Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 12 - condiciones de contorno

1. Determina a, b, c **para que la parábola** $f(x)=a x^2+b x+c$ **tenga un extremo absoluto en el punto** $(2,-4)$ **y su segunda derivada en** $x=2$ **valga** 4 **.**

El extremo absoluto de una parábola coincide con su vértice. Por lo que también será un extremo relativo. Por lo tanto, la primera derivada se anula.

$$f'(2)=0 \rightarrow f'(x)=2 a x+b \rightarrow 4 a+b=0$$

La función pasa por el punto $(2,-4)$.

$$f(2)=-4 \rightarrow 4 a+2 b+c=-4$$

Y finalmente aplicamos la condición sobre la segunda derivada.

$$f''(2)=4 \rightarrow f''(x)=2 a \rightarrow 2 a=4 \rightarrow a=2$$

Sustituimos en las anteriores ecuaciones → $b=-8$, $c=4$

2. Determina los valores a, b, c de la función $f(x)=ax^2+bx+c$ para que tenga un mínimo relativo en $x=2$, pase por el punto $P(0,5)$ y se cumpla que $f'(1)=2$.

Si tengo un mínimo relativo en un punto, la derivada de la función en la abscisa de ese punto se anula.

$$f'(x)=2ax+b \quad \rightarrow \quad f'(2)=0 \quad \rightarrow \quad 4a+b=0$$

Si la función pasa por un punto, las coordenadas del punto satisfacen la ecuación de la función.

$$f(0)=5 \quad \rightarrow \quad c=5$$

Y al tercera condición la aplicamos de forma directa sobre la primera derivada.

$$f'(1)=2 \quad \rightarrow \quad 2a+b=2$$

Resolvemos el sistema 2x2 que nos queda.

$$2a+b=2 \quad \rightarrow \quad b=2-2a$$

Lo llevo a la primera ecuación.

$$4a+b=0 \quad \rightarrow \quad 4a+2-2a=0 \quad \rightarrow \quad a=-1$$

Y por lo tanto:

$$b=4$$

3. Calcula a **y** b **para que la función** $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ **pase por el punto** $(-1,6)$ **y su recta tangente en** $x=1$ **forme un ángulo de** 45° **con el eje OX.**

Si la función pasa por el punto $(-1,6)$ se cumple la relación:

$$f(-1)=6 \quad \rightarrow \quad -1+a-b+2=6 \quad \rightarrow \quad a-b=5$$

Por otro lado, la derivada en $x=1$ es igual a 1 porque $tg(45^{\circ})=1$. Es decir:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \quad , \quad f'(1)=1 \quad \rightarrow \quad 3+2a+b=1 \quad \rightarrow \quad 2a+b=-2$$

Llegamos al siguiente sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$\left\{ \begin{array}{c} a-b=5 \\ 2a+b=-2 \end{array} \right\}$ → Sumamos ambas ecuaciones → $3a=3 \quad \rightarrow \quad a=1 \quad \rightarrow \quad b=-4$

4. Considera la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Determina a,b y c sabiendo que la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ es $y+x+3=0$ y que el punto de inflexión tiene abscisa $x=1$.

La recta normal es perpendicular a la recta tangente. El producto de sus pendientes es igual a -1 .

La recta normal en $x=0$ es $y+x+3=0 \rightarrow y=-x-3 \rightarrow pendiente_{normal}=-1$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $x=0$ es $m_{tangente}=1$. Y sabemos que la pendiente de la recta tangente a la función en un punto coincide con el valor de la derivada de la función en ese punto:

$$f'(0)=1$$

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b \rightarrow f'(0)=b \quad , \quad f'(0)=1 \rightarrow b=1$$

En el punto $x=0$ coinciden la función y la recta normal $y+x+3=0$. Por lo que podemos obtener la imagen de la función en $x=0$ gracias a la ecuación de la recta. Es decir:

