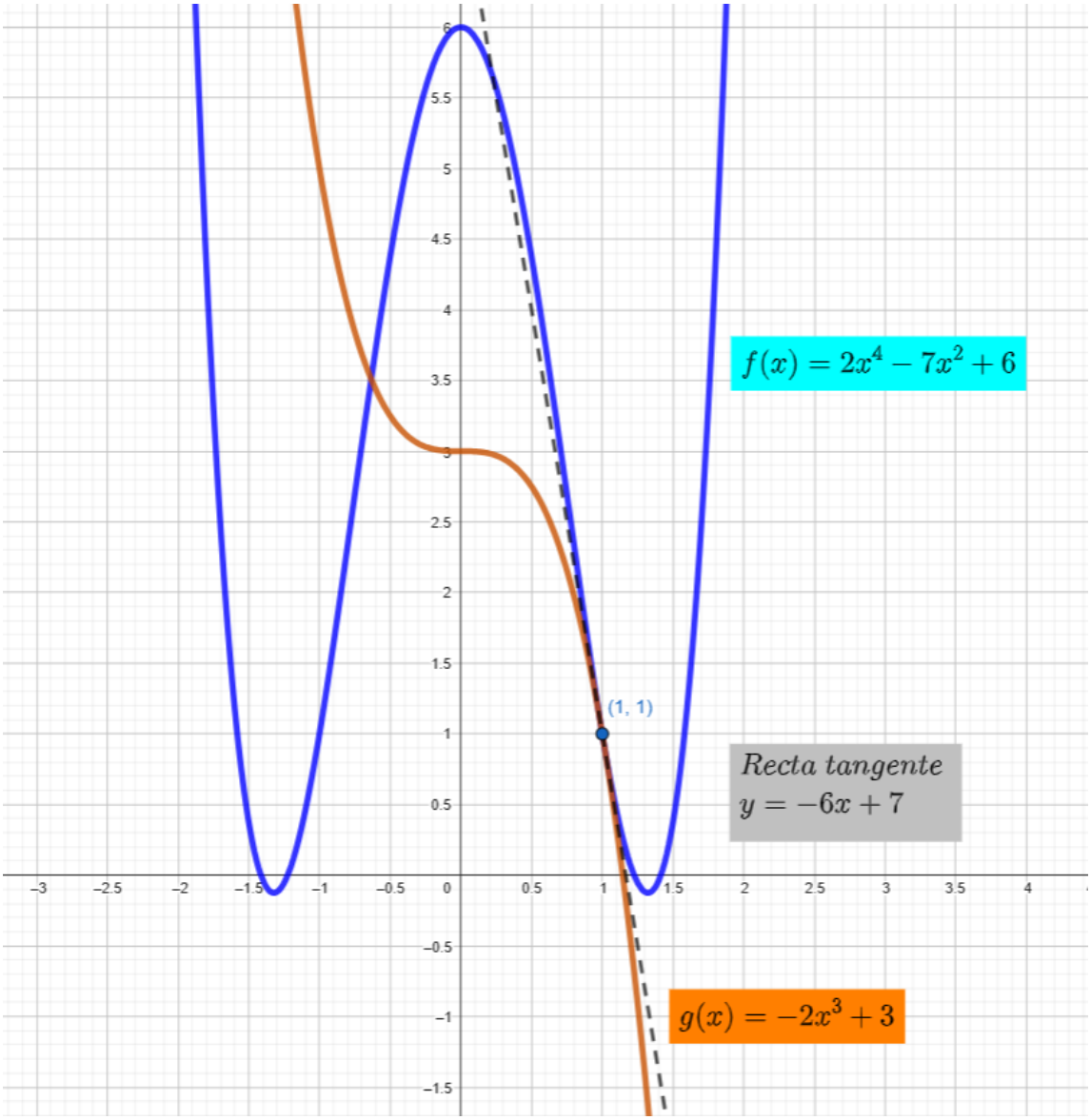
$$g'(x) = -6x^2 \rightarrow g'(1) = -6$$

$$f'(1) = g'(1) \rightarrow 8 + 2a = -6 \rightarrow 2a = -14 \rightarrow a = -7$$

Finalmente:

$$a + b = -1 \rightarrow -7 + b = -1 \rightarrow b = 6$$

Las gráficas de ambas funciones dibujadas con Geogebra confirma nuestros resultados.



PROBLEMA 7

Realiza la derivada de $f(x) = [cos(x)]^{5x}$ (derivada logarítmica).

El razonamiento de la derivada logarítmica es el siguiente: como tenemos una función elevada a otra función, es recomendable aplicar primero logaritmo en ambos lados de la igualdad y después derivar de manera implícita, porque los cálculos se facilitan bastante.

$$f(x) = [\cos(x)]^{5x}$$

Aplicamos logaritmo en ambos miembros de la igualdad.

$$\ln[f(x)] = \ln\,[[\cos(x)]^{5x}]$$

Aplicamos propiedades de los logaritmos.

$$\ln[f(x)] = 5x \cdot \ln\,[\cos\,(x)]$$

Derivamos en ambos lados (en la izquierda, de forma implícita; en la derecha, aplicando la derivada del producto).

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 5 \cdot \ln[\cos(x)] + 5x \cdot \frac{-sen(x)}{\cos\,(x)}$$

Pasamos $f(x)$ multiplicando a la derecha.

$$f'(x) = 5 \cdot \ln[\cos(x)] \cdot f(x) + 5x \cdot \frac{-sen(x)}{\cos\,(x)} \cdot f(x)$$

Y hacemos uso de la expresión para $f(x)$ que da el enunciado del ejercicio.

$$f'(x) = 5 \cdot \ln[\cos(x)] \cdot [\cos(x)]^{5x} + 5x \cdot \frac{-sen(x)}{\cos\,(x)} \cdot [\cos(x)]^{5x}$$

Podemos reordenar para sacar una regla práctica a la hora de derivar una función elevada a otra función.

$$f'(x) = [\cos(x)]^{5x} \cdot 5 \cdot \ln[\cos(x)] + 5x \cdot [\cos(x)]^{5x-1} \cdot (-sen(x))$$

El primer término sería "como la derivada de una exponencial": queda la propia exponencial multiplicada por la derivada del exponente y por el logaritmo neperiano de la base de la exponencial.

