

# Nove mogućnosti digitalnog alata GeoGebra u online okruženju za učenje

dr. sc. Željka Dijanić, prof. savjetnik

Srednja škola Čazma

## Sažetak:

GeoGebra je u hrvatskim školama prisutna nešto više od deset godina. Međutim, unazad godinu ili dvije uočava se njezin ubrzani razvoj (poput eksponencijalnog rasta) pa se nastavnici znaju poprilično iznenaditi kada vide što u GeoGebri rade kolege koji redovito prate njen razvoj.

Stoga se u ovome radu prikazuju trenutno aktualne mogućnosti GeoGebre kao digitalnog alata koji se prilagođava zahtjevnima suvremenog digitalnog doba i na određeni način okreće ideji virtualnih zajednica kakve vidimo na društvenim mrežama. Opisuje se novo sučelje online portala GeoGebre, navode se različite GeoGebra aplikacije i za mrežno i za vanmrežno pokretanje, kao i ubrzani vodiči za rad s tim aplikacijama.

Kao primjer GeoGebra aktivnosti, odnosno radnih listova s obogaćenim sadržajem uporabom nekih novih elemenata, prikazuje se digitalna knjiga *Četiri karakteristične točke trokuta* i opisuju neke aktivnosti iz te knjige. Putem sustava GeoGebra grupa omogućeno je stvaranje virtualnih razreda unutar kojih nastavnici dijeli takve digitalne sadržaje i zadatke svojim učenicima, prati njihov napredak, vrednuje njihove radove i daje im povratne informacije o uspješnosti.

**Ključne riječi:** digitalna knjiga, GeoGebra aktivnost, GeoGebra aplikacija, GeoGebra grupa, interaktivni aplet, ubrzani vodič, učenje otkrivanjem, virtualni razred, vrednovanje

## O GeoGebri

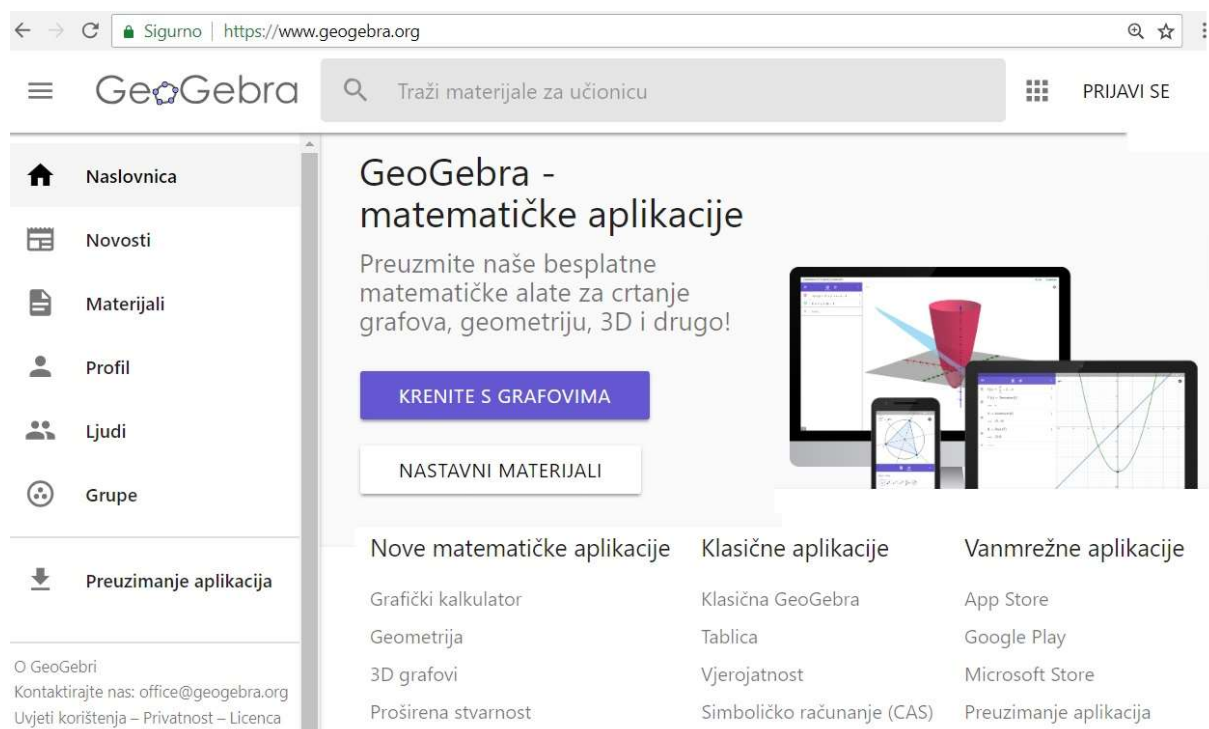
GeoGebra je računalni program namijenjen poučavanju i učenju matematike i srodnih znanosti poput fizike, od osnovnoškolske do sveučilišne razine. Razvoj programa započeo je Markus Hohenwarter na Sveučilištu u Salzburgu 2001. godine. Zamišljen kao program dinamične geometrije koristio se za izradu dinamičnih konstrukcija geometrijskih objekata, što dozvoljava jednostavnu promjenu njihova položaja pri čemu matematički odnosi među objektima ostaju sačuvani. Za razliku od ostalih sličnih programa, GeoGebra je već tada imala

