Kmitavé meditace 2.

Rovnoměrný pohyb po kružnici jakožto základní kmitavý pohyb

Žán Pól Kastról

19. října 2024

Obsah

1 Polohový vektor a vektor okamžité rychlosti

Vezměmež hmotný bod M, který se pohybuje po kružnici o poloměru r rychlostí, která má konstantní velikost v. Takový pohyb se nazývá *rovnoměrný pohyb po kružnici* ($\mathcal{RPPK}$). Je to **nejjednodušší křivočarý pohyb**. Zároveň je to *kmitavý periodický pohyb* – kmitavé pohyby budeme studovat detailně později.

Bodu M přiřadíme *polohový vektor* $\vec{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{SM}$, který bod M provází na jeho cestě za dobrodružstvím, takže mu říkáme také *průvodič* bodu M. (obr.1).

Vektor okamžité rychlosti $\vec{\boldsymbol{v}}$ bodu M má dle definice **stálou velikost** v, ale jeho **směr se v čase mění**. Tento směr je určen tečnou k dané kružnici v bodě M. Vektor rychlosti $\vec{\boldsymbol{v}}$ je tedy vždy kolmý na průvodič $\vec{\boldsymbol{r}}$.

Kolmost těchto vektorů můžeme nahlédnout intuitivně pomocí limitního visionářství:

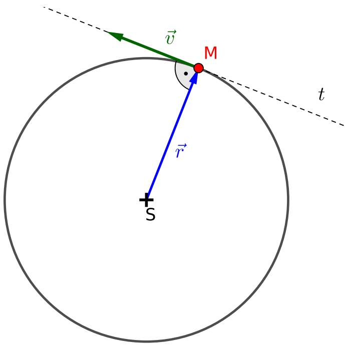
Varianta 1: V obrázku obr.2a jsou vyznačeny dvě polohy bodu M (body M_1, M_2) a jejich polohové vektory $\vec{\boldsymbol{r}}_1, \vec{\boldsymbol{r}}_2$. Dále je zde vyznačen vektor $\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1$, což je **vektor posunutí** na obloukové trajektorii mezi body M_1M_2.

Pro **průměrnou rychlost definovanou vektorově** (*average velocity*) platí vztah

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{prum}} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t} \tag{1}$$

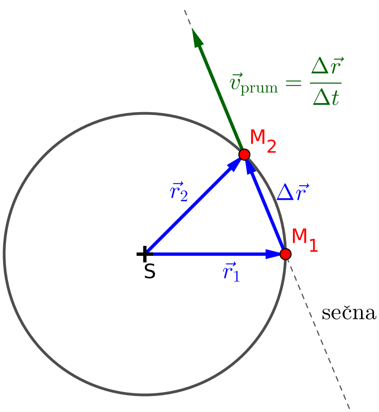
Protože jsme dělili vektor posunutí kladným číslem Δt, má průměrná rychlost stejný směr (a orientaci) jako tento vektor posunutí, tedy směr **sečny** M_1M_2.

Vektor průměrné rychlosti $\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{prum}}$ počítaný z úseku M_1M_2 nám může dát přibližnou představu o vektoru okamžité rychlosti $\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{okamž}}$ v bodě M_2.

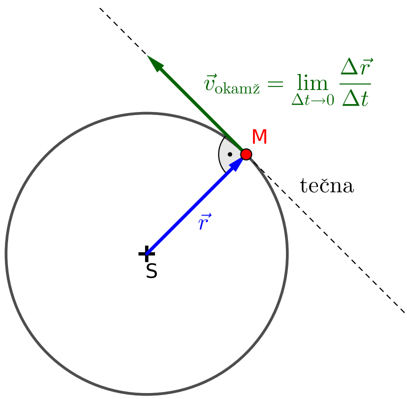


Obr. 1:

https://ggbm.at/m7g9hp23



(a)



(b)

Obr. 2:

https://ggbm.at/vh5q9adr

Chceme-li dostat přesnější aproximaci, musíme úsek M_1M_2 zkrátit, tedy bod M_1 posunout blíže k bodu M_2. Další zpřesnění dostaneme dalším přiblížením, další dalším atd. Při tomto limitním procesu se bod M_1 čím dále tím více přibližuje k bodu M_2, časový úsek Δt, za který pohybující se hmotný bod urazí obloučkovou trajektorii mezi body M_1 a M_2 se zkracuje a sečna M_1M_2 se stále více přibližuje k tečně v bodě M_2 (viz odkaz na aplet u obrázku). Přesnou hodnotu **okamžitého vektoru rychlosti** tedy dostaneme jako limitu:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{okamž}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t} \tag{2}$$

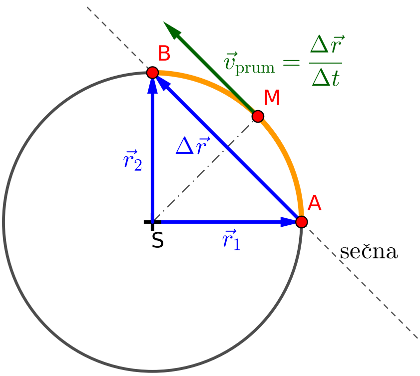
V limitě sečna přejde v tečnu a vektor okamžité rychlosti bude kolmý na průvodič (obr.2b).