$y=-x-3$, si $x=0 \rightarrow y=-3 \rightarrow (0,f(0))=(0,-3)$

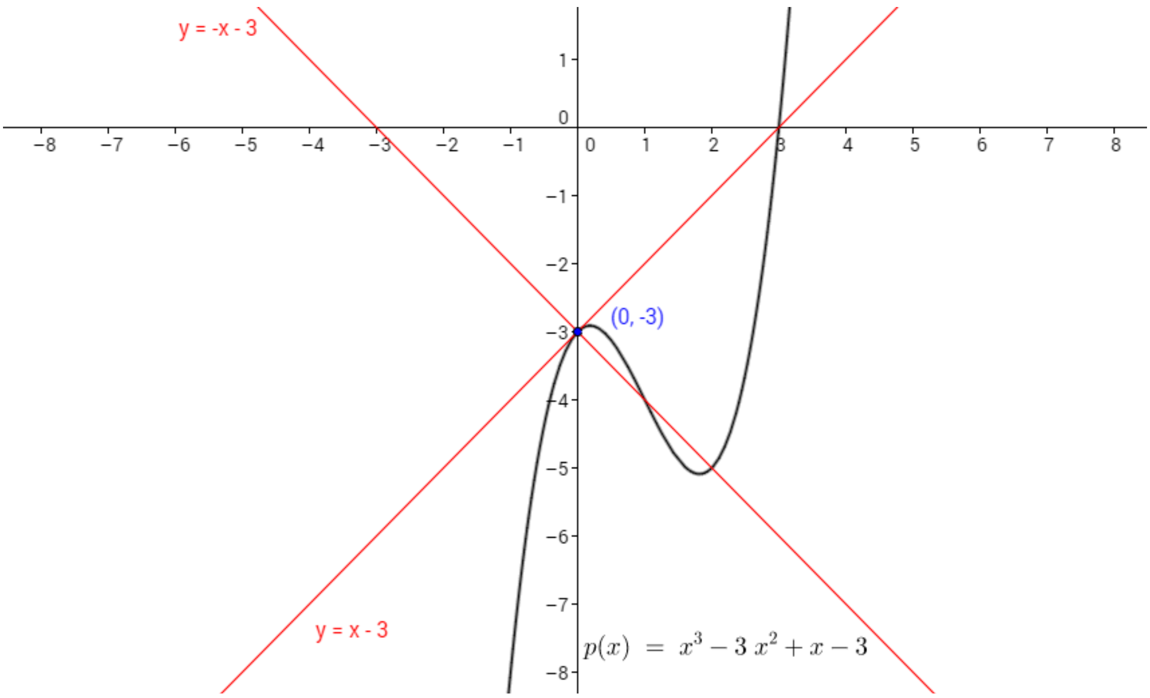
Llevamos este punto a la función, recordando que ya hemos obtenido $b=1$.

$$f(x)=x^3+ax^2+x+c \rightarrow f(0)=c \quad , \quad f(0)=-3 \rightarrow c=-3$$

Finalmente, si tenemos un punto de inflexión en $x=1$ la segunda derivada de la función debe anularse en ese punto.

$$f'(x)=3x^2+2ax+1 \rightarrow f''(x)=6x+2a \quad , \quad f''(1)=0 \rightarrow 6+2a=0 \rightarrow a=-3$$

Con estos valores el polinomio solución resulta $f(x)=x^3-3x^2+x-3$.



5. Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ un polinomio con extremo relativo en $x=1$, con punto de inflexión en $x=3$ y que pasa por el origen de coordenadas. Determinar a, b y c .

La condición necesaria de extremo relativo es primera derivada nula.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \;\rightarrow\; f'(x)=3x^2+2ax+b \;,\; f'(1)=0 \;\rightarrow\; 3+2a+b=0$$

La condición de punto de inflexión es segunda derivada nula.

$$f''(x)=6x+2a \;,\; f''(3)=18+2a \;\rightarrow\; 18+2a=0 \;\rightarrow\; a=-9$$

Si la función pasa por un punto, las coordenadas del punto satisfacen la ecuación de la función.

$$(0,0)\in f(x) \;\rightarrow\; f(0)=0 \;\rightarrow\; c=0$$

De la primera ecuación, si $a=-9$, resulta → $3-18+b=0 \;\rightarrow\; b=15$

6. Sea $f(x)=a x^3+b x^2+c x+d$ un polinomio que cumple $f(1)=0$, $f'(0)=2$, y tiene dos extremos relativos para $x=1$ y $x=2$.
Determinar a, b, c y d . ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