El segundo término sería "como la derivada de una potencia": baja el exponente multiplicando, por la base de la potencia elevada al exponente menos uno, y por la derivada de la base.

Es decir, si tenemos:

$$y = f(x)^{g(x)}$$

Su regla de derivación quedaría:

$$y' = f(x)^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln[f(x)] + g(x) \cdot f(x)^{g(x)-1} \cdot f'(x)$$

PROBLEMA 8

Estudia la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función.

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}|x| & \boldsymbol{si}\ \ x<1\\ x\cdot e^{x-1} & \boldsymbol{si}\ \ x\geq 1\end{cases}}$$

En primer lugar, rompemos el valor absoluto.

$$f(x)=\begin{cases}-x\ \ si\ x<0\\ x\ \ si\ 0\leq x<1\\ x\cdot e^{x-1}\ \ si\ x\geq 1\end{cases}$$

En los intervalos abiertos tenemos polinomios o producto de polinomio por exponencial. Por lo tanto, en los intervalos abiertos $(-\infty,0),(0,1),(1,\infty)$ la función es continua y derivable.

Estudiamos los puntos frontera.

$$Continuidad\ para\ x=0$$
$$f(0)=0$$
$$L^-=-0=0$$
$$L^+=0$$
$$L^-=L^+=L=0$$
$$f(0)=L$$
$$f(x)\ es\ continua\ en\ x=0$$

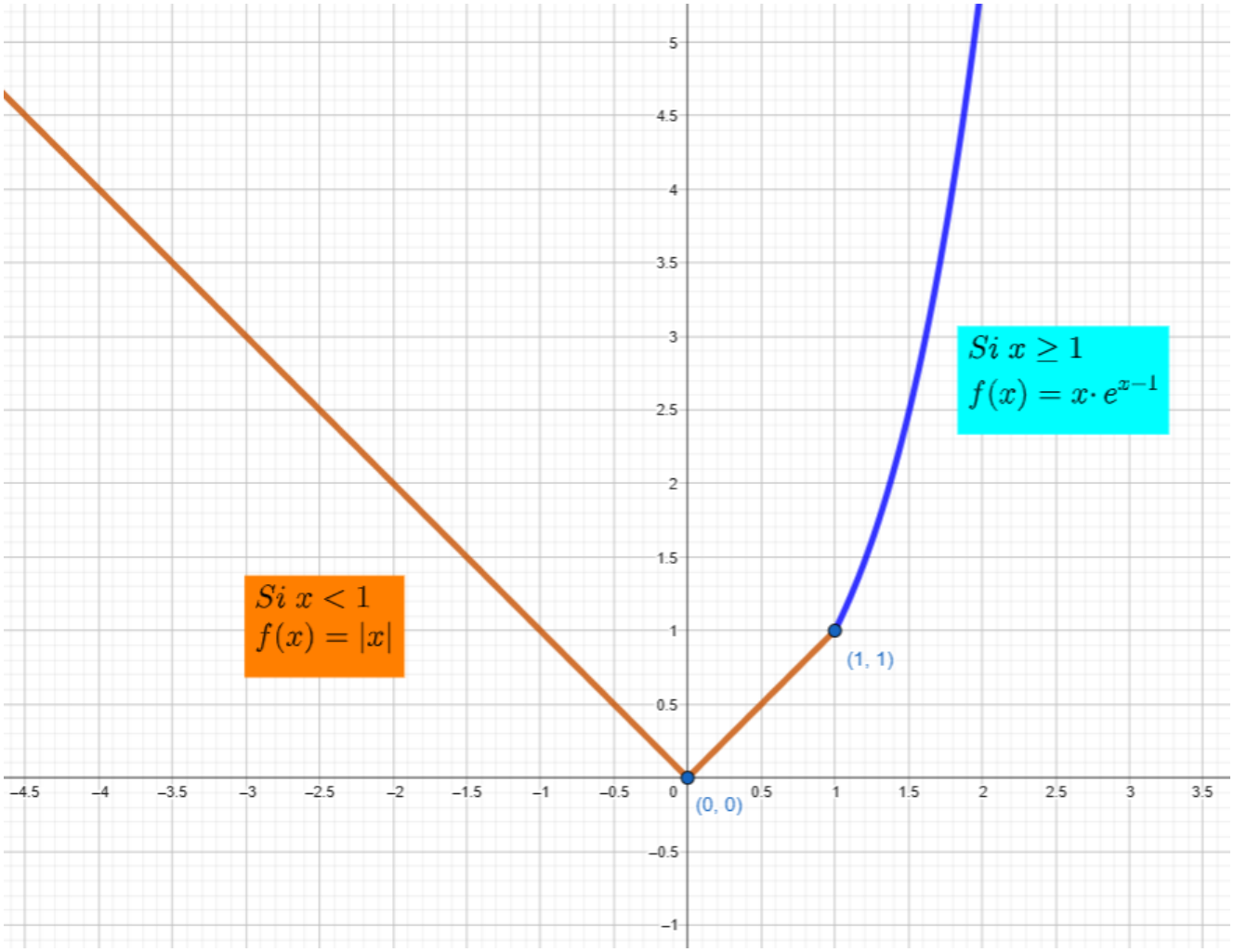
$$Continuidad\ para\ x=1$$
$$f(1)=1$$
$$L^-=1$$
$$L^+=1$$
$$L^-=L^+=L=1$$
$$f(1)=L$$
$$f(x)\ es\ continua\ en\ x=1$$

$$f'(x)=\begin{cases}-1\ \ si\ x<0\\ 1\ si\ 0<x<1\\ e^{x-1}+x\cdot e^{x-1}\ \ si\ x>1\end{cases}$$

$$Suavidad\ para\ x=0$$
$$f'(0^-)=-1$$
$$f'(0^+)=1$$
$$f'(0^-)\neq f'(0^+)$$
$$f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x=0\ (punto\ anguloso)$$

$$Suavidad\ para\ x=1$$
$$f'(1^-)=1$$
$$f'(1^+)=2$$
$$f'(0^-)\neq f'(0^+)$$
$$f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x=1\ (punto\ anguloso)$$

Problemas tipo Selectividad con enunciado de contexto y con pregunta conceptual
La gráfica con Geogebra muestra sendos puntos angulosos en los puntos frontera.

