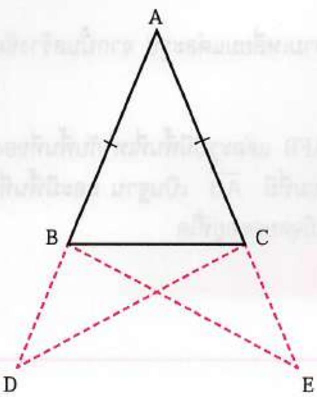
4.3 การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม

นักเรียนรู้จักทฤษฎีบทที่กล่าวถึงเงื่อนไขเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปมาแล้ว ในหัวข้อนี้จะนำทฤษฎีบทเหล่านั้นมาใช้อ้างอิงในการพิสูจน์สมบัติที่สำคัญบางประการของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน แล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากัน



กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $AB = AC$

ต้องการพิสูจน์ว่า $A\hat{C}B = A\hat{B}C$

พิสูจน์ ต่อ $\overline{AB}$ ออกไปทางจุด B จนถึงจุด D และต่อ $\overline{AC}$ ออกไปทางจุด C จนถึงจุด E โดยให้ $AD = AE$
ลาก $\overline{BE}$ และ $\overline{CD}$

พิจารณา ΔABE และ ΔACD

	$AB = AC$	(กำหนดให้)
	$B\hat{A}E = C\hat{A}D$	(เป็นมุมเดียวกัน)
	$AE = AD$	(จากการสร้าง)
ดังนั้น	$\Delta ABE \cong \Delta ACD$	(ด.ม.ด.)
จะได้	$BE = CD$	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)
และ	$A\hat{E}B = A\hat{D}C$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

พิจารณา ΔBCE และ ΔCBD

เนื่องจาก	$AE - AC = AD - AB$		(สมบัติของการเท่ากัน)
จะได้	$CE = BD$		(สมบัติของการเท่ากัน)
เนื่องจาก	$BE = CD$ และ $A\hat{E}B = A\hat{D}C$		(จากการพิสูจน์ข้างต้น)
ดังนั้น	$\Delta BCE \cong \Delta CBD$		(ด.ม.ด.)
จะได้	$B\hat{C}E = C\hat{B}D$		(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)
เนื่องจาก	$A\hat{C}E = A\hat{B}D$		(ต่างก็เป็นมุมตรง)
จะได้	$A\hat{C}E - B\hat{C}E = A\hat{B}D - C\hat{B}D$		(สมบัติของการเท่ากัน)
นั่นคือ	$A\hat{C}B = A\hat{B}C$		(สมบัติของการเท่ากัน)

นอกจากนี้ บทกลับของทฤษฎีบทนี้ก็เป็นจริงด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองมุม แล้วด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากัน

เราสามารถเขียนทฤษฎีบททั้งสองให้เป็นทฤษฎีบทเดียวกัน โดยใช้คำว่า ก็ต่อเมื่อ ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจะยาวเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน

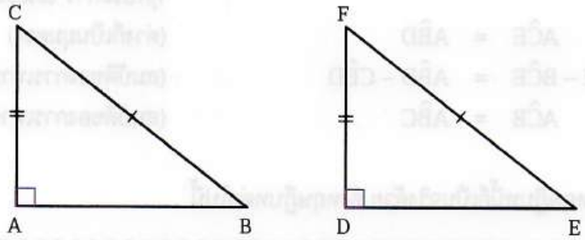
เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้านเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ดังนั้นผลที่ได้จากทฤษฎีบททั้งสองข้างต้นทำให้เราสรุปได้ว่า

มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน

และ รูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมเท่ากันสองมุมเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นอีกบทหนึ่งที่ใช้ในการตรวจสอบความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูป

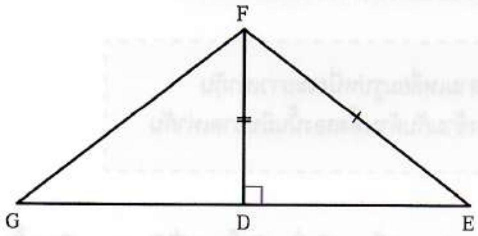
ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ฉาก–ด้าน–ด้าน (ฉ.ด.ด.) กล่าวคือ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอื่นอีกหนึ่งคู่ยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