Aplicamos las condiciones del enunciado.

$$f(1)=0 \rightarrow a+b+c+d=0$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad , \quad f'(0)=2 \rightarrow c=2$$

La condición necesaria para extremos relativo es $f'(x)=0$. El enunciado afirma que existen extremos relativos para $x=1$ y $x=2$. Por lo tanto:

$$f'(1)=0 \rightarrow 3a+2b+c=0$$

$$f'(2)=0 \rightarrow 12a+4b+c=0$$

Por lo que llegamos a un sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas.

$$\left\{\begin{matrix} a+b+c+d=0 \\ c=2 \\ 3\mathrm{a}+2\mathrm{b}+c=0 \\ 12\mathrm{a}+4\mathrm{b}+c=0 \end{matrix}\right\}$$

De la segunda ecuación tenemos el valor $c=2$. Sustituyendo este valoren las ecuaciones 3ª y 4ª, obtenemos:

$$\left\{\begin{matrix} 3a+2b=-2 \\ 12a+4b=-2 \end{matrix}\right\}$$

Si la primera fila la multiplicamos por cuatro y le restamos la segunda:

$$4b=-6 \rightarrow b=\frac{-3}{2} \rightarrow a=\frac{1}{3}$$

Y sustituyendo los valores de $a, b \ y \ c$ en la primera ecuación del sistema 4×4 :

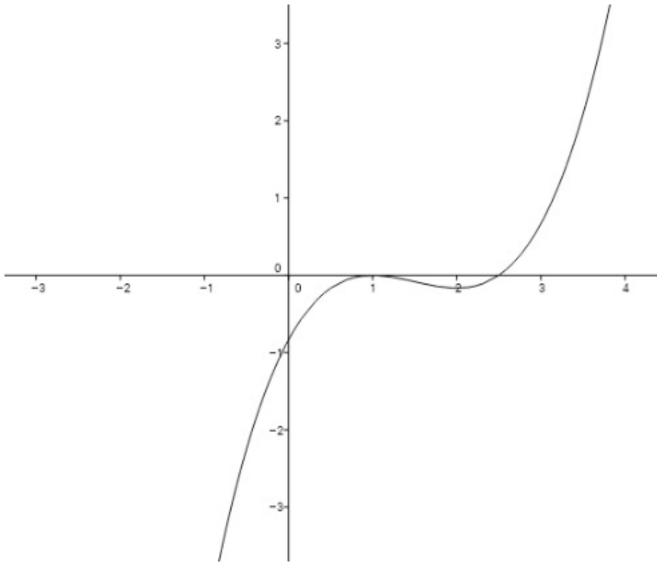
$$d=\frac{-5}{6}$$

La función solución resulta → $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{5}{6}$

Para determinar si los extremos son máximo o mínimos, derivamos dos veces la función obtenida y evaluamos en los extremos.

$$f''(x)=2x-3$$
$$f''(1)=-1<0 \rightarrow \text{ máximo en } (1,0)$$
$$f''(2)=1>0 \rightarrow \text{ mínimo en } \left(2,\frac{-1}{6}\right)$$

En la gráfica y podemos apreciar claramente los extremos relativos (que no absolutos).



7. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica tiene abscisa $x=1$ y que $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x=2$ de valor -9 . Calcula $a,\ b\ y\ c$.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \ \rightarrow\ f'(x)=3x^2+2ax+b \ \rightarrow\ f''(x)=6x+2a$$

Puno de inflexión en $x=1 \ \rightarrow\ f''(1)=6+2a$, $f''(1)=0 \ \rightarrow\ 6+2a=0$

Mínimo relativo en $x=2 \ \rightarrow\ f'(2)=12+4a+b$, $f'(2)=0 \ \rightarrow\ 12+4a+b=0$

Punto de la función $(2,-9) \ \rightarrow\ f(2)=8+4a+2b+c$, $f(2)=-9 \ \rightarrow\ 8+4a+2b+c=-9$

Formamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, de soluciones:

$$a=-3,\ b=0,\ c=-5$$

8. Hallar a, b y c de modo que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ alcance en $x=1$ un máximo relativo de valor 2 , y tenga en $x=3$ un punto de inflexión.