dva prozora – algebarski i geometrijski, što je omogućavalo višestruki prikaz matematičkih objekata, primjerice za kružnicu konstruiranu u geometrijskom prozoru prikazana je jednadžba u algebarskom prozoru. Od samoga početka GeoGebra je program otvorenoga koda zahvaljujući čemu se Hohenwarteru ubrzo pridružio cijeli tim razvojnih programera, dizajnera i prevoditelja širom svijeta koji su prepoznali potencijal ovoga programa tako da danas imamo moćan digitalni alat za nastavu matematike s nebrojenim mogućnostima. A korisnici diljem svijeta svojim radovima pokazuju da mašta u kreiranju digitalnih sadržaja i načina uporabe GeoGebre nema granica.

GeoGebra je digitalni alat koji objedinjuje elemente geometrije, algebre, analize, statistike, vjerojatnosti, 3D geometrije, simbolično računanje (CAS), tablične izračune i sl. Dostupna je na više platformi sa svojim desktop aplikacijama za Windows, macOS i Linux, s tablet aplikacijama za Android, iPad i Windows te s web aplikacijom koja se temelji na HTML5 tehnologiji. Na online portalu GeoGebre ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)) bogati je repozitorij gotovih materijala s mogućnošću slobodnog korištenja prema *Creative Commons* licenci, a omogućeno je i stvaranje zajednica po uzoru na grupe s društvenih mreža te formiranje virtualnih razreda za praćenje i vrednovanje rada učenika.

Svakodnevna nastavna praksa pokazuje da je GeoGebra nezaobilazan digitalni alat u pripremi i provedbi nastave matematike. Prije nastave s pomoću GeoGebre nastavnici pripremaju zadatke, provjeravaju i/ili „uštimaavaju“ rješenja, izrađuju slike za nastavne listiće ili pisane provjere i slično. U nastavi se GeoGebra koristi za demonstraciju motivacijskih primjera ili uvođenje novih koncepata, za vizualizaciju složenijih sadržaja i simulaciju različitih procesa, za postavljanje hipoteza i dokazivanje tvrdnji, za samostalno otkrivanje novih znanja, za uvježbavanje matematičkih procedura, za provjeru rješenja zadataka, za rad na projektima u nastavi, ali i za praćenje i vrednovanje učeničkog napretka. Svim korisnicima GeoGebre putem online prijave omogućeno je skladištenje vlastitih materijala kako bi im bili dostupni gdje god se nalazili, organiziranje vlastitih i tuđih materijala u digitalne knjige po poglavljima, dodavanje tekstualnih ili slikovnih uputa za rad učenika, dodavanje pitanja otvorenog ili višestrukog odgovora s mogućnošću trenutne povratne informacije, dodavanje video uradaka i ono najbitnije, jednoga ili više interaktivnih apleta koji omogućuju eksperimentalan rad učenika i otkrivanje novih znanja. Zajednica GeoGebrinih korisnika iznimno je suradnički orijentirala, većina korisnika stavlja svoje radove javno dostupne ostalim kolegama širom svijeta. Može se tu naći širok spektar matematičkih tema i ideja na različitim jezicima, a sustav dozvoljava kopiranje tuđega rada (uz automatsko navođenje izvora) i relativno jednostavno prevođenje teksta na hrvatski jezik.