กำหนดให้ ΔABC และ ΔDEF เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยมี $B\hat{A}C = E\hat{D}F = 90^\circ$
$BC = EF$ และ $AC = DF$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

พิสูจน์ จาก ΔDEF ต่อ $\overline{ED}$ ออกไปทางจุด D จนถึงจุด G โดยให้ $DG = AB$ ลาก $\overline{GF}$



แนวคิดในการพิสูจน์
ขั้นที่ 1 พิสูจน์ว่า $\Delta ABC \cong \Delta DGF$
ขั้นที่ 2 พิสูจน์ว่า $\Delta DGF \cong \Delta DEF$
ขั้นที่ 3 สรุปว่า $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

พิจารณา ΔABC และ ΔDGF

เนื่องจาก	$AC = DF$		(กำหนดให้)
	$AB = DG$		(จากการสร้าง)
	$B\hat{A}C = 90^\circ$		(กำหนดให้)
	$G\hat{D}F = 90^\circ$		($E\hat{D}G$ เป็นมุมตรง และ $E\hat{D}F = 90^\circ$)
จะได้	$B\hat{A}C = G\hat{D}F$		(สมบัติของการเท่ากัน)
ดังนั้น	$\Delta ABC \cong \Delta DGF$		(ด.ม.ด.)
จะได้	$BC = GF$		(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

พิจารณา ΔDGF และ ΔDEF

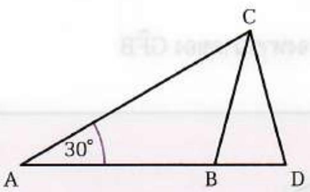
	เนื่องจาก	$BC = EF$		(กำหนดให้)
	ดังนั้น	$GF = EF$		(สมบัติของการเท่ากัน)
	จะได้	$F\hat{G}D = F\hat{E}D$		(ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน แล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากัน)
	เนื่องจาก	$F\hat{D}E = 90^\circ$		(กำหนดให้)
	จะได้	$F\hat{D}G = F\hat{D}E$		(สมบัติของการเท่ากัน)
ดังนั้น		$\Delta DGF \cong \Delta DEF$		(ม.ม.ด.)
เนื่องจาก		$\Delta ABC \cong \Delta DGF$		(จากการพิสูจน์ข้างต้น)
ดังนั้น		$\Delta ABC \cong \Delta DEF$		(สมบัติถ่ายทอด)

แบบฝึกหัด 4.3 ก

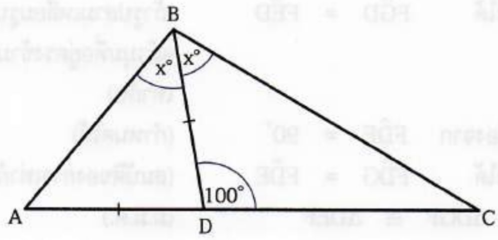
1. กำหนดให้ $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด M จงแสดงว่า $\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{DC}$

2. กำหนดให้ ΔABC และ ΔDBC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูปที่มีฐาน BC ร่วมกัน ลาก $\overline{AD}$ จงหาว่า ΔABD และ ΔACD เท่ากันทุกประการหรือไม่ พร้อมทั้งแสดงเหตุผล

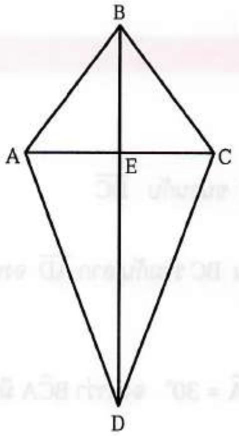
3. จากรูป กำหนดให้ ΔACD และ ΔBCD เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $\hat{A} = 30^\circ$ จงหาว่า $B\hat{C}A$ มีขนาดเท่าไร



4. จากรูป กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง และ ΔABD เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยที่ $B\hat{D}C = 100°$ จงหาว่า $B\hat{C}D$ มีขนาดเท่าไร

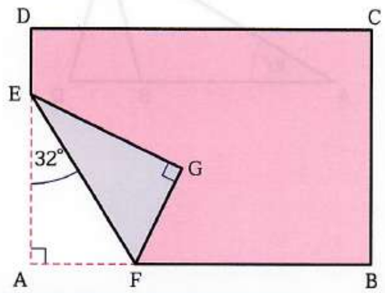


5. จากรูป กำหนดให้ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว ที่มี AB = 5 เซนติเมตร, BD = 12 เซนติเมตร และ DE = 8 เซนติเมตร จงหา