Varianta 2: Úvahu ve variantě 1 lze použít nejen pro kruhovou trajektorii, ale i obecně pro jakoukoli (rozumnou) křivočarou trajektorii. V případě kruhové trajektorie můžeme uvažovat také tak, že vezmeme bod M, který je středem oblouku AB (viz obr.3). Oblouk AB postupně zmenšujeme tak, že M zůstává jeho středem. Sečna AB je tak už od začátku kolmá ma SM a postupně přejde v tečnu. Vektor okamžité rychlosti v M je proto kolmý k průvodiči $\vec{\boldsymbol{r}}$.

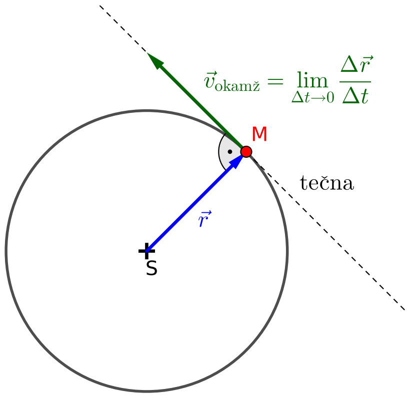
2 Obvodová a úhlová rychlost

Víme, že velikost vektoru okamžité rychlosti $\mathcal{RPPK}$ je konstantní a značíme ji v. Protože se touto rychlostí pohybuje těleso po **obvodu kružnice**, budeme jí říkat **obvodová rychlost**. Pač se jedná o **rovnoměrný** pohyb, platí pro v známý vztah

$$\boxed{v = \frac{s}{t} \quad \text{(obvodová rychlost } \mathcal{RPPK}\text{)}} \tag{3}$$



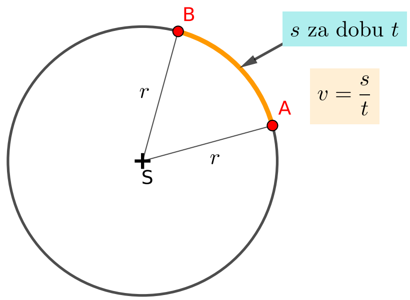
(a)



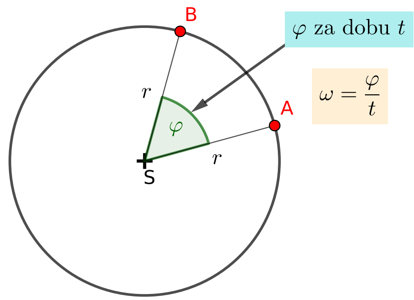
(b)

Obr. 3:

https://ggbm.at/z8jtfsvm



(a)



(b)

Obr. 4: Obvodová a úhlová rychlost

kde s je dráha (zde délka kruhového oblouku) uražená za dobu t (obr.4a).

Těleso na na cestě z A do B urazilo za dobu t nejen dráhu s, ale její průvodič opsal také úhel φ (matematicky – středový úhel příslušný k oblouku AB) (obr.4b). Proto můžeme zavést nový druh rychlosti – **úhlovou rychlost**. Definice je analogická definici obvodové rychlosti:

$$\boxed{\omega = \frac{\varphi}{t} \quad \text{(úhlová rychlost } \mathcal{RPPK}\text{)}} \tag{4}$$

kde φ je **úhel v radiánech** uražený průvodičem tělesa za dobu t. Jednotkou úhlové rychlosti je tedy **radián za sekundu**. Protože *radián* má jednotkově rozměr 1 (úhel měřený v obloukové míře je **poměr** délky oblouku kružnice ku jejímu poloměru – jednotky *metr* se vykrátí; $[\varphi] = 1$), říkáme, že jednotkou úhlové rychlosti je sekunda na mínus první, čili jeden Hertz.

$$\boxed{[\omega] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{s}^{-1} = 1\mathrm{Hz} \quad \text{(jednotka úhlové rychlosti)}} \tag{5}$$

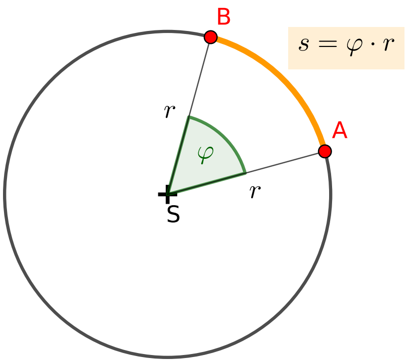
Urazí-li těleso například za 1 sekundu dráhu odpovídající půlkružnici, je $\varphi = \pi$ a jeho úhlová rychlost je π radiánů za sekundu, tedy $\omega \doteq 3{,}14\,\mathrm{s}^{-1}$, tedy $\omega \doteq 3{,}14\,\mathrm{Hz}$. Nebo je-li úhlová rychlost $\omega = 1\,\mathrm{Hz}$, znamená to, že těleso urazí 1 radián za sekundu, tedy ve stupních přibližně 57°.

Vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí: Každej blbec zná asi vztah „es je fír“! Neboli vztah pro délku kruhového oblouku.