Calculamos la primera y segunda derivada.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f''(x)=6x+2a$

Sustituimos en la primera derivada $x=1$ e igualamos a cero (máximo relativo).

$f'(1)=3+2a+b \rightarrow 3+2a+b=0$

Si el valor de la función es 2 para $x=1$:

$f(1)=2 \rightarrow 2=1+a+b+c \rightarrow 1=a+b+c$

La segunda derivada evaluada en $x=3$ es igual a 0 , al ser punto de inflexión.

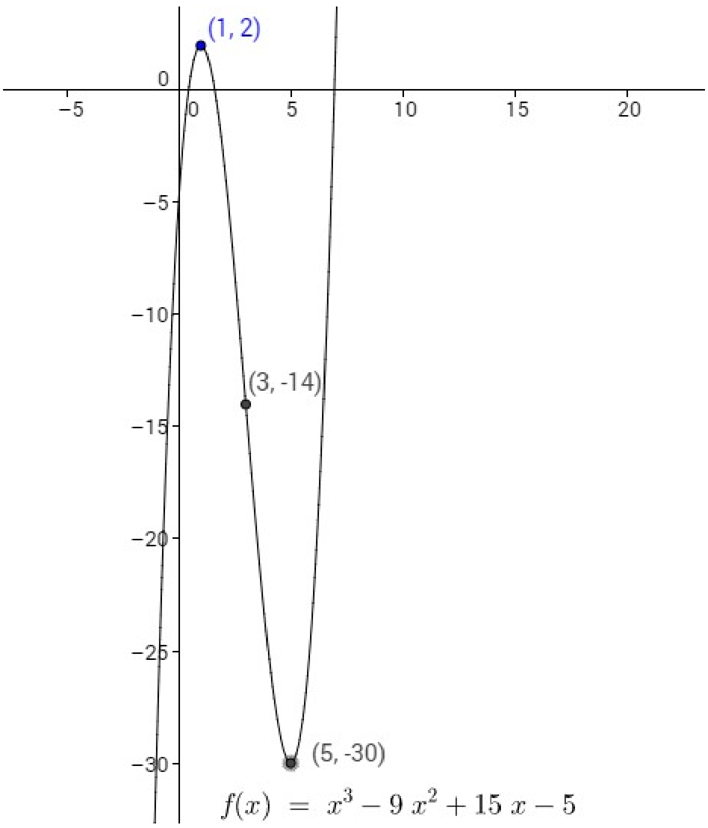
$f''(3)=0 \rightarrow 0=18+2a \rightarrow a=-9$

Con el valor $a=-9$, podemos obtener de las ecuaciones anteriores los otros parámetros.

$b=15$, $c=-5$

Nuestra función resulta → $f(x)=x^3-9x^2+15x-5$

Si representamos la gráfica apreciamos claramente sus extremos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.



9. Dada la función $f(x)=\frac{ax+b}{cx-1}$ calcula los valores de a , b y c sabiendo que $x=\frac{1}{2}$ es una asíntota vertical y que $y=5x-6$ es la recta tangente a su gráfica en el punto $x=1$.

La existencia de una asíntota vertical implica que el denominador debe anularse en $x=\frac{1}{2}$ $\rightarrow$

$$c\cdot\frac{1}{2}-1=0 \;\rightarrow\; c=2$$

Si la recta $y=5x-6$ es tangente a la función en $x=1$, implica que ambas funciones comparten el mismo valor de ordenada para $x=1$ $\rightarrow$ $y=5\cdot 1-6=-1$. Es decir, la función pasa por el punto $(1,-1)$ $\rightarrow$ $f(1)=\frac{a\cdot 1+b}{2\cdot 1-1}=-1$ $\rightarrow$ $a+b=-1$