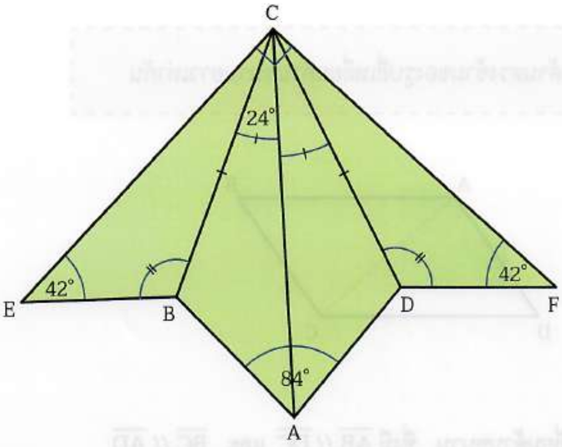


1) พื้นที่ของ □ABCD
2) ความยาวรอบรูปของ □ABCD

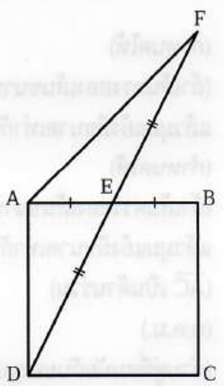
6. วิภาพับมุมกระดาษแผ่นหนึ่ง ได้ดังรูป จงหาขนาดของ $G\hat{F}B$



7. ถ้าพับกระดาษ ได้ดังรูป จงหาขนาดของ $E\hat{B}A$



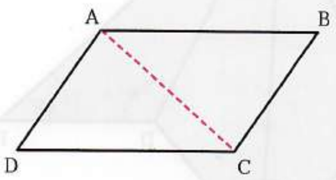
8. กำหนดให้ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ $\overline{DF}$ ตัดกับ $\overline{AB}$ ที่จุด E ดังรูป จงหาว่า $F\hat{A}B$ มีขนาดกี่องศา



9. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก เส้นแบ่งครึ่ง $B\hat{A}C$ ตัด $\overline{BC}$ ที่จุด D จงหาว่า $\overline{BD}$ หรือ $\overline{DC}$ ส่วนของเส้นตรงใด มีความยาวมากกว่ากัน

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่ ต่อไปนี้เป็นการพิสูจน์สมบัติเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่นักเรียนเคยทราบมาแล้ว แต่ยังไม่ได้มีการพิสูจน์

ทฤษฎีบท ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน



กำหนดให้ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมี $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ และ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

ต้องการพิสูจน์ว่า AB = DC และ AD = BC

พิสูจน์ ลาก $\overline{AC}$

พิจารณา ΔABC และ ΔCDA

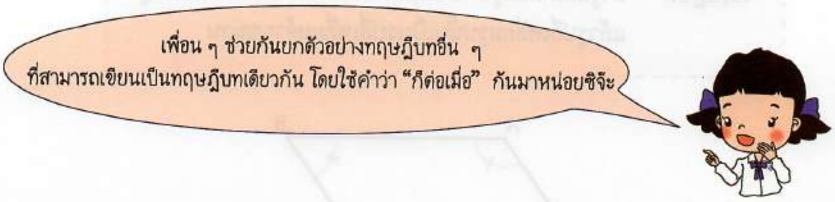
เนื่องจาก	$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	(กำหนดให้)
จะได้	$C\hat{A}B = A\hat{C}D$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)
เนื่องจาก	$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$	(กำหนดให้)
จะได้	$A\hat{C}B = C\hat{A}D$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)
	AC = CA	($\overline{AC}$ เป็นด้านร่วม)
ดังนั้น	$\Delta ABC \cong \Delta CDA$	(ม.ด.ม.)
จะได้	AB = CD และ BC = DA	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน)

นั่นคือ AB = DC และ AD = BC

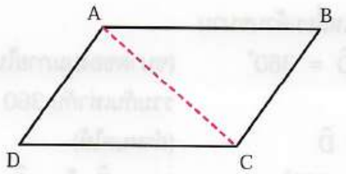
บทกลับของทฤษฎีบทข้างต้น คือ ทฤษฎีบทต่อไปนี้ ซึ่งนักเรียนสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันสองคู่ แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