## Novo sučelje portala GeoGebre, dostupne aplikacije i vodiči za korištenje



**Slika 1. Novo korisničko sučelje online portala GeoGebre**

Od svibnja 2018. godine online portal GeoGebre poprimio je bitno drugačije novo korisničko sučelje (Slika 1.). S lijeve strane je izbornik koji sadrži:

Naslovnica – nude se nove i klasične matematičke GeoGebra aplikacije (prikazano na Slici 1), vodiči za korištenje tih aplikacija i razni tutorijali o mogućnostima GeoGebre, najnoviji i najpopularniji materijali autora širom svijeta

Novosti – javne objave GeoGebra Tima u GeoGebra News i objave autora koje pratite o njihovim novim materijalima

Materijali – mogućnost pretraživanja postojećih materijala prema autoru, ključnim riječima, tipu materijala (cijelih knjiga ili pojedinačnih aktivnosti), pregledavanje, dodavanje i organiziranje vaših radova i vaših omiljenih radova (drugih autora) u knjige

Profil – pregledavanje i izmjena vlastitog profila, dodavanje novih materijala

Ljudi – pretraživanje i praćenje registriranih autora (i pregledavanje njihovih radova), pregled vaših pratitelja i osoba koje vi pratite

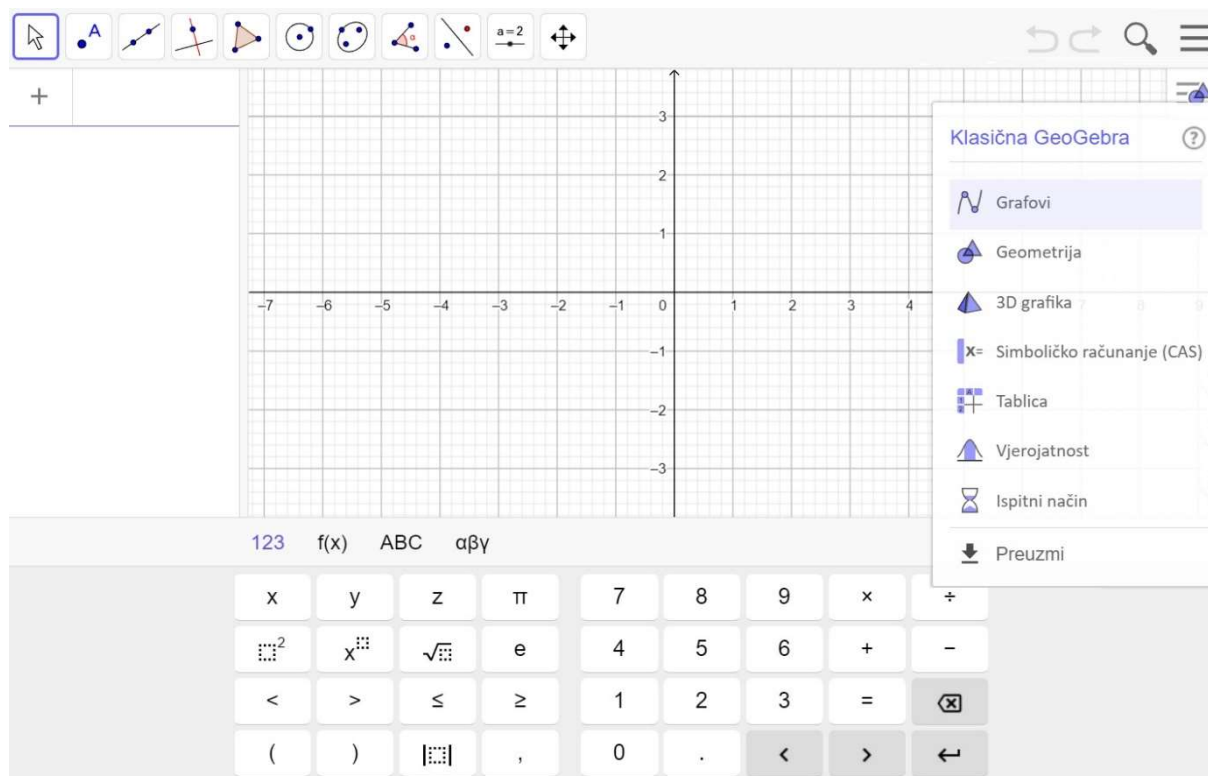
Grupe – pretraživanje vaših grupa, pridruživanje drugim grupama i kreiranje novih grupa za virtualnu suradnju

