

$x^2 + y^2 = z^2 + w^2$. *Parametriserede løsninger.*

$$x^2 + y^2 = z^2 + w^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - z^2 = w^2$$

Undersøger ligningen $x^2 + y^2 - z^2 = w^2$

$$x^2 + y^2 - z^2 \text{ er kvadrattal} \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{Z}: y^2 - z^2 = 2xi + i^2 \Leftrightarrow y^2 - z^2 - i^2 = 2xi$$

$$y^2 - z^2 - i^2 = 2xi \Leftrightarrow y^2 - z^2 - i^2 \equiv 0 \text{ Mod}(2) \wedge y^2 - z^2 \equiv 0 \text{ Mod}(i)$$

$$y^2 - z^2 \equiv 0 \text{ Mod}(i) \Leftrightarrow y + z \equiv 0 \text{ Mod}(i) \vee y - z \equiv 0 \text{ Mod}(i)$$

$$B1: y + z \equiv 0 \text{ Mod}(i), B2: y - z \equiv 0 \text{ Mod}(i)$$

$$A1: y \equiv 0 \text{ Mod}(2) \wedge z \equiv 0 \text{ Mod}(2) \wedge i \equiv 0 \text{ Mod}(2)$$

$$A2: y \equiv 0 \text{ Mod}(2) \wedge z \equiv 1 \text{ Mod}(2) \wedge i \equiv 1 \text{ Mod}(2)$$

$$A3: y \equiv 1 \text{ Mod}(2) \wedge z \equiv 1 \text{ Mod}(2) \wedge i \equiv 0 \text{ Mod}(2)$$

$$y^2 - z^2 - i^2 \equiv 0 \text{ Mod}(2) \Leftrightarrow A1 \vee A2 \vee A3$$

Løse tilfældene $A1 \wedge B1$

$$A1 \wedge B1.$$

$$y \equiv 0 \text{ Mod}(2) \wedge z \equiv 0 \text{ Mod}(2) \wedge i \equiv 0 \text{ Mod}(2) \wedge y + z \equiv 0 \text{ Mod}(i)$$

$$y = 2a, z = 2b, i = 2c, y + z = 2(a + b), 2(a + b) = id = 2cd, a = cd - b, y = 2(cd - b)$$

$$y^2 - z^2 - i^2 = (2(cd - b))^2 - 4b^2 - 4c^2 = -8bcd + 4c^2d^2 - 4c^2$$

$$x = \frac{y^2 - z^2 - i^2}{2i} = \frac{y^2 - z^2 - i^2}{4c} = cd^2 - 2bd - c$$

$$w^2 = x^2 + y^2 - z^2 = (cd^2 - 2bd - c)^2 + (2(cd - b))^2 - 4b^2 = (2bd - cd^2 - c)^2$$

$$w = 2bd - cd^2 - c$$

$$x = cd^2 - 2bd - c$$

$$y = 2(cd - b)$$

$$z = 2b$$

$$w = 2bd - cd^2 - c$$

Ved anvendelse af denne fremgangsmetode i de seks forskellige tilfælde $A1 \wedge B1$ og efterfølgende kontrol for ens løsninger kan man eliminere fire styk og nå frem til de nedenstående to parametriseringer.↓

Parametrisering af løsningerne til den diofantiske ligning

$$x^2 + y^2 = z^2 + w^2. \text{ Parametriserede løsninger.}$$

Heine Strømdahl, 18 - 10 - 2025.

Parametrisering af løsningerne til den Diofantiske ligning

$$x^2 + y^2 = z^2 + w^2$$

$(a, b, c) \in \mathbb{Z}$.

$x = a$ $y = ac + b(c^2 + 1)$ $z = ac + b(c^2 - 1)$ $w = a + 2bc$	$x = a$ $y = 2c^2(2b + 1) + (2c + 1)(a + 2b + 1)$ $z = 2c^2(2b + 1) + 2c(a + 2b + 1) + a$ $w = (2b + 1)(2c + 1) + a$
---	--

Fortegnet på a kan oplagt skiftes, så parametriseringerne kan formuleres med $\pm$ foran ethvert a .

Resultaterne kan verificeres ved indtastning i et CAS – værktøj, her GeoGebra:

1	$x=a$ $\rightarrow x = a$
2	$y = 2c^2(2b+1) + (2c+1)(a+2b+1)$ $\rightarrow y = 2c^2(2b+1) + (2c+1)(a+2b+1)$
3	$z = 2c^2(2b+1) + 2c(a+2b+1) + a$ $\rightarrow z = 2c^2(2b+1) + 2c(a+2b+1) + a$
4	$w = (2b+1)(2c+1) + a$ $\rightarrow w = (2b+1)(2c+1) + a$
5	$x^2 + y^2 - z^2 - w^2$ $\rightarrow -w^2 + x^2 + y^2 - z^2$
6	$(a)^2 + (2c^2(2b+1) + (2c+1)(a+2b+1))^2 - (2c^2(2b+1) + 2c(a+2b+1) + a)^2 - ((2b+1)(2c+1) + a)^2$ $\rightarrow 0$

Heine Strømdahl, 17-10-2025.

SDG

$x^2 + y^2 = z^2 + w^2$. Parametriserede løsninger.

Heine Strømdahl, 18-10-2025.