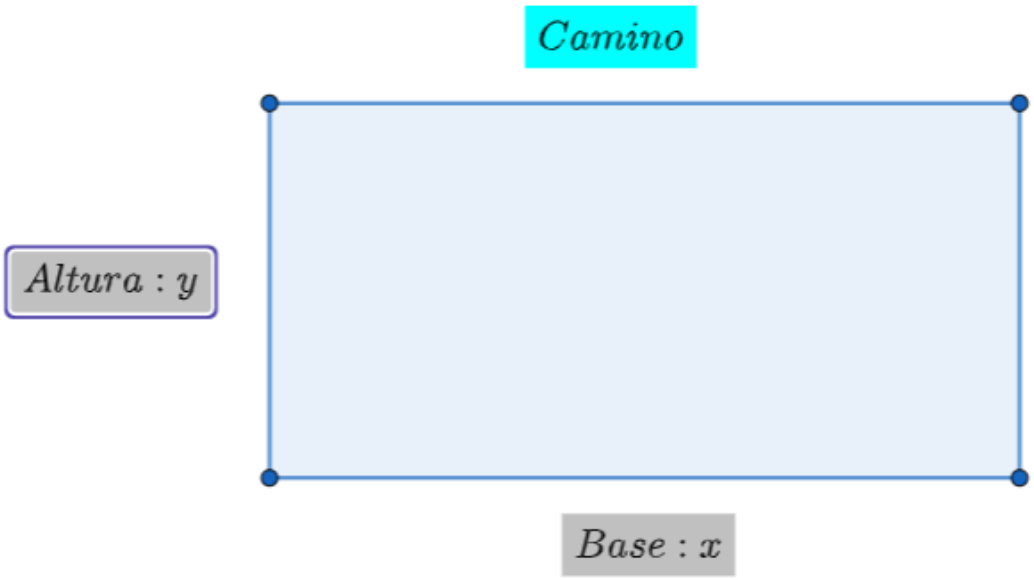


PROBLEMA 9

Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino.

Si la valla del lado del camino cuesta 80€/m, y la de los otros 10€/m, halla el área del mayor campo que puede cerrarse con 28.800€.

El área de un rectángulo es base por altura. Llamemos x a la base. Llamemos y a la altura. Supongamos que el camino discurre junto al campo tal y como muestra la imagen (en términos matemáticos, da igual quien sea la base y quien sea la altura; y da igual si el camino es paralelo a la base o paralelo a la altura).



Los tres lados que no están junto al camino, el metro lineal de valla cuesta 10 euros. Solo el lado que está junto al camino, el metro lineal cuesta 80 euros. La suma del coste debe ser igual a 28.800 euros.

$$10x + 80x + 10y + 10y = 28.800\ euros$$

$$90x + 20y = 28.800$$

$$9x + 2y = 2.880 \rightarrow ecuación\ de\ ligadura \rightarrow y = 1.440 - \frac{9}{2}x$$

La función a optimizar es el área:

$$A = x \cdot y \rightarrow A = x \cdot \left(1.440 - \frac{9}{2}x\right) \rightarrow A = 1.440x - \frac{9}{2}x^2$$

El dominio de la función es toda la recta real, por ser un polinomio.

Derivamos para sacar los puntos críticos.

$$A' = 1.440 - 9x \rightarrow A' = 0 \rightarrow 1.440 - 9x = 0 \rightarrow x = 160\ (punto\ crítico)$$

Aplicamos condición suficiente de extremo relativo.

$$A'' = -9 \rightarrow A''(160) = -9 < 0 \rightarrow x = 160\ metros\ es\ un\ máximo\ relativo$$

Al ser el único extremo relativo de la función, seguro que también será máximo absoluto.

$$y = 1.440 - \frac{9}{2}x \rightarrow y = 1.440 - \frac{9}{2} \cdot 160 \rightarrow y = 720\ metros$$

El área máxima se corresponde con:

$$A = 160 \cdot 720 = 115.200\ m^2$$

PROBLEMA 10

Sea la función:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$$

a) Estudia si es par o impar.

b) Estudia su derivabilidad en el punto x=1.

c) Estudia sus extremos relativos y absolutos.

a) La función es par, porque:

$$f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2-1)^2} \rightarrow f(-x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} \rightarrow f(x) = f(-x)$$

Por lo tanto, su gráfica es simétrica respecto al eje vertical. Valores opuestos de la variable independiente tienen la misma imagen.

b) En una raíz cúbica, el discriminante puede ser negativo. Por lo tanto, la raíz cúbica no impone restricciones al dominio. Dentro del discriminante encontramos un polinomio, por lo que la función es continua en toda la recta real.

Ojo con la derivabilidad. Fíjate.

Sabemos que una función es derivable en su dominio si la función derivada es continua. Calculemos la derivada de la función. Podemos hacerlo como una potencia:

$$f(x) = (x^2-1)^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot(x^2-1)^{\frac{2}{3}-1}\cdot(2x) \rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}\cdot x\cdot(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}\cdot\frac{x}{(x^2-1)^{1/3}}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3}\cdot\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

¿Qué podemos ver en la expresión de la función derivada?

Aparece una fracción. Y el denominador se hace cero en $x = \pm 1$. Por lo tanto, la función derivada no está definida en $x = \pm 1$. Por lo que la función original $f(x)$ es derivable en toda la recta real salvo en $x = \pm 1$.