Preuzimanje aplikacija – ovdje se mogu preuzeti besplatne vanmrežne GeoGebra aplikacije za desktop računala, tablete i mobitele.

GeoGebra se može koristiti:

- mrežno – kao online aplikacija koja se pokreće s portala GeoGebre ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org))
- vanmrežno - preuzimanjem programa i instaliranjem na računalo.

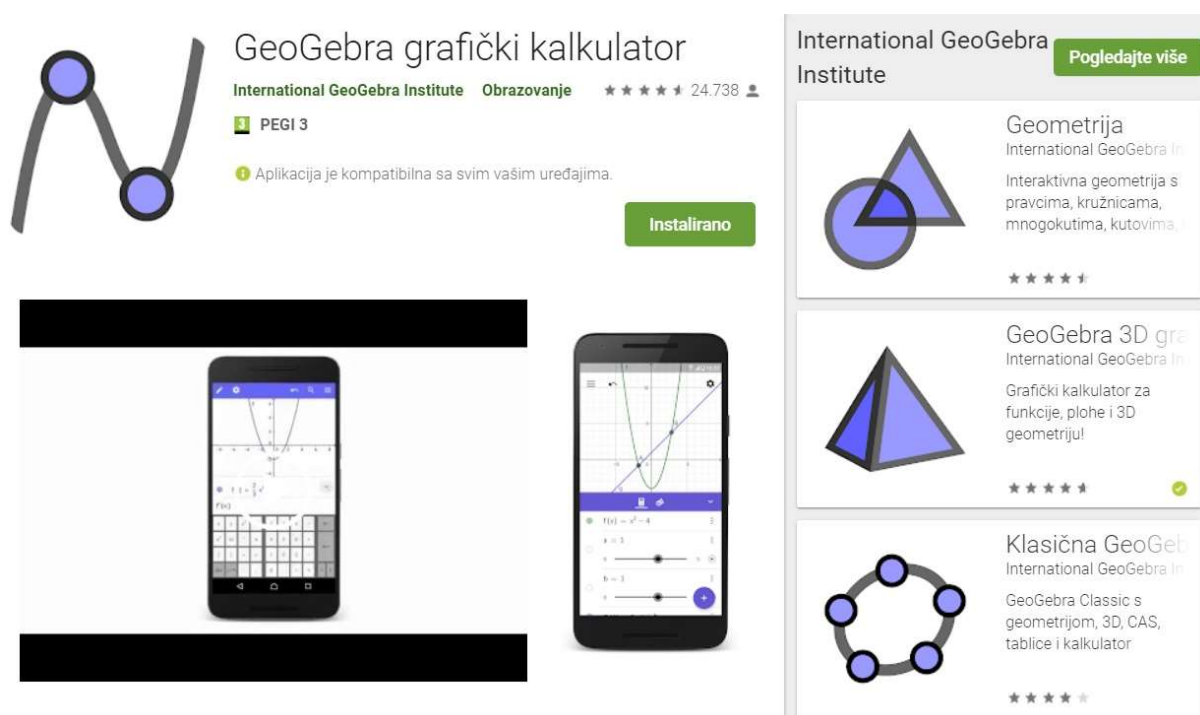
Mrežno se može pokrenuti Klasična GeoGebra (Slika 2.) koja sadrži nekoliko različitih prikaza: Grafovi, Geometrija, 3D grafika, Simboličko računanje (CAS), Tablica, Vjerojatnost i Ispitni način (za ograničenu uporabu GeoGebre tijekom pisanih provjera znanja). Ima ugrađenu alatnu traku pri vrhu, polje za unos s lijeve strane, koordinatni sustav (u prikazu Grafovi) i tipkovnicu u donjem dijelu što je pogodno za korištenje na pametnim ekranima. Također, u trenutku pisanja ovoga rada u ponudi su i četiri zasebne mrežne aplikacije za desktop računala: Grafički kalkulator, Geometrija, 3D grafovi i Proširena stvarnost.