จากทฤษฎีบททั้งสองที่กล่าวมาข้างต้น สามารถเขียนเป็นทฤษฎีบทเดียวกันโดยใช้คำว่า "ก็ต่อเมื่อ" ได้ดังนี้ รูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ก็ต่อเมื่อ ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นยาวเท่ากันสองคู่



ทฤษฎีบท มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาดเท่ากัน



กำหนดให้ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยมี $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $A\hat{B}C = C\hat{D}A$ และ $B\hat{A}D = D\hat{C}B$

พิสูจน์ ลาก $\overline{AC}$

พิจารณา ΔABC และ ΔCDA

เนื่องจาก	$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	(กำหนดให้)
จะได้	$B\hat{A}C = D\hat{C}A$ และ $A\hat{C}B = C\hat{A}D$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)
	$AC = CA$	($\overline{AC}$ เป็นด้านร่วม)
ดังนั้น	$\Delta ABC \cong \Delta CDA$	(ม.ด.ม.)

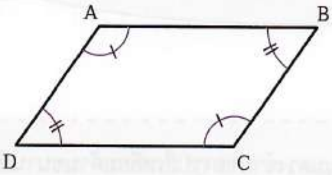
จะได้ $\hat{ABC} = \hat{CDA}$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

$\hat{BAC} + \hat{CAD} = \hat{DCA} + \hat{ACB}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $\hat{BAD} = \hat{DCB}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

บทกลับของทฤษฎีบทนี้ คือ ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมตรงข้ามที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนดให้ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมี $\hat{A} = \hat{C}$ และ $\hat{B} = \hat{D}$

ต้องการพิสูจน์ว่า □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พิสูจน์ เนื่องจาก $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสี่มุมของรูปสี่เหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 360 องศา)

และ $\hat{A} = \hat{C},\ \hat{B} = \hat{D}$ (กำหนดให้)

จะได้ $2\hat{A} + 2\hat{B} = 360^\circ$ (แทน $\hat{C}$ ด้วย $\hat{A}$ และแทน $\hat{D}$ ด้วย $\hat{B}$)

ดังนั้น $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

จะได้ $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180 องศา แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

จาก $\hat{B} = \hat{D}$ และ $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$

ดังนั้น $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

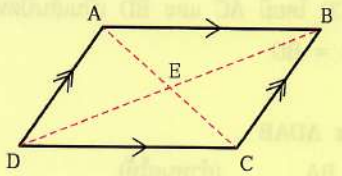
จะได้ $\overline{AB} \,//\, \overline{DC}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180 องศา แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

ดังนั้น □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่)

ทฤษฎีบท เส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุดตัดของเส้นทแยงมุม

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้จะไม่ยากเลยนะข้าวปั้น ถ้าเราใช้ความรู้เรื่อง รูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ

ใช่แล้วข้าวหอม ลองดูที่เราพิสูจน์มาสิ



จาก $\triangle ABE$ และ $\triangle CDE$

$A\hat{B}E = C\hat{D}E$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

$AB = CD$ (ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน)

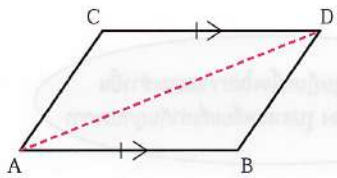
และ $B\hat{A}E = D\hat{C}E$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $\triangle ABE \cong \triangle CDE$ (ม.ด.ม.)

ซึ่งก็จะได้ว่า $AE = CE$ และ $BE = DE$ (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

จริงสิ เราจึงได้ว่าเส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุดตัดของเส้นทแยงมุม

ทฤษฎีบท ส่วนของเส้นตรงที่ปิดหัวท้ายของส่วนของเส้นตรงที่ขนานกันและยาวเท่ากัน จะขนานกันและยาวเท่ากัน



กำหนดให้ $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$, $AB = CD$ โดยมี $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ เป็นเส้นปิดหัวท้ายของ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AC} \,//\, \overline{BD}$ และ $AC = BD$

พิสูจน์ ลาก $\overline{AD}$

พิจารณา ΔADC และ ΔDAB

$CD = BA$ (กำหนดให้)

$A\hat{D}C = D\hat{A}B$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

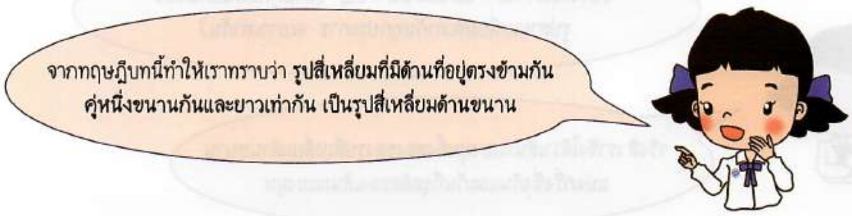
$AD = DA$ ($\overline{AD}$ เป็นด้านร่วม)

ดังนั้น $\Delta ADC \cong \Delta DAB$ (ด.ม.ด.)