Estos puntos deberemos tenerlos en cuenta en el siguiente apartado, al estudiar los extremos relativos, si usamos la condición suficiente de la recta real para determinar si tenemos máximo o mínimo relativo.

c) Los candidatos a extremo relativo son los puntos que anulan la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{4}{3}\cdot\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0\ (punto\ crítico)$$

Para ver el signo de la derivada en el dominio, ¡OJO! Debemos tener en cuenta que hay dos puntos que pertenecen al dominio… pero no pertenecen a la derivada. Por lo que eso puntos los debemos tener en cuenta a la hora de formar intervalos donde mirar el signo de la derivada.

$$(-\infty,-1) \rightarrow f'(-10) < 0 \rightarrow f(x)\ estrictamente\ decreciente$$
$$(-1,0) \rightarrow f'(-0{,}5) > 0 \rightarrow f(x)\ estrictamente\ creciente$$
$$(0,1) \rightarrow f'(0{,}5) < 0 \rightarrow f(x)\ estrictamente\ decreciente$$
$$(1,\infty) \rightarrow f'(10) < 0 \rightarrow f(x)\ estrictamente\ decreciente$$

El comportamiento del crecimiento en los intervalos es coherente con el hecho de que la función sea par, y sea por lo tanto simétrica respecto al aje de abscisas,

En $x = 0$ aparece un extremo relativo. ¡OJO! En $x = \pm 1$ no hay extremo relativo porque la función no es derivable en esos puntos.

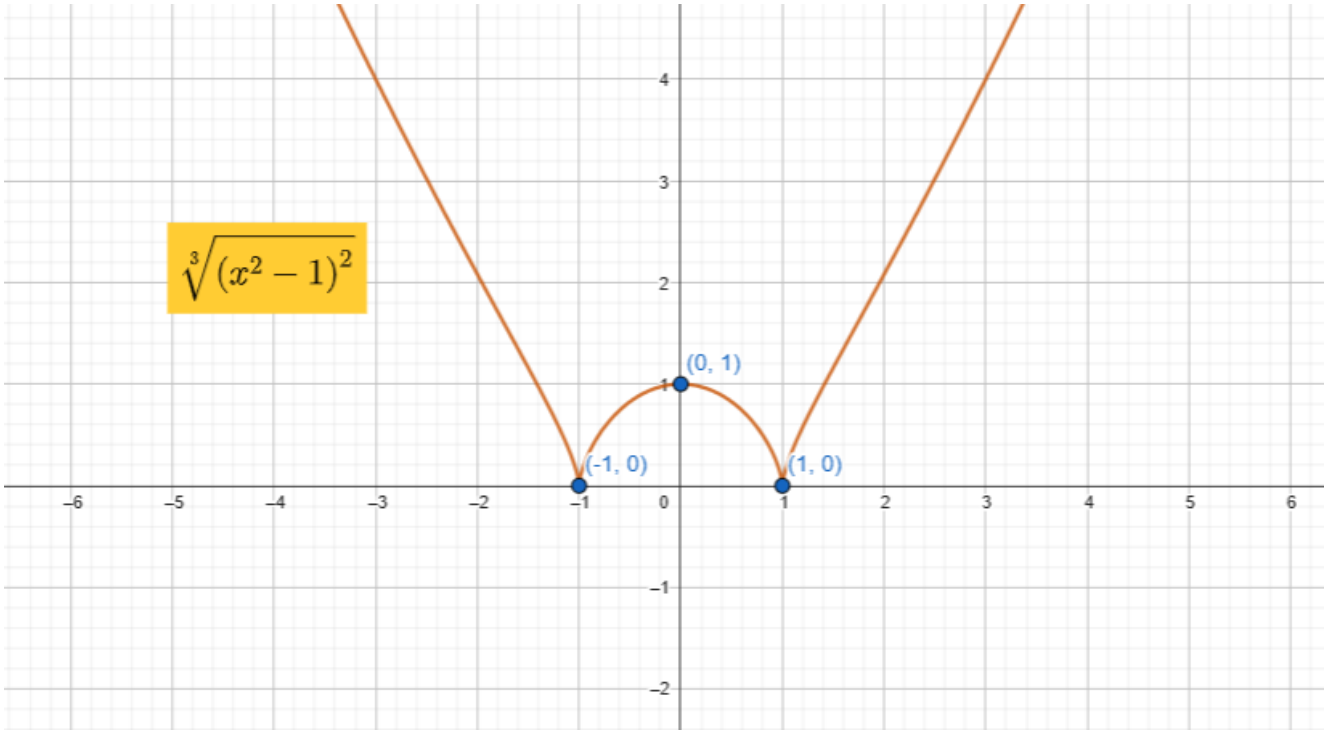
Problemas tipo Selectividad con enunciado de contexto y con pregunta conceptual
Para estudiar los extremos absolutos, debemos estudiar la imagen de la función en el máximo relativo y realizar un boceto. Nos ayudará conocer la imagen en los puntos donde la función no es derivable pero sí es continua, porque a la izquierda y a la derecha de esos puntos hay un cambio en el crecimiento. Y eso puede provocar que sean extremos absolutos, aunque no sean extremos relativos por no existir la derivada en esos puntos.

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$$
$$x = 0 \to f(0) = 1$$
$$x = -1 \to f(-1) = 0$$
$$x = 1 \to f(1) = 0$$

En $x = \pm 1$ no hay extremos relativos, pero sí hay extremos absolutos (puntos angulosos).

En $x = 0$ no hay máximo absoluto porque la función es decreciente a la izquierda de $x = -1$ y creciente a la derecha de $x = 1$.

Todo esto se comprende perfectamente viendo la gráfica (que se puede estimar a mano, a manera de boceto, con los cálculos que hemos realizado en los distintos apartados).



PROBLEMA 11

En una habitación se ha dejado una bebida caliente. Su temperatura T(t) en grados Celsius se puede modelar por la función $T(t)=\frac{90+20t}{t+1}$, donde $t \geq 0$ representa el tiempo en segundos.

a) En relación a la función $T(t)$, indica su dominio, intervalos de crecimiento e intervalos de concavidad, posibles extremos y posibles asíntotas. Esboza la gráfica de dicha función.

b) Indica, justificando tu respuesta, cuál era la temperatura inicial que tenía la bebida, describe cómo ha evolucionado su temperatura y cuál sería la hipotética temperatura final que alcanzaría. ¿A qué temperatura está la habitación?

a) El dominio de la función son todos los reales menos los valores que anulan al denominador, por ser un cociente de polinomios. El denominador se anula en $t=-1$.

Como la variable independiente no está definida en valores negativos, podemos afirmar que el dominio temporal de la función es $[0,+\infty)$.