**Slika 2. Sučelje mrežne Klasične GeoGebre**

Aplikacije, odnosno instalacije za vanmrežno korištenje dostupne su u glavnom izborniku portala GeoGebre pod Preuzimanje aplikacija za operacijske sustave iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook i Linux, a trenutno su u ponudi: Grafički kalkulator, 3D grafovi, Geometrija, Klasična GeoGebra 6, Proširena stvarnost i Klasična GeoGebra 5.

Postoji i nekoliko aplikacija za tablet računala i mobitele koje se mogu preuzeti s App Store, Google Play (Slika 3.) ili Microsoft Store.



**Slika 3. GeoGebra aplikacije na Google Play**

Budući da GeoGebra sadrži više različitih aplikacija i/ili različitih prikaza kao i nebrojeno mnogo mogućnosti, vrijedni tim Međunarodnog GeoGebra Instituta i prevoditelja diljem svijeta korisnicima nastoji olakšati snalaženje u programu GeoGebra izradom i/ili prevođenjem ubrzanih vodiča za korištenje u obliku digitalnih knjiga. Upišete li riječ *vodič* u tražilicu Materijala, nudi se poveći pregled vodiča na hrvatskom jeziku: GeoGebra geometrija - ubrzani vodič, GeoGebra algebra - ubrzani vodič, GeoGebra CAS - ubrzani vodič za simboličko računanje (CAS), GeoGebra 3D geometrija - ubrzani vodič, GeoGebra tablica - ubrzani vodič, GeoGebra vjerojatnost i statistika - ubrzani vodič, GeoGebra knjiga - tako lako!, GeoGebrine grupe, GeoGebrin ispit, Trikovi i kratice za ugodan rad i sl.

### **Digitalni materijali – aktivnosti i knjige**

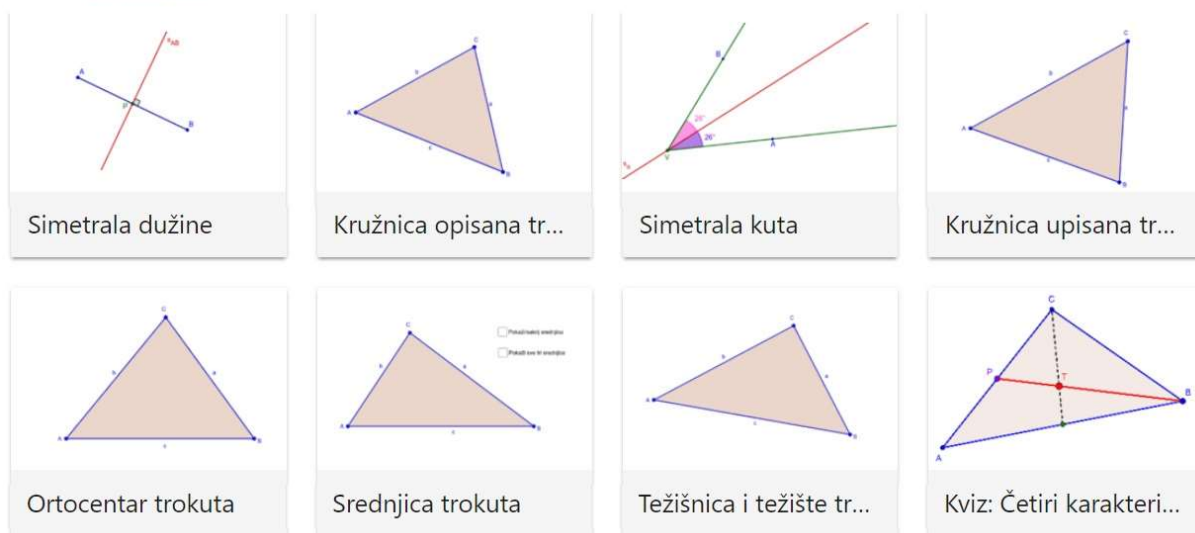
Digitalni online materijali GeoGebre prvobitno su kreirani u obliku *mathleta* i sadržavali su samo tekstualnu uputu ili zadatak i interaktivni aplet generiran iz *geogebri*. Unazad nešto više od godinu dana u tada zvane radne listove omogućeno je dodavanje sljedećih elemenata: tekst, GeoGebra aplet, web, pitanje, video, slika i pdf datoteka. Danas se tako kreirani digitalni materijali na portalu GeoGebre nazivaju *aktivnostima*. Aktivnosti se mogu pregledno organizirati u digitalne udžbenike zvane *knjige*. Jedna knjiga može sadržavati više poglavlja