Si la recta $y=5x-6$ es tangente a la función en $x=1$, por la interpretación geométrica de la derivada, se cumple que $f'(1)$ coincide con la pendiente de la recta, $m=5$. Es decir :

$$f'(x)=\frac{a\cdot(2x-1)-(ax+b)\cdot 2}{(2x-1)^2} \;\rightarrow\; f'(1)=\frac{a\cdot(2-1)-(a+b)\cdot 2}{(2-1)^2}=5$$

$$\frac{a-2a-2b}{1}=5 \;\rightarrow\; -a-2b=5$$

Podemos formar un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\left\{\begin{matrix} a+b=-1 \\ -a-2b=5 \end{matrix}\right\}$$ $\rightarrow$ sumamos ambas ecuaciones $\rightarrow$ $-b=4$ $\rightarrow$ $b=-4$ $\rightarrow$ $a=3$

La función resulta: $f(x)=\frac{3x-4}{2x-1}$

10. Halla la parábola que pasa por $A(-1,-11)$ y cuyo máximo absoluto sea el punto $B(3,5)$.

La parábola es un polinomio de segundo grado del tipo:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

El extremo relativo (vértice de la parábola) también es extremos absoluto. Se obtiene derivando e igualando a cero, sabiendo que ese extremo aparece en $B(3,5)$.

$$f(x)=ax^2+bx+c \rightarrow f'(x)=2ax+b \quad , \quad f'(3)=0 \rightarrow 6a+b=0$$

Si $B(3,5)$ es el vértice, la parábola pasa por ese punto. Es decir:

$$f(3)=5 \rightarrow 9a+3b+c=5$$

El enunciado afirma que la función también pasa por el punto $A(-1,-11)$. Por lo tanto:

$$f(-1)=-11 \rightarrow a-b+c=-11$$

Las tres ecuaciones planteadas generan un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, cuya solución única es:

$$a=-1 \quad , \quad b=6 \quad , \quad c=-4 \rightarrow f(x)=-x^2+6x-4$$

11. Sea la función definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx$. Determina a, b y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en $(1,0)$ y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y=-3x+3$.

Existe un punto de inflexión en $(1,0)$ $\rightarrow$ $f''(1)=0$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \rightarrow f''(x)=6ax+2b \rightarrow 6ax+2b=0$$

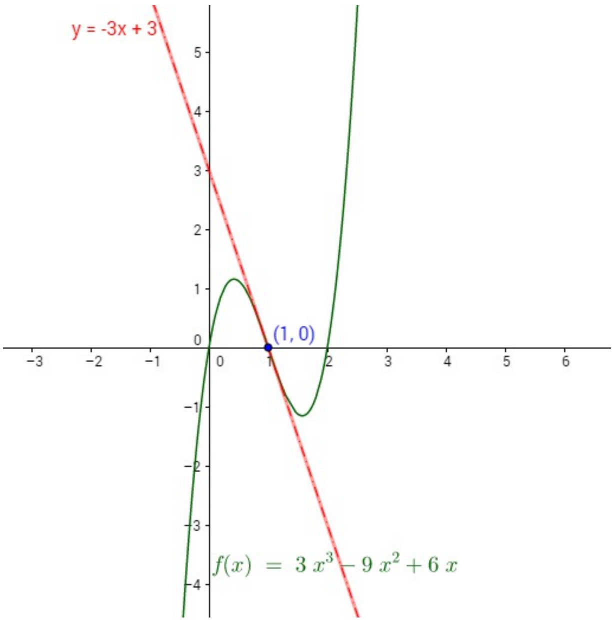
La recta tangente en $(1,0)$ es la recta $y=-3x+3$ → pendiente $m=-3$. La pendiente de la recta tangente coincide con el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(1)=3a+2b+c \quad , \quad f'(1)=-3 \rightarrow 3a+2b+c=-3$$

Como el punto $(1,0)$ pertenece a la gráfica de la función → $f(1)=0$ $\rightarrow$ $a+b+c=0$

Podemos generar un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\left\{\begin{array}{c} 6a+2b=0 \\ 3a+2b+c=-3 \\ a+b+c=0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{solución} \rightarrow \quad a=3, \ b=-9, \ c=6$$



12. Sea $f(x)=\frac{bx}{x-a}$ **. Calcula** a **y** b **para que la función tenga asíntota vertical en** $x=2$ **y asíntota horizontal en** $y=3$ **.**

De la definición de asíntota vertical → $\lim_{x\to 2} \frac{b\cdot x}{x-a}=\infty$

Sustituyo $x=2$ para evaluar la función.