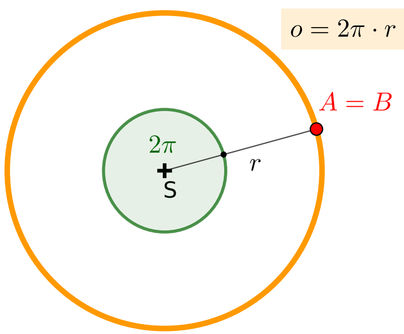
$$\boxed{s = \varphi \cdot r \quad \text{(délka kruhového oblouku)}} \tag{6}$$

kde φ je velikost středového úhlu (**v radiánech!**) příslušejícího oblouku délky s na kružnici o poloměru r (obr.5a). Každej blbec asi taky ví, že špecielním případem tohoto vztahu je vzorec pro délku kružnice „ó je dvě pír“ (obr.5b), tedy vztah

$$\boxed{o = 2\pi \cdot r \quad \text{(délka kružnice)}} \tag{7}$$



(a) **„es je fír“**



(b) **„ó je dvě pír“**

Obr. 5: Obecný a špecielní případ vztahu pro délku kruhového oblouku

Dosadíme-li vztah (6) do vztahu (3), dostáváme

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\varphi \cdot r}{t} = \frac{\varphi}{t} \cdot r = \omega \cdot r$$

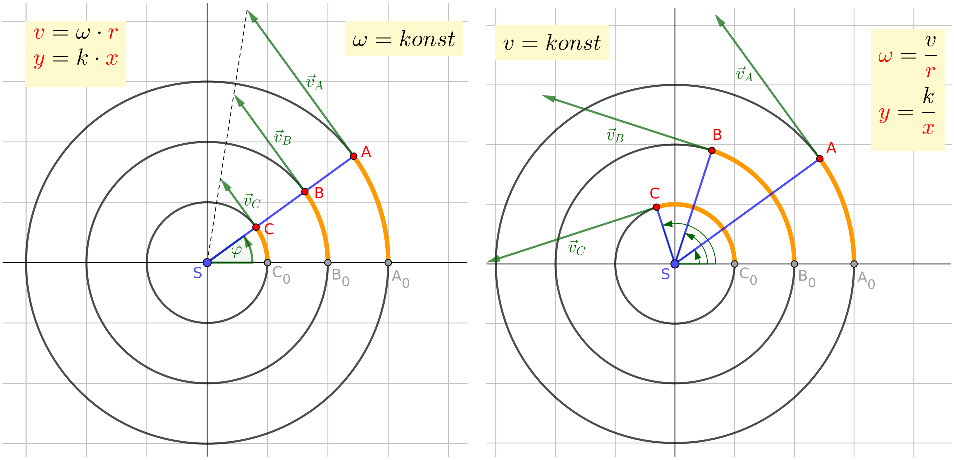
Dostali jsme úžasý vztah „vé je omegar“:

$$\boxed{v = \omega \cdot r \quad \text{(vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí 1.)}} \tag{8}$$

Odtud dostáváme „omega je vékur“:

$$\boxed{\omega = \frac{v}{r} \quad \text{(vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí 2.)}} \tag{9}$$

Rozdíl mezi obvodovou a úhlovou rychlostí: Jestliže ve vztahu (8) ponecháme úhlovou rychlost konstantní ($\omega = \text{konst}$), dostáváme **přímou úměrnost** mezi v a r (tedy $v = \text{konst} \cdot r$).



(a) ω = konst $\Rightarrow$ v přímo úměr. r

(b) v = konst $\Rightarrow$ ω nepřímo úměr. r

`https://ggbm.at/xvqfgnex`

`https://ggbm.at/agnsfavb`

Obr. 6: Rozdíl mezi obvodovou a úhlovou rychlostí

Konkrétně si můžeme představit rotující kolo *velocipédu* (neboli *rychlé nohy*, čili *bicyklu* alias *dvojkolky*) a sledovat 3 body drátu A, B, C v různých vzdálenostech od středu rotace S (viz obr.6a). Všechny tři body mají **stejnou úhlovou rychlost** ω, pač za stejnou dobu urazí **stejný úhel**. Bod A je však na největším poloměru, takže urazí největší dráhu. Proto má největší obvodovou rychlost! Bod C je na nejmenším poloměru, takže urazí nejmenší dráhu. Proto má nejmenší obvodovou rychlost! **Čím větší poloměr, tím větší je (při konstantním ω) obvodová rychlost.**

$$\omega_A = \omega_B = \omega_C$$
$$r_A > r_B > r_C$$
$$v_A > v_B > v_C$$

Jestliže ve vztahu (9) ponecháme obvodovou rychlost konstantní ($v =$ konst), dostáváme **nepřímou úměrnost** mezi ω a r (tedy $\omega = \frac{\text{konst}}{r}$).

Konkrétně si můžeme představit tři stejně dobré závodníky A, B, C, kteří běží na soustředných kruhových tratích stejnou obvodovou rychlostí, ale na různých poloměrech (viz obr.(6b)). Za stejnou dobu urazí **stejné dráhy**, ale **různé úhly**. Závodník A běží na největším poloměru, takže urazí nejmenší úhel. Proto má nejmenší úhlovou rychlost. **Čím větší poloměr, tím menší je (při konstantní v) úhlová rychlost.**

$$v_A = v_B = v_C$$
$$r_A > r_B > r_C$$
$$\omega_A < \omega_B < \omega_C$$

3 Kmit, perioda a frekvence

Víme, že pohyb po kružnici je kmitavý pohyb, který je **periodický**. Tedy určitý úsek pohybu se neustále přesně **opakuje**. Tomuto úseku pohybu říkáme **kmit**.

U pohybu po kružnici je tedy kmitem jeden oběh kružnice. (U kyvadla je to například pohyb z jedné krajní polohy do druhé a zpět, u závaží na pružině je to pohyb např. z rovnovážné polohy do nejnižší, do nejvyšší a zpět do rovnovážné.)

Doba, za kterou vykoná těleso jeden kmit, se nazývá **perioda**. U pohybu po kružnici jí také říkáme **doba oběhu**.