En un cociente de polinomios del mismo grado, tendremos AH. En efecto:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{90+20t}{t+1}=evaluar=\frac{\infty}{\infty}\to T=20\ A.H.$$

Para resolver la indeterminación podemos aplicar L'Hôpital, o dividir todo por la máxima potencia (x), o bien dividir los coeficientes que multiplican a la máxima potencia (20 entre 1) por ser un cociente de polinomios del mismo grado.

Si hay AH no tendremos AO.

$$T'=\frac{20(t+1)-(90+20t)\cdot 1}{(t+1)^2}\to T'=\frac{20t+20-90-20t}{(t+1)^2}\to T'=\frac{-70}{(t+1)^2}$$

La primera derivada nunca se anula. Por lo que no tenemos extremos relativos. Para estudiar el crecimiento, evaluamos la derivada en cualquier punto del dominio.

$$T'(10)<0\to función\ estrictamente\ decreciente\ en\ todo\ su\ dominio$$

$$T''=-70\cdot\frac{-2\cdot(t+1)}{(t+1)^4}\to T''=\frac{140}{(t+1)^3}$$

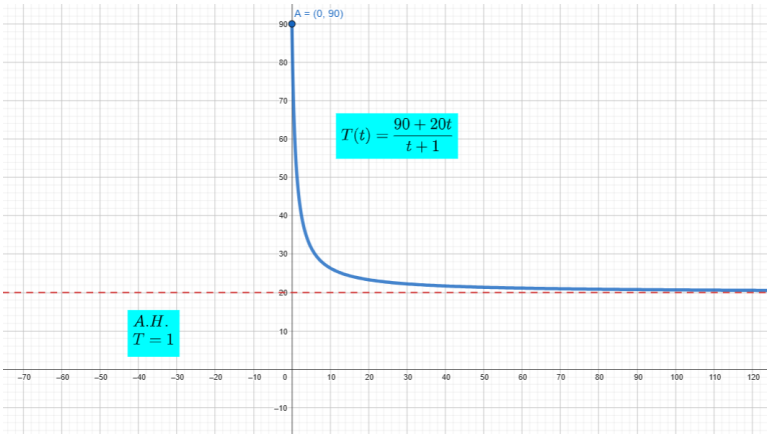
La segunda derivada tampoco se anula. Por lo que no contamos con puntos de inflexión. Para conocer la curvatura, miramos el signo de la segunda derivada en cualquier punto del dominio:

$$T''(10)>0\to función\ convexa\ en\ todo\ su\ dominio$$

Los cortes con los ejes de coordenadas aparecen en:

$$t=0\to T(0)=90\to punto(0{,}90)$$

$$T=0\to\frac{90+20t}{t+1}=0\to t=-4{,}5\ segundos\ \notin al\ dominio$$



b) La temperatura inicial de la bebida es la imagen de la función para $t = 0.$ Es decir, 90 grados, porque $T(0) = 90$.

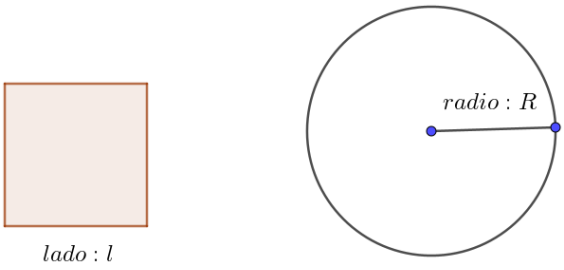
La curva es convexa y estrictamente decreciente. La curva queda siempre por encima de la AH. Por lo tanto, el valor $T = 20$ de la AH es una cota inferior que nunca alcanza la bebida, por mucho tiempo que pase. En el infinito (caso ideal) podemos decir que la temperatura tiende a 20 grados, pero sin llegar nunca a alcanzar ese valor límite.

PROBLEMA 12

La suma de la longitud de una circunferencia y el perímetro de un cuadrado son 10 metros.

a) **[2 puntos]** ¿Cuáles deben ser las longitudes del radio de la circunferencia y de un lado del cuadrado para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima?

b) **[0,5 puntos]** ¿Es posible determinar las longitudes del radio de la circunferencia y de un lado del cuadrado para que la suma de las áreas sea máxima?



a) El perímetro del cuadrado es cuatro veces su lado. El perímetro de la circunferencia es el producto del diámetro por el número pi. La suma de ambos perímetros es igual a 10 metros.

$$4l + 2\pi R = 10 \rightarrow l = \frac{10 - 2\pi R}{4} \rightarrow l = \frac{5 - \pi R}{2}$$

El área del cuadrado se obtiene multiplicando lado por lado. El área del círculo es el producto del número pi por el radio al cuadrado. El área total es la suma de ambas áreas, y es la función a optimizar.

$$A = l^2 + \pi R^2$$

Expresamos la función dependiendo solo del radio.

$$A = \left(\frac{5 - \pi R}{2}\right)^2 + \pi R^2$$

El dominio de esta función es toda la recta real, por ser un polinomio. Por las condiciones del enunciado, el radio no puede ser negativo ni nulo, por lo que nos quedaremos con el dominio de los números reales positivos.

$$A = \frac{25 + \pi^2 R^2 - 10\pi R}{4} + \pi R^2$$

$$A = \frac{\pi^2}{4} R^2 + \pi R^2 - \frac{5\pi}{2} R + \frac{25}{4}$$

$$A = \left(\frac{\pi^2}{4} + \pi\right) R^2 - \frac{5\pi}{2} R + \frac{25}{4}$$

$$A = \frac{\pi^2 + 4\pi}{4} R^2 - \frac{5\pi}{2} R + \frac{25}{4}$$

Condición necesaria de extremo relativo: primera derivada igual a cero.

$$A' = \frac{\pi^2 + 4\pi}{2} R - \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{\pi^2 + 4\pi}{2} R - \frac{5\pi}{2} = 0 \rightarrow \frac{\pi^2 + 4\pi}{2} R = \frac{5\pi}{2} \rightarrow R = \frac{5\pi}{\pi^2 + 4\pi} \rightarrow R = \frac{5}{\pi + 4} \approx 0.70\ metros\ (punto\ crítico)$$

Aplicamos la condición suficiente en el dominio $(0, \infty)$, considerando el punto crítico.

$$\left(0, \frac{5}{\pi + 4}\right) \rightarrow A'(0.5) < 0 \rightarrow A\ estrictamente\ decreciente$$

$$\left(\frac{5}{\pi + 4}, \infty\right) \rightarrow A'(10) > 0 \rightarrow A\ estrictamente\ creciente$$

El punto crítico $R = \frac{5}{\pi+4}$ es un mínimo relativo. Al ser el único extremo relativo en el dominio $(0, \infty)$, podemos afirmar que el mínimo relativo es también mínimo absoluto.