$f(2)=\frac{2b}{2-a}$ → diverge a infinito si el denominador se hace 0 → $a=2$

De la definición de asíntota horizontal → $\lim_{x\to\infty} f(x)= k\,,\quad k\in\mathbb{R}$

Si $k=3$, tendremos asíntota horizontal en $y=3$ → $\lim_{x\to\infty} \frac{bx}{x-2}=3$

Al tener cociente de polinomios de igual grado, el límite en el infinito es el cociente de los coeficientes que acompañan a los términos de mayor grado → $\frac{b}{1}=3$ → $b=3$

13. Dada la curva de ecuación $f(x)=2x^2-3x-1$, halla las coordenadas de los puntos de dicha curva en los que la tangente forma con el eje OX un ángulo de $45°$. Utiliza la definición formal de derivada para realizar la derivación de la función.

El enunciado nos da la función $f(x)=2x^2-3x-1$.

La derivada de la función debe coincidir con la tangente de 45^{o} (ángulo positivo) o de -45^{o} (ángulo negativo), ya que el enunciado no especifica en que sentido es el ángulo que forma la recta con el eje de abscisas.

$$f'(x)=tg(\pm 45^{o})=\pm 1$$

Por lo tanto debemos buscar los puntos de la función donde la pendiente de la recta a la función en ese punto valga 1 ó -1 . Aplicando la definición formal de derivada:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\pm 1=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2-3(x+h)-1-(2x^2-3x-1)}{h}$$

$$\pm 1=\lim_{h\to 0}\frac{h(4x+2h-3)}{h} \to \text{simplificar} \to \pm 1=\lim_{h\to 0}\frac{4x+2h-3}{1} \to \text{evaluar} \to \pm 1=4x-3$$

$$x=1 \quad \text{o} \quad x=\frac{1}{2}$$

$$x=1 \to \text{imagen} \to f(1)=2(1^2)-3(1)-1=-2 \to \text{punto } (1,-2)$$

$$x=\frac{1}{2} \to \text{imagen} \to f(1/2)=2((1/2)^2)-3(1/2)-1=-2 \to \text{punto } (\frac{1}{2},-2)$$

14. Halla los coeficientes a, b y c sabiendo que la función $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $x=1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica pasa por el punto $(1,1)$.

Necesitamos calcular tres parámetros, por lo que debemos buscar tres condiciones.

La primera: la función tiene derivada nula en $x=1 \rightarrow f'(1)=0 \rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b \rightarrow 3+2a+b=0$

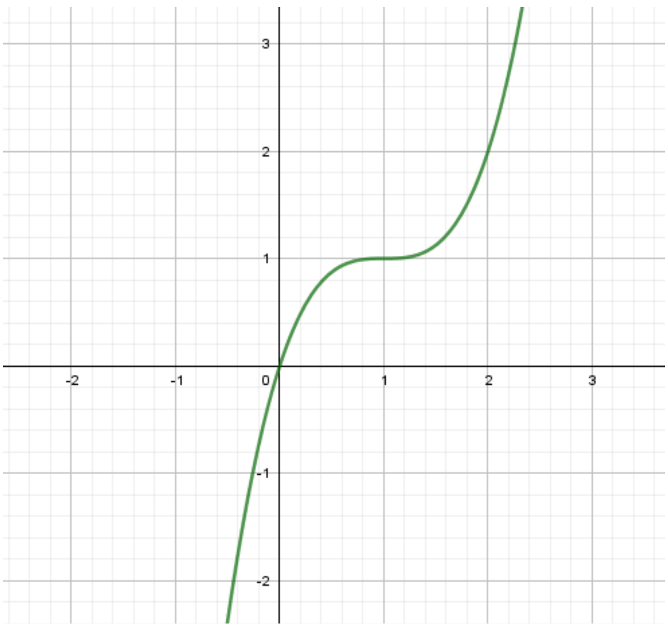
La segunda: si en $x=1$ no hay extremo relativo, significa que la segunda derivada en ese punto no es ni positiva (mínimo) ni negativa (máximo). Por lo tanto, la segunda derivada es nula (condición necesaria de punto de inflexión) $\rightarrow f''(1)=0 \rightarrow f''(x)=6x+2a \rightarrow 6+2a=0 \rightarrow a=-3$