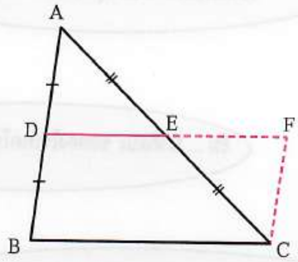
จะได้ $AC = BD$ (ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน)

และ $C\hat{A}D = B\hat{D}A$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $\overline{AC} \,//\, \overline{BD}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)



ทฤษฎีบท ส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะขนานกับด้านที่สามและยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม



กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มีจุด D และจุด E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ และ $DE = \frac{1}{2}BC$

พิสูจน์ ต่อ $\overline{DE}$ ออกไปทางจุด E จนถึงจุด F โดยให้ $EF = DE$ และลาก $\overline{CF}$

พิจารณา ΔADE และ ΔCFE

	$AE = CE$	(จุด E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$)
	$A\hat{E}D = C\hat{E}F$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)
	$DE = FE$	(จากการสร้าง)
ดังนั้น	$\Delta ADE \cong \Delta CFE$	(ด.ม.ด.)
จะได้	$AD = CF$	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)
เนื่องจาก	$AD = BD$	(จุด D เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$)
จะได้	$BD = CF$	(สมบัติของการเท่ากัน)
เนื่องจาก	$A\hat{D}E = C\hat{F}E$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)
จะได้	$\overline{AD} \parallel \overline{CF}$	(ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)
นั่นคือ	$\overline{BD} \parallel \overline{CF}$	($\overline{AD}$ และ $\overline{BD}$ อยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกัน)
ดังนั้น	$\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ และ $DF = BC$	(ส่วนของเส้นตรงที่ปิดหัวท้ายของส่วนของเส้นตรงที่ขนานกันและยาวเท่ากัน จะขนานกันและยาวเท่ากัน)
	$DE = \frac{1}{2}DF$	(จากการสร้าง)

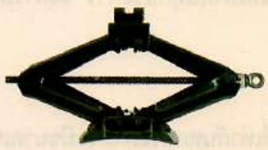
นั่นคือ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ และ $DE = \frac{1}{2}BC$

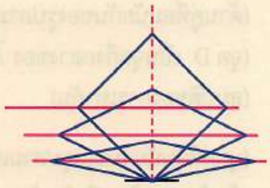
ข้าวปั้นจ๊ะ จากทฤษฎีบทที่แล้ว ถ้าเราไม่ลากเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม แต่เราลากเส้นจากจุดกึ่งกลางของด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม ให้ขนานกับอีกด้านหนึ่ง ข้าวปั้นคิดว่าเส้นนี้จะไปตัดกับด้านที่สามที่จุดกึ่งกลางหรือไม่จ๊ะ

อืม ... น่าคิดนะ ขอลองใช้เทคโนโลยีสำรวจก่อนนะจ๊ะ

จ้ะ ส่วนการพิสูจน์นั้นก็ไม่ยากเลยนะ เราสามารถสร้างรูปในทำนองเดียวกับทฤษฎีบทที่แล้วเลย ถ้าพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริงแล้ว เราสามารถนำไปใช้อ้างอิงในการให้เหตุผลได้จ้ะ