Obtenemos las dimensiones del lado.

$$l = \frac{5 - \pi R}{2} \rightarrow l = \frac{5 - \pi \frac{5}{\pi + 4}}{2} \rightarrow l = \frac{20}{2(\pi + 4)} \rightarrow l = \frac{10}{\pi + 4} \approx 1.40\ metros$$

Es decir, el lado del cuadrado tiene una longitud doble a la del radio.

b) El área no puede obtener un máximo, para unas dimensiones concretar, porque la función polinómica de grado dos del área tiene por gráfica una parábola convexa.

$$A = \frac{\pi^2 + 4\pi}{4} R^2 - \frac{5\pi}{2} R + \frac{25}{4}$$

El coeficiente líder de esta parábola $(\frac{\pi^2+4\pi}{4})$ es una cantidad positiva. Por lo que el vértice será un mínimo relativo y absoluto (como hemos demostrado en el apartado anterior). Y las ramas de la parábola crecen verticalmente hacia el infinito sin tener una cota superior. Por lo tanto, jamás aparecerá un valor máximo de la función área.

PROBLEMA 13

El beneficio (en miles de euros) que obtiene una empresa al vender x miles de unidades de un producto viene dado por la función: $B(x) = -2x^3 + 15x^2 + 36$, donde x está en el intervalo $[0, 8]$. Se pide:

a) **[2 puntos]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento del beneficio y localiza los valores de x en los que se alcanzan máximos y mínimos relativos. Calcula también el valor máximo y mínimo absolutos del beneficio en dicho intervalo.

b) **[0,5 puntos]** Justifica razonadamente qué decisión tomaría la empresa en función de los resultados y por qué en los problemas de optimización en intervalos cerrados es imprescindible comparar los extremos relativos con los valores en los extremos del intervalo.

a) El dominio de la función es toda la recta real, por ser un polinomio.

Condición necesaria de extremo relativo: primera derivada igual a cero.

$$B' = -6x^2 + 30x \rightarrow -6x^2 + 30x = 0 \rightarrow x = 0, x = 5 \rightarrow dos\ puntos\ críticos$$

$$(-\infty, 0) \rightarrow B'(-10) < 0 \rightarrow B\ estrictamente\ decreciente$$

$$(0,5) \rightarrow B'(2) > 0 \rightarrow B\ estrictamente\ creciente$$

$$(0, \infty) \rightarrow B'(50) < 0 \rightarrow B\ estrictamente\ decreciente$$

En $x = 0$ aparece un mínimo relativo. Su imagen es $B(0) = 36\ miles\ de\ euros$.

En $x = 5$ aparece un máximo relativo. Su imagen es $B(0) = 161\ miles\ de\ euros$.

Para determinar los extremos absolutos en el intervalo [0,8] debemos comparar las imágenes.

x	$B(x)$
0	36 mil euros
5	161 mil euros
8	-28 mil euros (pérdidas)

El máximo absoluto aparece para $x = 5\ miles\ de\ unidades$. Y el mínimo absoluto aparece para $x = 8\ miles\ de\ unidades$.

b) Una empresa busca optimizar los beneficios. Por lo que debería limitar la venta a las 5.000 unidades. Desde 0 hasta 5.000 unidades el beneficio crece, pero a partir de 5.000 unidades el beneficio decrece. Por lo que no tiene sentido vender más de 5.000 unidades, porque los beneficios comenzarán a decaer.

Los extremos relativos aparecen en los extremos suaves (primera derivada nula). Pero no siempre un extremo relativo conlleva un extremo absoluto. En los extremos de un intervalo cerrado pueden aparecer valores con la imagen más grande (máximos absolutos) o con la imagen más pequeña (mínimos absolutos), aunque no aparezca un pico suave. Por eso hemos comparado el valor de la imagen en los extremos del intervalo y en los extremos relativos obtenidos.

PROBLEMA 14

Sea $f:\ (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2+e^x}$.

a) **[1,25 puntos]** Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpreta gráficamente el resultado.

b) **[1,25 puntos]** Calcula $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. Interpreta gráficamente el resultado.

a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\ln(x)}{x^2+e^x}=\frac{\infty}{\infty}(indet.)\to L'Hôpital\to\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}}{2x+e^x}\to\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)+1}{2x+e^x}=\frac{\infty}{\infty}\to L'Hôpital$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{2+e^x}=evaluar=\frac{0+1}{2+\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

La función presenta una asíntota horizontal en $y=0$. Es decir, la gráfica de la función, cuando la variable independiente se acerca al infinito, tiendo a cero.

En el infinito, la gráfica de la función nunca corta a la asíntota horizontal. Aunque sí puede cortarla previamente, como podemos comprobar al realizar:

$$f(x)=0\to x\cdot\ln(x)=0$$

El valor $x=0$ no es solución, por no pertenecer al dominio.

El valor $\ln(x)=0\to x=1$ es un punto de corte de la función con la asíntota horizontal.

b) La función no está definida en $x=0$. Pero sí lo está definida a la derecha de $x=0$. Por eso podemos calcular el límite a la derecha de cero.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\ln(x)}{x^2+e^x}=evaluar=\frac{0^+\cdot\ln(0^+)}{0+1}=\frac{0^+\cdot(-\infty)}{1}$$

Aparece una indeterminación en el numerador, porque la gráfica del logaritmo se hunde a menos infinito cuando la variable independiente se acerca a cero por la derecha.

$$\lim_{x\to0^+}x\cdot\ln(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1/x}\cdot\ln(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{1/x}=evaluar=\frac{\ln(0^+)}{1/0^+}=\frac{-\infty}{\infty}=indeterminación$$

Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

Conclusión: aunque la función no está definida en $x=0$, la gráfica de la función se acerca al valor 0 cuando la variable independiente tiende a cero por la derecha. No hay asíntota vertical a la derecha de $x=0$.