La tercera: si la función pasa por el punto $(1,1) \rightarrow f(1)=1 \rightarrow 1+a+b+c=1 \rightarrow b+c=3$

Si $a=-3$ de la primera condición podemos deducir $\rightarrow 3-6+b=0 \rightarrow b=3$

Y si $b=3$ de la tercera condición resulta $\rightarrow 3+c=3 \rightarrow c=0$

La función solución resulta $f(x)=x^3-3x^2+3x$



15. Dadas las funciones $f(x)=x^2-ax-4$ y $g(x)=\frac{x^2}{2}+b$, halla los valores de a y b de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tengan la misma recta tangente en el punto $x=3$. Halla la ecuación de la recta.

Si dos funciones comparten la misma recta tangente en $x=3$, significa que la derivada de las funciones evaluadas en $x=3$ coinciden → $f'(3)=g'(3)$ → Recordamos que la derivada evaluada en punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$$f'(x)=2x-a \quad , \quad g'(x)=x \quad \rightarrow \quad f'(3)=g'(3) \quad \rightarrow \quad 6-a=3 \quad \rightarrow \quad a=3$$

Con este valor $a=3$ se confirma que la pendiente es $m=f'(3)=g'(3)=3$

Además, las dos funciones deben cortarse en el punto $x=3$, ya que comparten la misma recta tangente en ese punto → $f(3)=g(3) \rightarrow 9-a\cdot 3-4=\frac{9}{2}+b$ → Como $a=3 \rightarrow b=\frac{-17}{2}$

Solo falta obtener la recta tangente. Tenemos el punto $x=3$ y la pendiente $m=3$. Debemos obtener la imagen del punto para poder aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta. La imagen del punto la podemos sacar de cualquier función, ya que en $x=3$ coinciden la recta tangente y las dos funciones.

$$f(3)=9-9-4=-4$$

Y la recta será → $m=\frac{y-f(x_0)}{x-x_0} \rightarrow 3=\frac{y+4}{x-3} \rightarrow y=3x-13$

16. Determinar a, b, c, d para que $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ posea un extremo relativo en $x=0$, un punto de inflexión en $(1,0)$ y para que la pendiente de la recta tangente en el punto de inflexión sea igual a -3 .

Nos piden cuatro parámetros, por lo que del enunciado deberemos obtener cuatro condiciones para formar un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

De la condición necesaria de extremo relativo → $f'(x)=0 \rightarrow c=0$

Si la función pasa por $(1,0) \rightarrow f(1)=0 \rightarrow a+b+c+d=0$

De la condición necesaria de punto de inflexión → $f''(x)=0 \rightarrow 6a+2b=0$

Y de la interpretación geométrica de la derivada podemos deducir que el valor de la derivada de la función en $x=1$ es $-3 \rightarrow f'(1)=-3 \rightarrow 3a+2b+c=-3$

Con estas cuatro condiciones formamos un sistema, de solución general → $a=1, b=-3, c=0, d=2$

17. Halla los valores a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f(x)=\frac{a x^2+b}{x+c}$ tiene una asíntota vertical en $x=1$, una asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo local en el punto de abscisa $x=3$

Si existe A.V. en $x=1$ el denominador debe anularse en ese valor → $1+c=0 \rightarrow c=-1$

Si hay A.O. con pendiente igual a 2, por la definición → $2=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a x^2+b}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ indeterminación → Dividimos todo por la máxima potencia → $2=\frac{a}{1} \rightarrow a=2$

Si existe extremo relativo en $x=3 \rightarrow f'(3)=0 \rightarrow f'(x)=\frac{4x(x-1)-(2x^2+b)}{(x-1)^2} \rightarrow$

$$f'(x)=\frac{4x^2-4x-2x^2-b}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x-b}{(x-1)^2} \rightarrow f'(3)=\frac{6-b}{4}=0 \rightarrow b=6$$