เกร็ดน่ารู้





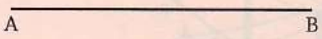
แม่แรงยกรถบางแบบมีโครงสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยมีสกรูอยู่ตามแนวเส้นทแยงมุมในแนวนอน สกรูนี้ทำหน้าที่ปรับความยาวของเส้นทแยงมุม ก่อนการใช้งานต้องคลายสกรูเพื่อทำให้ความยาวของเส้นทแยงมุมในแนวนอนยาวขึ้นเท่าที่จะเป็นไปได้ ในขณะเดียวกันเส้นทแยงมุมในแนวตั้งซึ่งไม่ปรากฏให้เห็นจะสั้นลง มีผลให้ส่วนที่จะยกรถอยู่ในระดับต่ำ เมื่อจะใช้งานก็ขันสกรูบังคับให้เส้นทแยงมุมในแนวนอนสั้นลง เส้นทแยงมุมที่อยู่ในแนวตั้งก็จะมีความยาวเพิ่มขึ้น มีผลให้ส่วนที่จะยกรถอยู่ในระดับสูงขึ้นตามแนวตั้ง ทำให้ยกรถได้ในระดับที่ต้องการ ในทางกลับกันเมื่อคลายสกรู ก็จะเป็นการลดระดับของส่วนที่ยกรถลงมาตามแนวตั้งเดิม ทั้งนี้เป็นไปตามสมบัติของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่ว่า "เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนจะตั้งฉากและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน" แม่แรงนี้จึงยกรถขึ้นลงได้ตามที่เราต้องการ

ชวนคิด 4.6

การแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็นส่วน ๆ ที่ยาวเท่ากัน

พิจารณาการสร้างต่อไปนี้

1) สร้าง $\overline{AB}$

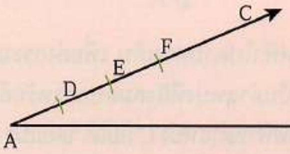


2) สร้าง $\overrightarrow{AC}$ และ

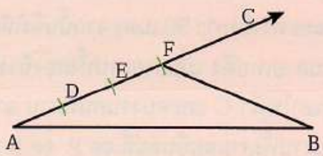
ใช้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวพอสมควร เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{AC}$ ที่จุด D

ใช้จุด D เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{DC}$ ที่จุด E

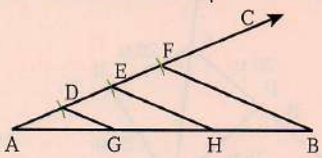
ใช้จุด E เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่าเดิม เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{EC}$ ที่จุด F



3) ลาก $\overline{BF}$



4) จากจุด D และ E สร้างเส้นขนานกับ $\overline{BF}$ ให้ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด G และ H ตามลำดับ

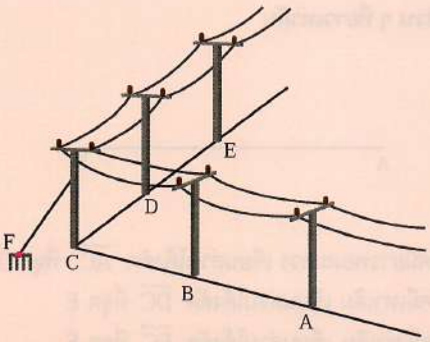


จะได้ AG = GH = HB

นั่นคือ จุด G และจุด H แบ่ง $\overline{AB}$ ออกเป็นสามส่วนที่ยาวเท่ากัน

จงให้เหตุผลว่า ทำไม AG = GH และถ้าต้องการแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็นห้าส่วนที่ยาวเท่ากัน จะทำได้อย่างไร

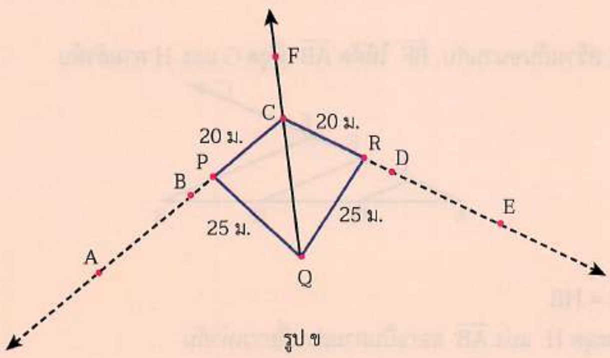
ชวนคิด 4.7



รูป ก

การไฟฟ้าส่วนภูมิภาคต้องการตั้งเสาไฟฟ้าไปตามทางเดิน เพื่อส่งกระแสไฟฟ้าไปยังหมู่บ้านแห่งหนึ่ง ดังรูป ก แนวเสาไฟฟ้าทำมุมกันที่จุด C จุด F จะเป็นตำแหน่งที่ฝังสมอบกสำหรับยึดเสาไฟฟ้าเพื่อรับแรงดึงของสายไฟฟ้า เพราะถ้าไม่มีสมอบกยึดเสาไฟฟ้าอาจทำให้เสาไฟฟ้าที่ตำแหน่ง C ล้มได้ โดยแนว CF จะต้องแบ่งครึ่งมุม BCD ที่อยู่ด้านใน