(tako su kreirani prethodno spomenuti ubrzani vodiči za rad u GeoGebri), a osim vlastitih radova (aktivnosti) u knjige se mogu dodavati i radovi drugih autora, pa čak i organizirati vama omiljene radove po razredima, cjelinama i slično unutar jedne ili više knjiga.

Kao primjer knjige u ovome se radu prikazuje knjiga *Četiri karakteristične točke trokuta* (Slika 4.) koju je autorica rada osmislila i samostalno izradila za potrebe usvajanja novih matematičkih sadržaja u 1. razredu opće gimnazije u Srednjoj školi u Čazmi, a uspješno su ove materijale koristili i osnovnoškolci u Centru izvrsnosti Bjelovarsko-bilogorske županije. Knjiga je javno dostupna za korištenje svim zainteresiranim korisnicima, a lako ju se pronade pomoću tražilice u Materijalima (ili putem linka <http://www.geogebra.org/m/axnVYGkw>).

## Četiri karakteristične točke trokuta

Autor: Željka Dijanić



**Slika 4. Knjiga *Četiri karakteristične točke trokuta***

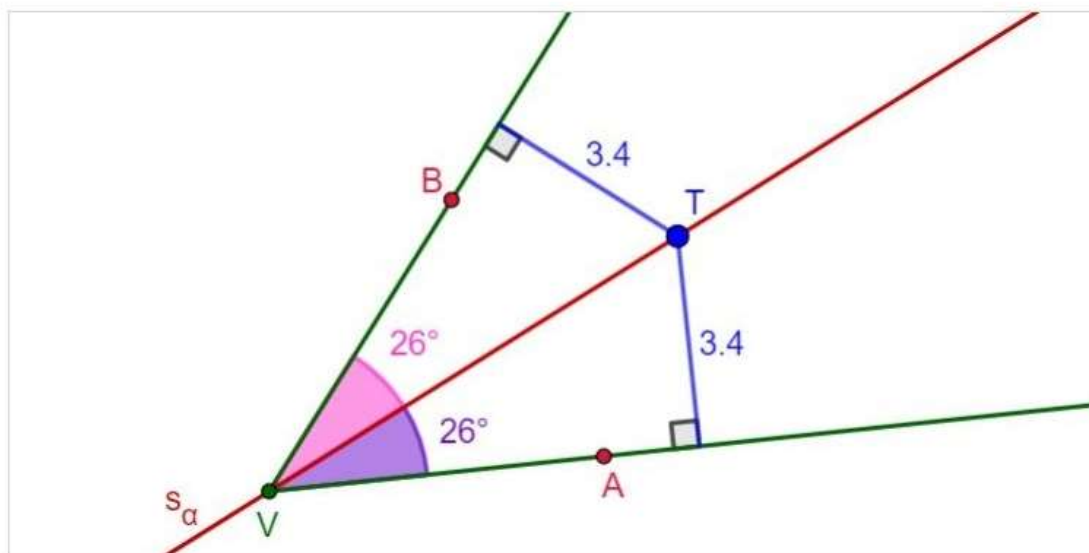
Budući da je učenje otkrivanjem jedna od učinkovitijih nastavnih metoda u nastavi matematike, upravo je to glavna ideja aktivnosti sadržanih u knjizi *Četiri karakteristične točke trokuta*. Učenike se potiče da samostalno istražuju zadani matematički koncept ili problem i tako *otkrivaju nove istine*, što potom na određeni način trebaju prikazati nastavniku, bilo da zapišu vlastiti zaključak, riješe zadatak ili izvedu zadanu konstrukciju. Pogledajmo primjer aktivnosti za *otkrivanje* definicije i poučka o simetrali kuta (Slika 5.).