Perioda se značí T a její jednotkou je samozřejmě sekunda.

$$[T] = 1\,\mathrm{s}$$

Počet kmitů, které částice vykoná za sekundu, se nazývá **kmitočet** (odvozeno od „kmitů počet“) nebo také **frekvence**.

Frekvence se značí f a dle její definice platí

$$\boxed{f = \frac{N}{t} \quad \text{(definice frekvence)}} \tag{10}$$

kde t je doba, po kterou počítáme kmity a N je počet kmitů, které za tuto dobu napočítáme. Protože N je bezrozměrná veličina, musí být jednotkou frekvence zřejmě sekunda na minus první. Na počest Heinrichu Hertzovi[1] byla tato jednotka pojmenována *hertz*.

$$[f] = 1\,\mathrm{s}^{-1} = 1\,\mathrm{Hz}$$

V případě pohybu po kružnici se často udává frekvence jako **počet otáček za minutu**. (Např. říkáme, že nějaký motor má 1000 otáček za minutu.)

Vykoná-li těleso jeden kmit, je $t = T$ a $N = 1$. Dosadíme-li tyto hodnoty do definice frekvence (10), dostáváme vztah mezi prekvencí a periodou:

$$\boxed{f = \frac{1}{T} \quad \text{nebo} \quad T = \frac{1}{f} \quad \text{(vztah mezi frekvencí a periodou)}} \tag{11}$$

Vykoná-li těleso jeden kmit, potom uplyne čas $t = T = \frac{1}{f}$ a těleso urazí dráhu $s = 2\pi r$. Dosadíme-li tyto hodnoty do vztahu (3) pro obvodovou rychlost, dostaneme

$$\boxed{v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f \quad \text{(vztah mezi } v, T, f\text{)}} \tag{12}$$

Vykoná-li těleso jeden kmit, potom uplyne čas $t = T = \frac{1}{f}$ a průvodič tělesa opíše úhel $\varphi = 2\pi$. Dosadíme-li tyto hodnoty do vztahu (4) pro

[1] https://cs.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Hertz

úhlovou rychlost, dostaneme

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{(vztah mezi } \omega, T, f\text{)}} \tag{13}$$

Porovnáme-li ztahy (12) a (13), krástně vidíme, že mezi v a ω platí vztah $v = \omega r$, jak jsme odvodili již dříve.

4 Dostředivé zrychlení – směr

Velikost vektoru obvodové rychlosti $\vec{\boldsymbol{v}}$ zůstává při $\mathcal{RPPK}$ konstantní. **Směr** tohoto vektoru se však neustále **mění** (jak jsme ukázali, obodová rychlost je vždy kolmá na průvodič $\vec{\boldsymbol{r}}$). Se změnou vektoru rychlosti tedy musí souviset nějaké **zrychlení** $\vec{\boldsymbol{a}}$ (obr. 7a).

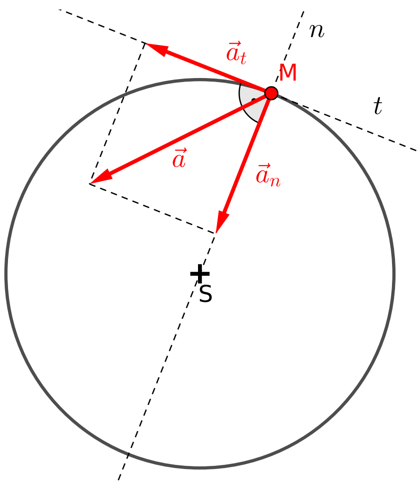
Je zřejmé, že jeho složka do směru tečny musí být nulová, protože by měnila velikost rychlosti, ale ta je konstantní. Zbývá tedy nenulová složka do směru kolmého na tečnu (do směru normály), tedy do přímky procházející středem kružnice. Vzhledem k tomu, že se těleso stáčí od směru tečny ke středu kružnice, je intuitivně jasné, že vektor zrychlení bude mířit **do středu** kružnice (nikoliv od středu). Proto zrychlení tělesa při $\mathcal{RPPK}$ nazýváme **dostředivé** a značíme $\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{do}}$ (obr. 7b).

5 Dostředivé zrychlení – velikost

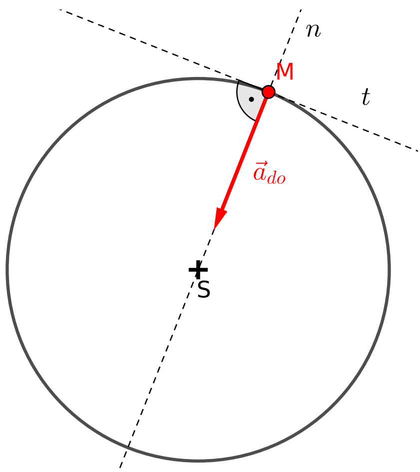
Vztah pro velikost dostředivého zrychlení můžeme nahlédnout intuitivně pomocí limitního visionářství.

Limitní visionářství: Začněmež průměrným zrychlením.

Průměrné vektorové zrychlení na úseku mezi body M_1 a M_2 (viz obr.



(a) Tečná složka musí být nulová.



(b) Normálová složka míří do S.