ในการหาตำแหน่งของจุด F นายช่างใหญ่ได้ให้คนงานสองคนยืนอยู่ในแนวของเสาไฟฟ้า โดยคนที่หนึ่งยืนห่างจากเสาไฟฟ้า C มาทางเสาไฟฟ้า B 20 เมตร คนที่สองยืนห่างจากเสาไฟฟ้า C มาทางเสาไฟฟ้า D 20 เมตร และให้คนงานทั้งสองถือปลายสายเทปสำหรับวัดระยะทางซึ่งยาว 50 เมตร จากนั้นจึงให้คนงานคนที่สามจับสายเทปตรงตำแหน่งที่ขีด 25 เมตร แล้วเดินถอยห่างออกมาจนสายเทปตึง เมื่อสายเทปทั้งสองข้างตึง นายช่างใหญ่จึงไปยืนอยู่อีกข้างหนึ่งของเสาไฟฟ้า C โดยยืนอยู่ในแนวเดียวกับเสาไฟฟ้า C และคนงานคนที่สาม จากนั้นนายช่างใหญ่จึงกำหนดตำแหน่งฝังสมอบกที่จุดที่ยืนอยู่ คือ จุด F ดังรูป ข (คนงานทั้งสามคนยืนอยู่ที่ จุด P จุด R และจุด Q)



รูป ข

เพราะเหตุใด ตำแหน่งฝังสมอบกที่นายช่างใหญ่หาได้จึงอยู่ในแนวเส้นแบ่งครึ่งมุม BCD

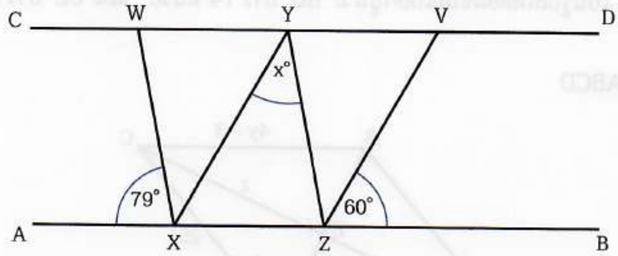
กิจกรรม : สำรวจรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในรูปสี่เหลี่ยม

ขั้นตอนการทำกิจกรรม

1. สร้าง □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่ปรับขนาดได้
2. สร้างจุดกึ่งกลางของแต่ละด้านของ □ABCD ให้จุดกึ่งกลาง คือ จุด P, Q, R และ S ตามลำดับ
3. สร้างส่วนของเส้นตรงต่อจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่ของ □ABCD จะได้ □PQRS
4. ลากจุด A, B, C หรือ D เพื่อเปลี่ยนแปลง □ABCD แล้วสังเกตลักษณะของ □PQRS
5. เขียนข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับลักษณะของ □PQRS
6. จงให้เหตุผลว่า เพราะเหตุใดข้อความคาดการณ์ในข้อ 5 จึงเป็นจริง

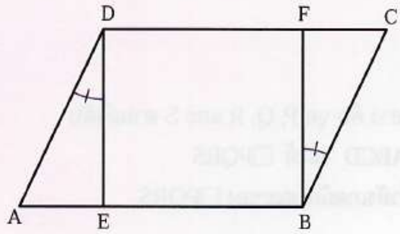
แบบฝึกหัด 4.3 ข

1. กำหนดให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ตัดกันและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O จงพิสูจน์ว่า □ACBD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
2. จากรูป $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{WX} \parallel \overline{YZ}$ และ $\overline{XY} \parallel \overline{ZV}$ จงหาค่าของ x



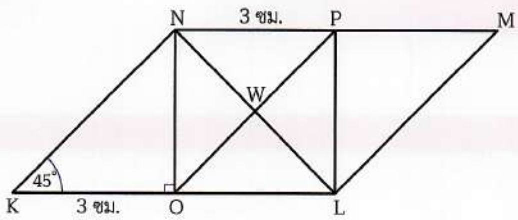
3. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ให้จุด D และ จุด E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC และ BC ตามลำดับ ถ้า AB = 8 เซนติเมตร BC = 9 เซนติเมตร และ CA = 10 เซนติเมตร จงหาความยาวรอบรูปของ ΔCDE

4.