PROBLEMA 15

[2,5 puntos] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2+4x+3$. Encuentra los valores del parámetro a para los que la recta que pasa por el origen $y=ax$ es tangente a la gráfica de f. ¿Cuál es la abscisa de los puntos de tangencia?

La ecuación de la recta tangente a una función en el punto x_0 es:

$$f'(x_0)=\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}$$

Recordamos que la pendiente de la recta tangente a una función en un punto x_0 coincide con la derivada de la función en ese punto x_0.

La Derivada de la función es:

$$f'(x)=2x+4\to f'(x_0)=2x_0+4$$

Y la pendiente de la recta $y=ax$. Por lo que su pendiente es $m_t=a$. Por lo tanto, se cumple la relación: $f'(x_0)=m_t\to 2x_0+4=a$

La imagen de la función en el punto x_0 es:

$$f(x_0)=x_0^2+4x_0+3$$

Llevamos estos valores a la ecuación punto-pendiente de la recta tangente:

$$2x_0+4=\frac{y-x_0^2-4x_0-3}{x-x_0}$$

La recta pasa por el origen. Por lo tanto, la recta pasa por el punto $(0,0)$. Por lo que podemos llevar los valores $x=0, y=0$ a la ecuación de la recta.

$$2x_0+4=\frac{0-x_0^2-4x_0-3}{0-x_0}$$

$$-2x_0^2-4x_0=-x_0^2-4x_0-3$$

$$0=x_0^2-3$$

$$x_0=\pm\sqrt{3}$$

Estos son los puntos de tangencia de la recta con la función.

Recuperamos la relación:

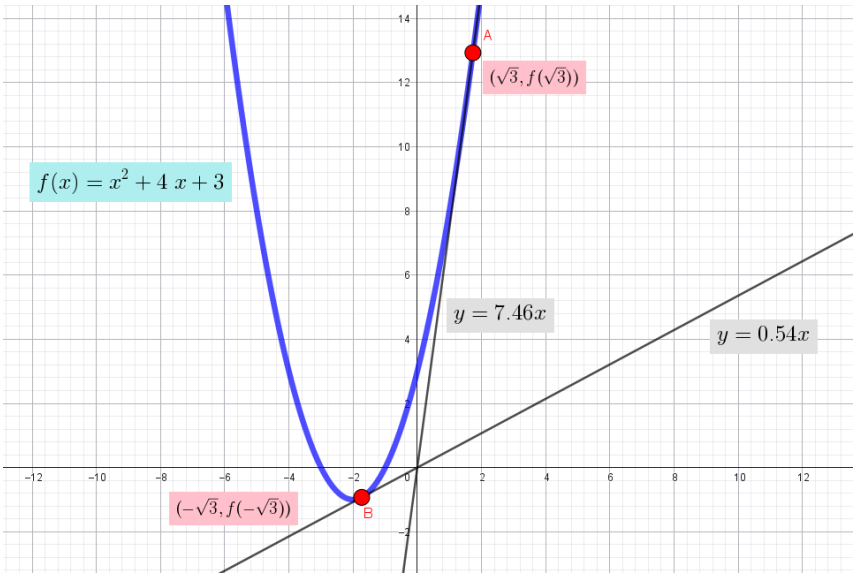
$$2x_0+4=a$$

$$2(\pm\sqrt{3})+4=a$$

Obtenemos dos valores para la pendiente:

$$a=2\sqrt{3}+4\approx 7.46$$

$$a=-2\sqrt{3}+4\approx 0.54$$



PROBLEMA 16

Considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$ si $x \neq 1, -1$.

a) **[1,25 puntos]** Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) **[1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

c) **[0,5 puntos]** ¿Es creciente f en el conjunto $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$? Justifica tu respuesta.

a)

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = evaluar = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = evaluar = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

Aparece Asíntota Vertical en $x = 1$.

$$\lim_{x \to (-1)^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = evaluar = \frac{0}{0} = indet \to L'Hôpital \to \lim_{x \to (-1)^+} \frac{2x - 2}{2x} = \frac{-4}{-2} = 2$$

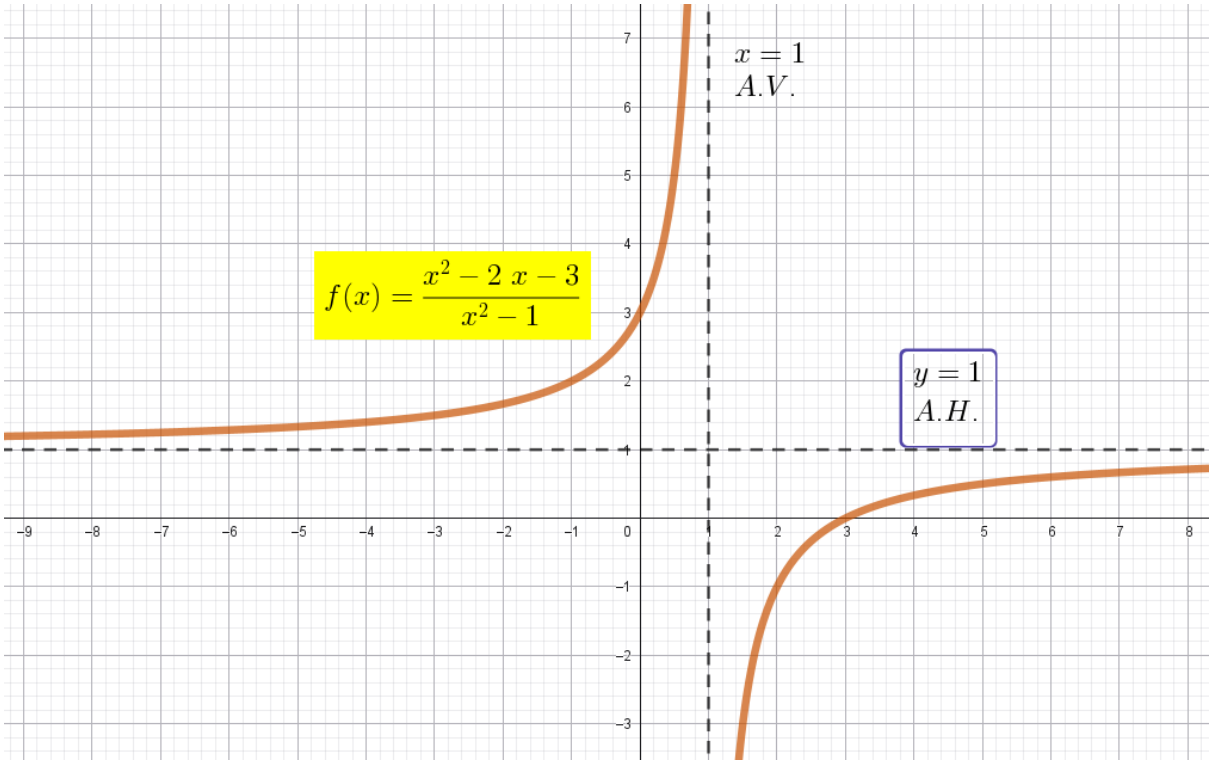
$$\lim_{x \to (-1)^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = evaluar = \frac{0}{0} = indet \to L'Hôpital \to \lim_{x \to (-1)^+} \frac{2x - 2}{2x} = \frac{-4}{-2} = 2$$