Obr. 7: Dostředivé zrychlení – směr

8a) je dáno vztahem

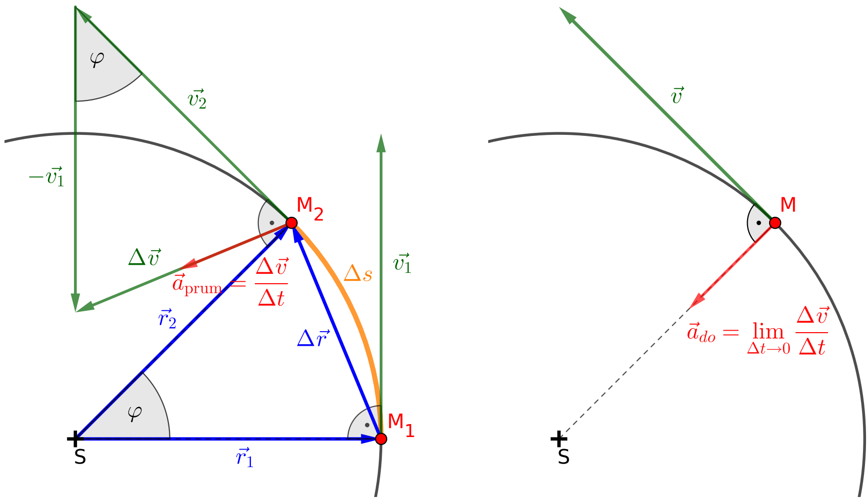
$$\vec{\boldsymbol{a}}_{\text{prum}} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta t} \tag{14}$$

Přitom vektor $\Delta\vec{\boldsymbol{v}}$ je dán rozdílem vektorů rychlosti v bodech M_1 a M_2, tedy

$$\Delta\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_2 - \vec{\boldsymbol{v}}_1 \tag{15}$$

Vztah (15) je v obrázku 8a reprezentován zeleným vektorovým trojúhelníkem s jedním vrcholem v bodě M_2. Vektůrek $\vec{\boldsymbol{a}}_{\text{prum}}$ vzniká vydělením $\Delta\vec{\boldsymbol{v}}$ časovým intervalem Δt, což je kladné číslo; proto má $\vec{\boldsymbol{a}}_{\text{prum}}$ stejný směr a orientaci jako $\Delta\vec{\boldsymbol{v}}$.

V apletu v GeoGebře (odkaz v popisu obrázku) můžeme krástně sledovat, co se děje s vektorem $\vec{\boldsymbol{a}}_{\text{prum}}$, bude-li se bod M_2 blížit k M_1. Vektor průměrného zrychlení se bude natáčet směrem ke středu kružnice S, až se v limitě stane vektorem okamžitého zrychlení, který míří přesně



(a) Průměrné zrychlení. (b) Dostředivé jako limita průměrného.

Obr. 8: Dostředivé zrychlení – velikost

https://www.geogebra.org/m/ex9gyxvz

do středu S, tedy vektorem dostředivého zrychlení (viz obr. 8b):

$$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{\boldsymbol{a}}_{\text{prum}} = \vec{\boldsymbol{a}}_{\text{okam}} = \vec{\boldsymbol{a}}_{\text{do}} \tag{16}$$

Vedle zeleného trojúhelníku tvořeného vztahem $\Delta\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_2 - \vec{\boldsymbol{v}}_1$ máme v obrázku 8a ještě modrý trojúhelník pro vztah $\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1$. Tyto trojúhelníky jsou si zřejmě podobné jako vejce vejci (oba jsou rovnoramenné, s úhlem φ proti základně – viz věta o dvou kolmicích). Přitom jejich ramena mají velikost v (zelený) a r (modrý). Díky podobnosti tedy platí:

$$\frac{|\Delta\vec{\boldsymbol{v}}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{\boldsymbol{r}}|}{r} \tag{17}$$

Současně dle (14) dostáváme pro **velikost** průměrného zrychlení:

$$|\vec{\boldsymbol{a}}_{\text{prum}}| = \frac{|\Delta\vec{\boldsymbol{v}}|}{\Delta t} \tag{18}$$

Kombinací předchozích dvou vztahů tedy dostáváme

$$|\vec{\boldsymbol{a}}_{\text{prum}}| = \frac{v}{r} \cdot \frac{|\Delta\vec{\boldsymbol{r}}|}{\Delta t} \tag{19}$$

V limitě pro $M_1 \mapsto M_2$ zřejmě platí:

- $|\vec{\boldsymbol{a}}_{\text{prum}}| \mapsto |\vec{\boldsymbol{a}}_{\text{do}}| = a_{\text{do}}$
- $|\Delta\vec{\boldsymbol{r}}| \mapsto \Delta s$

Dle (19) dostáváme tedy

$$a_{\text{do}} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Ale člen $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ je zřejmě roven velikosti obvodové rychlosti v, takže dostáváme pro velikost dostředivého zrychlení vztah:

$$\boxed{a_{\text{do}} = \frac{v^2}{r}} \tag{20}$$

Odtud vzhledem ke vztahům (8) a (9) dostáváme pro a_{do} také vztahy

$$\boxed{a_{\mathrm{do}} = \omega^2 r = \omega v} \tag{21}$$

6 Dostředivá síla a tuhost vazby

Dle 2. Newtonova zákona je $\mathcal{RPPK}$ s dostředivým zrychlením $\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{do}}$ vyvolán výslednou silou $\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{do}} \cdot m$. Tato výslednice má směr i orientaci stejnou jako dostředivé zrychlení, takže i ona míří do středu kružnice, tedy má opačnou orientaci než polohový vektor $\vec{\boldsymbol{r}}$ (viz obr. 9). Proto se jí říká **dostředivá síla $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{do}}$**:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{do}} = m \cdot \vec{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{do}} \tag{22}$$