## O simetrali kuta

Pravac  $s_a$  je simetrala kuta  $\angle AVB$ .

Veličinu i položaj kuta možete mijenjati pomicanjem točaka A, B i V. Uočite definiciju:

**Simetrala kuta** je pravac koji prolazi vrhom kuta i dijeli ga na dva sukladna dijela.



Pomičite točku T na simetrali kuta. Što uočavate?

Ovo se svojstvo naziva *Poučak o simetrali kuta*.

Pokušajte iskazati *Poučak o simetrali kuta* svojim riječima!

Upišite svoj odgovor ovdje ...

### Slika 5. Aktivnost O simetrali kuta

Valja napomenuti kako učenici jako dobro prihvaćaju učenje s pomoću digitalne tehnologije, ali potrebno im je neko vrijeme da se naviknu samostalno pratiti upute i uraditi sve zadatke. U aktivnosti *O simetrali kuta* (Slika 5.) je stoga na početku dana definicija simetrale kuta, a od učenika se očekuje da osvijestite taj pojam pomicanjem određenih točaka i promatranjem veličine kutova unutar interaktivnog apleta. Zatim slijedi teži dio kada treba uočiti, a potom i formulirati iskaz poučka o simetrali kuta. Ovaj je zadatak učenicima dosta zahtijevan, oni *vide* da je udaljenost svake točke simetrale kuta do krakova jednaka, ali ne znaju kako bi to svojim riječima zapisali. Stoga je metodička vrijednost ovakvog načina rada u razredu još i veća – učenike se poučava točnom i matematički preciznom izražavanju. Unutar ove aktivnosti nalazi se još jedan interaktivni aplet s dokazom poučka o simetrali kuta pomoću KSK poučka o sukkladnosti trokuta.

## GeoGebra grupe – stvaranje virtualnog razreda i vrednovanje rada učenika

Unazad godinu dana programerski tim GeoGebre uveo je mogućnost organiziranja korisnika u grupe, odnosno virtualne razrede što je itekako pogodno za praćenje samostalnog rada učenika. Nastavnik kreira grupu i putem automatski generiranog koda poziva u nju svoje učenike. Grupa služi virtualnoj suradnji, razmjeni poruka između učenika i nastavnika, zajedničkom dijeljenju materijala i zadataka, predaji učeničkih radova, vrednovanju učeničkih radova i davanju povratne informacije učeniku. Zadaci se zadaju u obliku prethodno opisanih aktivnosti, a od učenika se može tražiti da s pomoću GeoGebrinih alata izradi neku konstrukciju, da riješi određeni broj slučajno generiranih zadataka, da odgovori na pitanja otvorenog ili zatvorenog tipa, da uoči neko svojstvo, da zapiše vlastiti zaključak i sl. Napredak svih učenika u jednom virtualnom razredu i vrednovanje njihova rada prikazuje se u obliku tablice (Slika 6.), a odabirom određenog učenika i određene aktivnosti vidi se kako je učenik riješio zadatak (Slika 7).