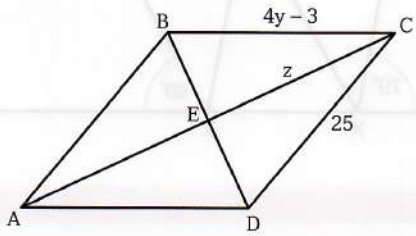
กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ $A\hat{D}E = C\hat{B}F$ จงพิสูจน์ว่า $\square BEDF$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

5. จากรูป กำหนดให้ $\square KLMN$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\hat{K} = 45^\circ$, KO = NP = 3 เซนติเมตร $\overline{OP}$ และ $\overline{NL}$ ยาวเท่ากัน แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด W จงหาพื้นที่ของ $\square KLMN$

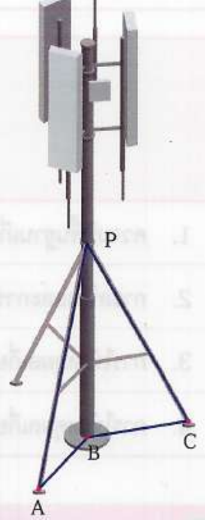


6. กำหนด จุด P จุด Q จุด R และ จุด S เป็นจุดกึ่งกลางของด้านของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ตามลำดับ ถ้าเส้นทแยงมุม AC และ BD ยาว 8 เซนติเมตร และ 12 เซนติเมตร ตามลำดับ จงหาความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยม PQRS

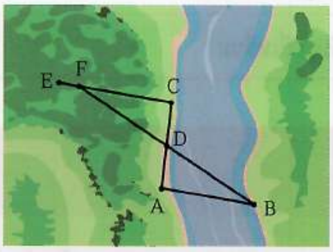
7. กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน มี $\overline{BD}$ ยาว 14 หน่วย และ $\overline{CE}$ ยาว z หน่วย จงหา
   1) ค่าของ $z - y$
   2) พื้นที่ของ $\square ABCD$



8. สมศักดิ์ได้รับมอบหมายให้ตั้งเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์ โดยยึดฐานของเสาส่งสัญญาณไว้ที่จุด B และฝังสมอบกไว้ที่จุด A และจุด C บนพื้นในแนวระดับดังรูป สมศักดิ์กล่าวว่า ถ้า AB เท่ากับ BC และเสาสัญญาณโทรศัพท์ PB ตั้งตรงอยู่ในแนวดิ่งแล้ว ท่อนเหล็กที่ใช้ยึดเสาสัญญาณโทรศัพท์จากจุด P ถึงจุด A และจากจุด P ถึงจุด C จะยาวเท่ากัน นักเรียนคิดว่าคำกล่าวของสมศักดิ์เป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด



9. กรมทางหลวงชนบทต้องการออกแบบสร้างสะพานข้ามแม่น้ำสายหนึ่ง จึงให้นายช่างไปสำรวจหาความยาวของสะพานที่จะต้องสร้างซึ่งคือระยะ AB ที่แสดงในรูป นายช่างปักหมุดที่จุด C แล้วปักหมุดที่จุด D ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A และ จุด C จากนั้นนายช่างปักหมุดที่จุด E โดยให้มุม ACE เท่ากับมุม CAB เมื่อนายช่างใช้กล้องสำรวจเล็งจากจุดซึ่งอยู่ในแนว CE จนพบว่าจุด B จุด D และจุดที่เล็ง (จุด F) อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน เขาจึงวัดระยะ CF แล้วบันทึกเป็นความยาวของสะพานที่จะต้องสร้าง นักเรียนคิดว่านายช่างมีเหตุผลอย่างไรที่ใช้ CF เป็นความยาวของสะพาน



10. ช่างสำราญออกแบบบันไดไม้สำหรับขึ้นบ้านซึ่งยกสูงจากพื้นดิน โดยกำหนดขนาดพุกบันไดดังรูป ขั้นบันไดมีทั้งหมด 7 ขั้น จงหาว่า
    1) ถ้าบันไดขั้นบนสุดอยู่ห่างจากพื้นบ้าน 18 เซนติเมตร พื้นบ้านอยู่สูงจากพื้นดินกี่เมตร
    2) ช่างสำราญจะต้องซื้อไม้ยาวอย่างน้อยกี่เมตร สำหรับทำแม่บันได