Tedy dle vztahů (39) a (40):

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{do}} = -\omega^2 m \cdot \vec{\boldsymbol{r}}} \tag{23}$$

$$\boxed{F_{\mathrm{do}} = \omega^2 m r} \tag{24}$$

Konstanta

$$k = \omega^2 m \tag{25}$$

se nazývá **tuhost vazby**. Předchozí dva vztahy můžeme psát tedy ve tvaru

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{do}} = -k \cdot \vec{\boldsymbol{r}}} \tag{26}$$

$$\boxed{F_{\mathrm{do}} = kr} \tag{27}$$

Fysikální smysl tuhosti vazby je zřejmý, pač

$$k = \frac{F_{\mathrm{do}}}{r} \tag{28}$$

Vidíme, že tuhost vazby říká, jak velkou sílu potřebuji při $\mathcal{RPPK}$ na udržení tělesa na poloměru r. A tato hodnota je úměrná kvadrátu úhlové rychlosti a hmotnosti. Můžeme si představit psa, který kolem nás běhá na vodítku – čím větší je jeho úhlová rychlost a čím větší je jeho hmotnost, tím větší silou ho musím na vodítku držet!

Rovnice (26) je charakteristickým rysem každého $\mathcal{RPPK}$, je to něco jako známka punku[2]! V následující kapitolce o harmonickém kmitavém pohybu ($\mathcal{HKP}$) uvidíme, že obdobná známka punku je charakteristickým rysem každého $\mathcal{HKP}$!

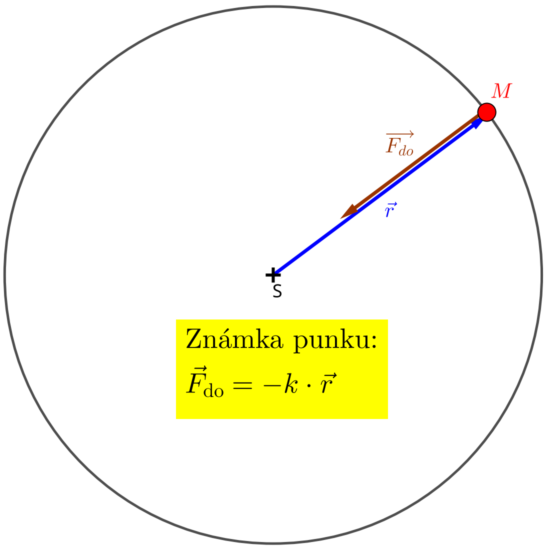
Je důležité si uvědomit, že pojem **dostředivá síla znamená výslednici** všech sil působících při $\mathcal{RPPK}$ na dané těleso. Tato výslednice může být tvořena **silou jedinou** (například družice Země – síla gravitační), nebo **vícero silami** (například síla tíhová složená se silou provázku v případě kónického kyvadla – viz obr. 10).

Protože dostředivá síla nutí těleso zatáčet, můžeme jí volně přezdívat **síla zatáčivá**, jak to trefně dělá Martin Vlach v *Rande s Fysikou* (díl 4/13 Působení sil; čas 4:05 – Saša ma kolotoči[3]). Jenom si musíme uvědomit, že i síla, která není dostředivá (obecně není kolmá na tečnu k trajektorii), může nutit těleso zatáčet, ta však také tělesu mění velikost rychlosti – například pohyb planety po elipse kolem Slunce v jejím ohnisku – gravitační síla planetu nutí zatáčet, ale planeta se nepohybuje rovnoměrně, gravitační síla ji urychluje a brzdí.

Je potřeba dále dát bacha na to, abychom si nepletli sílu *dostředivou* a *odstředivou*. **Síla dostředivá je síla skutečná**, vyvolaná reálnými tělesy, kdežto síla **odstředivá je síla fiktivní** (zdánlivá, setrvačná) nebo, jak opět trefně říká Martin Vlach ve výše zmíněném videu, **síla bez pachatele** a k reálným silám ji přidáváme při popisu v *neinerciální vztažné soustavě* – viz video, kde je to pěkně kvalitativně vysvětleno a

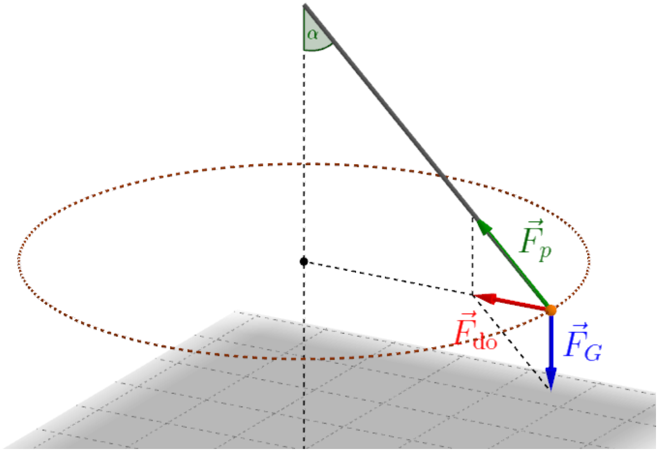
[2] https://youtu.be/ZuYx_z9KU68?si=0BF3BlUvhJpYGm2g

[3] https://www.ceskatelevize.cz/porady/10319921345-rande-s-fyzikou/211563230150004/