No hay Asíntota Vertical en $x = -1$.

Como el grado del numerador es igual al grado del denominador, en el infinito, tendremos una asíntota horizontal. Que coincide con la división de los coeficientes que multiplican a la máxima potencia. Por lo tanto:

$$y = 1$$

Es la Asíntota Horizontal cuando la variable independiente crece a más infinito y a menos infinito.



b)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-1) - (x^2-2x-3)(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x - 2x^2 + 2 - 2x^3 + 4x^2 + 6x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{(x^2-1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2 + 2x + 1)}{(x^2-1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2(x-1)^2}{(x^2-1)^2}$$

Podemos simplificar.

$$f'(x) = \frac{2(x-1)^2}{[(x+1)(x-1)]^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2(x-1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Igualamos la derivada a cero.

$$2 = 0$$

Esto es un absurdo matemático. La derivada nunca se anula. No hay puntos críticos. No hay extremos relativos.

¡OJO! Si no hubiéramos simplificado, al anular la derivada, nos saldría que $x = -1$ hubiese anulado la primera derivada. Debemos razonar así: el valor $x = -1$ no pertenece al dominio, por lo que la derivada nunca se anula.

Para estudiar el crecimiento, podemos darnos cuenta que la función derivada siempre devuelve un valor positivo en el dominio formado por todos los reales menos $x = -1, x = 1$. Es decir, la función es estrictamente creciente en su dominio.

c) La función es estrictamente creciente en su dominio. En el intervalo:

$$(-1,1) \cup (1, \infty)$$

No estamos considerando $x = -1\, ni\, x = 1$, al ser los intervalos abiertos. Por lo tanto, afirmamos no solo que la función es creciente, sino que es estrictamente creciente en ese intervalo (derivada siempre positiva).

PROBLEMA 17

a) **[2 puntos]** Calcula los valores a, b, c, d de la función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabiendo que la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de inflexión $(1, 0)$ es $y = 3x - 3$ y que el punto de abscisa $x = 0$ es un extremo relativo.

b) **[0,5 puntos]** Halla dos funciones polinómicas: la primera que tenga un único extremo relativo y la segunda que no contenga ninguno.

a) La función pasa por el punto $(1,0)$. La recta tangente también pasa por ese punto, ya que es el punto de tangencia. Es decir:

$$f(1) = 0 \rightarrow a + b + c + d = 0$$

Además, el punto de inflexión aparece en la abscisa $x = 1$. Por lo tanto:

$$f''(1) = 0$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(1) = 6a + 2b \rightarrow 6a + 2b = 0$$

También, en x=0 encontramos un extremo relativo.

$$f'(0) = 0$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = c \rightarrow c = 0$$

Por último, si la recta tangente en $x = 1$ es $y = 3x - 3$, la pendiente de la recta tangente es 3. Y la pendiente de la recta tangente coincide con el valor de la derivada de la función en $x = 1$.

$$f'(1) = 3$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(1) = 3a + 2b + c \rightarrow 3a + 2b + c = 3$$

Tenemos un sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas. Como $c = 0$, pasamos a un sistema 3x3.

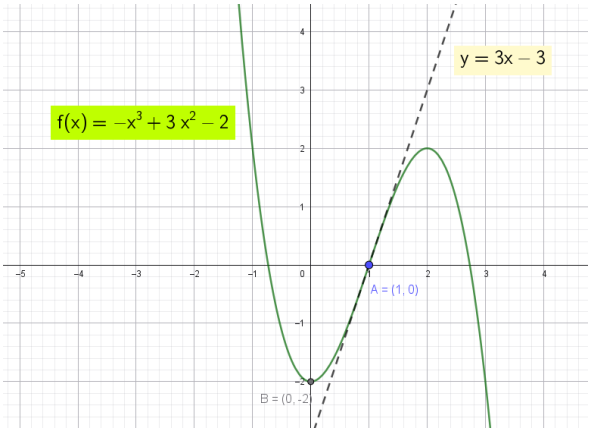
$$\begin{cases} a + b + d = 0 \\ 6a + 2b = 0 \\ 3a + 2b = 3 \end{cases}$$

De las dos últimas ecuaciones del sistema, podemos sacar los valores de dos incógnitas. Si restamos la segunda ecuación menos la tercera ecuación, obtenemos: $a = -1$. Y por lo tanto $b = 3$.

Y de la primea ecuación del sistema, concluimos: $d = -2$

Solución final:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$$



b) Una función polinómica con un único extremo relativo puede ser, por ejemplo, una parábola. El vértice cumple ser punto crítico, extremo relativo y extremo absoluto. Por ejemplo:

$$f(x) = x^2 \rightarrow extremo\ relativo\ en\ (0{,}0)$$

Y una función polinómica sin extremo relativo es una recta con pendiente no nula. Por ejemplo:

$$g(x) = x \rightarrow su\ derivada\ vale\ 1 \rightarrow no\ posee\ extremo\ relativo$$