Objave    Članovi    Materijali    ✓ Vrednovanje

Filteri:    Četiri karakteristične točke trokuta

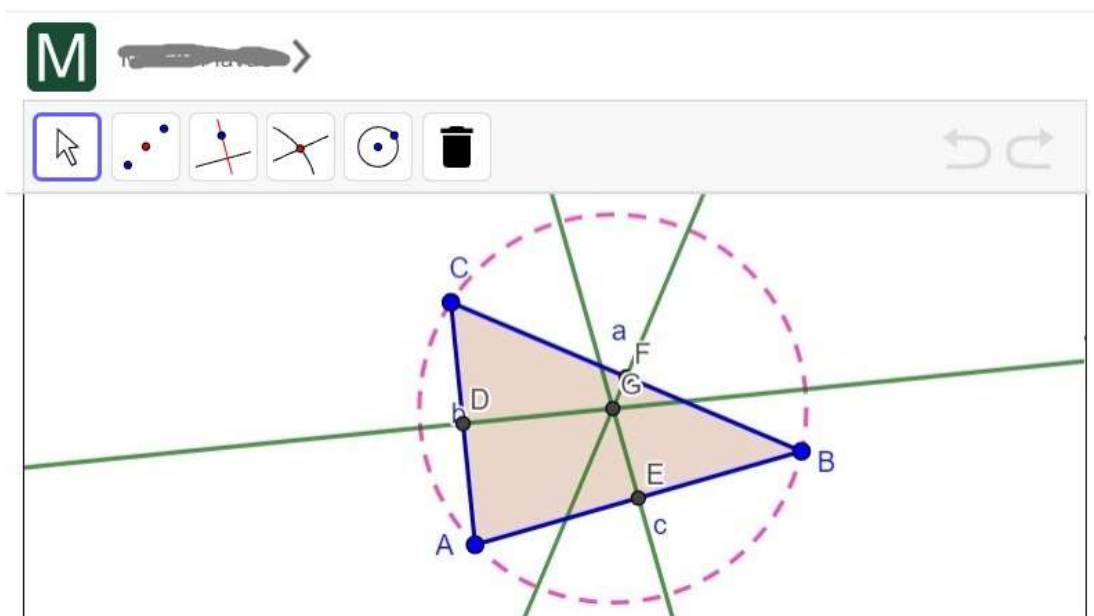
Antonija Mirošević	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓
Kristina Kečec	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓
Leana Martić	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓
Luka Žvacki	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✓
Martin Vrbosarić	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✗
Nika Plavec	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓
Geru Slavac	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✓
Sanja Nika	✓	✓	✗	✓	✗	✗	✓
Željka Učenjak	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✓
Mladen Vuglić	✗	✓	✗	✓	✗	✗	✓

Slika 6. Vrednovanje u virtualnom razredu - GeoGebra grupi

Rad u GeoGebrinoj grupi pogodan je za formativno vrednovanje. Svakome se učeniku daje povratna informacija o točnosti rješenja svakog zadatka te ga se može uputiti da zadatak popravi ili riješi ispočetka. Slika 7. prikazuje rješenje zadatka jednog učenika iz aktivnosti *Kružnica opisana trokutu* te komentar nastavnika na predani rad. Konstrukcija kružnice opisane



trokutu je točno izvedena (pomicanjem vrhova trokuta kružnica je i dalje opisana), učenik je uočio tri slučaja gdje se može nalaziti središte opisane kružnice trokutu i opisao ih, a nastavnik pohvaljuje njegov rad (Bravo!) i upućuje ga da bude precizniji u zaključku za slučaj pravoga kuta.



Kružnica koja prolazi kroz sva tri vrha trokuta naziva se **kružnica opisana trokutu**. Njeno je središte sjecište simetrala stranica trokuta.

Pomičite vrhove trokuta A, B i C pa promatrajte položaj središta opisane kružnice.

Gdje se može nalaziti središte opisane kružnice trokutu? O čemu to ovisi?

Zapišite svoja razmišljanja za sva tri slučaja.

<b>A</b>	Za šiljastokutan : središte je unutar trokuta
$f_x$	Za pravokutan: središte je na hipotenuzi trokuta
	Za tupokutan: središte je izvan trokuta



Željka Dijanić prije 2 minute

Bravo 👍

Ali budi još precizniji za slučaj pravokutnog trokuta, gdje na hipotenuzi?

**Slika 7. Odgovor učenika i povratna informacija nastavnika**

## Zaključak

Možemo zaključiti da se GeoGebra brzo i kontinuirano razvija i neprestano prilagođava suvremenom digitalnom dobu (primjerice stvaranjem grupa kao virtualnih zajednica), a za očekivati je da će se takav razvoj nastaviti i ubuduće. Koliko god to bilo dobro, pozitivno i napredno, za prosječnog GeoGebra korisnika može biti i previše. Ipak, nemojte da vas izmjena sučelja ili nova verzija aplikacije u budućnosti obeshrabre. Pratite razvoj programa koliko

možete, stvarajte svoje materijale znanjem koje imate, učite od drugih (naprednijih) kolega – preuzmite njihov rad i prilagodite si ga. Puno se može naučiti prateći dobrog učitelja. Stoga izradite ili obnovite svoj popis GeoGebra autora koje pratite na portalu GeoGebre. I pridružite se grupi *GeoGebra u školi* na FaceBooku.