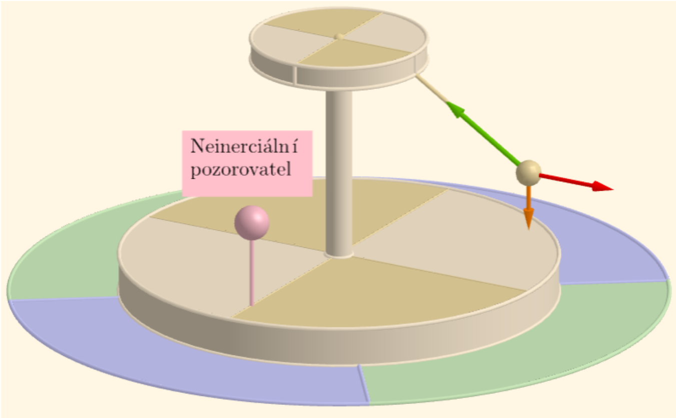
Obr. 9: Dostředivá síla $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{do}}$ má opačnou orientaci než průvodič $\vec{\boldsymbol{r}}$.

https://www.geogebra.org/m/mv2gabkk



Obr. 10: Kónické kyvadlo

https://www.geogebra.org/m/HA3JJeAc



Obr. 11:

https://www.geogebra.org/m/benvpvaz

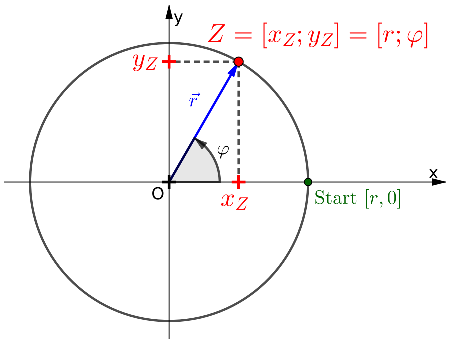
viz konkrétní početní příklad z matfyzácké sbírky[4] a ještě aplet v GGB viz odkaz v popisu obr. 11. V tomto apletu je ještě odkaz na 30 min. vídeo Žána Póla Kastróla „Odstředivá síla“.

7 Fáze, počáteční fáze

Představme si, že máme *Emila Zátopka* (bod Z), který trénuje na kruhové dráze k o poloměru r a běží konstantní úhlovou rychlostí ω proti směru $\mathcal{HR}$.

Abychom mohli sledovat jeho polohu v čase, zavedeme souřadnou soustavu Oxy s počátkem O ve středu kružnice (viz obr. 12). Bod Z má *kartézské* souřadnice $[x_Z; y_Z]$ a *polární* souřadnice $[\varphi; r]$, kde φ je orientovaný úhel měřený od kladné poloosy x k polohovému vektoru $\vec{r}$.

[4] https://reseneulohy.cz/481/kyvadlo-na-kolotoci



Obr. 12

Obrázek nám silně připomíná zavedení goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice, s tím rozdílem, že poloměr r naší kružnice je libovolný. Díky tomu dostáváme vztahy pro přechod od polárních souřadnic ke kartézským:

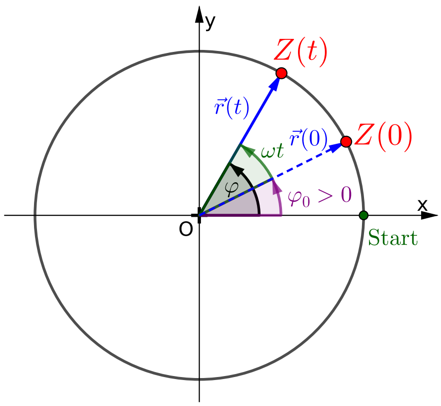
$$x_Z = r\cos\varphi \tag{29}$$

$$y_Z = r\sin\varphi \tag{30}$$

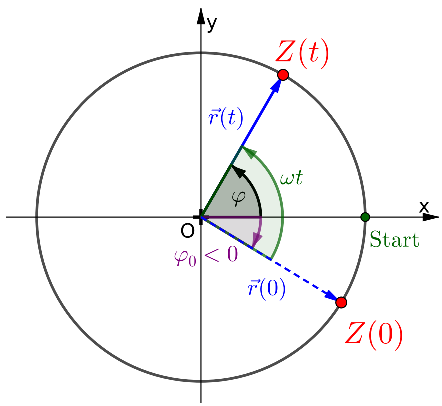
Fáze: Úhel φ má trampskou přezdívku *fáze*, pač vokazuje, v jaké fázi je Zátopkův trénink. Fázi je vhodné měřit v *obloukové míře*. Když třeba řekneme, že Zátopek má fázi $\varphi = \pi$, znamená to, že je v polovině kolečka.

Počáteční fáze: Hodnota fáze v čase $t = 0$ se nazývá **počáteční fáze** a značíme ji φ_0:

$$\boxed{\varphi(0) = \varphi_0} \tag{31}$$



(a) Kladná počáteční fáze.



(b) Záporná počáteční fáze.

Obr. 13: Počáteční fáze

Nulová počáteční fáze: Je-li v čase $t = 0$ Zátopek přesně v bodě $[r, 0]$ (Start), říkáme, že má **nulovou počáteční fázi**, tedy $\varphi_0 = 0$ a dle vztahu (4) platí pro jeho fázi $\varphi(t)$ po uplynutí času t vztah přímé úměrnosti mezi fází a časem:

$$\boxed{\varphi(t) = \omega t} \tag{32}$$

Nenulová počáteční fáze: Obecně však Zátopek v čase $t = 0$ nemusí být na Startu, ale může mít nějaký úhlový *náskok* (obr. 13a) nebo *podskok* (obr. 13b). Říkáme, že má **nenulovou počáteční fázi** a platí:

$$\boxed{\varphi(t) = \omega t + \varphi_0} \tag{33}$$

Pro náskok je $\varphi_0 > 0$, pro podskok je $\varphi_0 < 0$. Pro souřadnice Zátopka můžeme tedy obecně psát:

$$\boxed{Z[x_Z; y_Z] = [r\cos(\omega t + \varphi_0); r\sin(\omega t + \varphi_0)]} \tag{34}$$

Souřadnice polohového vektoru $\vec{\boldsymbol{r}}$ jsou stejné, jako souřadnice bodu Z:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{r}}(t) = (r\cos(\omega t + \varphi_0); r\sin(\omega t + \varphi_0))} \tag{35}$$

8 Derivace

Naše intuitivní představy o vektorech okamžité rychlosti a zrychlení snadno ověříme přesně pomocí derivací. Předpokládejme pro jednoduchost, že počáteční fáze bodu Z je nulová. V čase t má tedy polohový vektor souřadnice

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{r}} = (r\cos\omega t; r\sin\omega t)}$$

Když ho zderivujeme podle času, dostaneme vektor okamžité rychlosti:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}} = (-r\omega\sin\omega t; r\omega\cos\omega t)} \tag{36}$$

Skalární součin těchto vektorů je

$$\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}} = -r^2\omega\sin\omega\cos\omega + r^2\omega\sin\omega\cos\omega = 0$$

Z toho plyne, že $\vec{\boldsymbol{v}}$ a $\vec{\boldsymbol{r}}$ jsou vskutku na sebe kolmé.

Další derivace podle času nám dá vektor okamžitého zrychlení:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}} = (-r\omega^2\cos\omega t; -r\omega^2\sin\omega t)} \tag{37}$$

Vytkneme-li $-\omega^2$, dostáváme

$$\vec{\boldsymbol{a}} = -\omega^2\underbrace{(r\cos\omega t; r\sin\omega t)}_{\vec{\boldsymbol{r}}} = -\omega^2\vec{\boldsymbol{r}} \tag{38}$$

Z tohoto vztahu snadno zjistíme následující:

- Vektory $\vec{a}$ a $\vec{r}$ mají **opačnou orientaci**, proto vektor okamžitého zrychlení míří do středu kružnice $\mapsto$ mluvíme o **dostředivém zrychlení**.

- Velikost dostředivého zrychlení je zřejmě $\omega^2 r$, což je v souladu s tím, co jsme odvodili výše.

Tedy:

$$\boxed{\vec{a}_{\mathrm{do}} = -\omega^2 \vec{r}} \tag{39}$$

$$\boxed{a_{\mathrm{do}} = \omega^2 r} \tag{40}$$

9 Vektorový součin

Tak jako $\vec{r}$, $\vec{v}$ a $\vec{a}$ jsou vektorové veličiny, můžeme i úhlové rychlosti ω přisoudit vektorový charakter a pracovat s vektorem $\vec{\omega}$ (viz obr. 14), který má tyto vlastnosti:

- $|\vec{\omega}| = \omega$
- Vektor $\vec{\omega}$ má **směr rotační osy**
- Jeho **orientace** je dána **pravidlem pravé ruky**: Uchopíme rotační osu do pravé ruky tak, aby ohnuté prsty mířily ve směru otáčení. Natažený palec potom ukazuje orientaci vektoru $\vec{\omega}$.

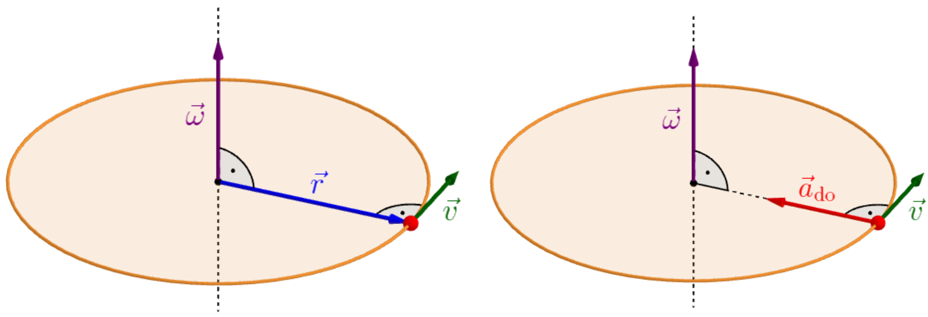
Dříve jsme odvodili vztahy pro velikost obvodové rychlosti a dostředivého zrychlení:

$$v = \omega r \qquad\qquad a_{\mathrm{do}} = \omega v$$

Tyto vztahy můžeme nyní psát i vektorově:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad\qquad \vec{a}_{\mathrm{do}} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

V obrázku 14 se pomocí pravidla pravé ruky pro vektorový součin



(a) $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$ (b) $\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{do}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$

Obr. 14: Úhlová rychlost jakožto vektor

můžeme přesvědčit, že oba vektorové součiny dávají opravdu správný směr i orientaci vektorů $\vec{\boldsymbol{v}}$ a $\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{do}}$. Dále platí

$$|\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}| = \omega r \sin(90) = \omega r \qquad |\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}| = \omega v \sin(90) = \omega v$$

takže vše je OK!