პოპულაციის ზრდის ერთი მოდელი

გარემოს შეზღუდვები ამცირებს ზრდის სიჩქარეს

პოპულაციის ზრდის ერთ-ერთი უმარტივესი მოდელი არის ექსპონენციალური ზრდის მოდელი: დროის ყოველ მომდევნო ინტერვალში რეპროდუქცია ინდივიდების რაოდენობის პროპორციულია. ასეთი მოდელის შემთხვევაში, პოპულაცია სულ უფრო სწრაფად და სწრაფად იზრდება. ექსპონენციალური მოდელი გამოსადეგია პოპულაციის ზრდის საწყის ეტაპებზე, მაგრამ როდესაც პოპულაცია ძალიან დიდ მნიშვნელობას მიაღწევს, მისი ზრდის ტემპი უნდა შემცირდეს, რადგან მის საარსებო გარემოს არ შეუძლია უსასრულოდ დიდი პოპულაციის შენარჩუნება. აქ არ იგულისხმება მხოლოდ ზომებთან დაკავშირებული შეზღუდვები. შეზღუდვები დაკავშირებულია სხვა პარამეტრებთანაც. მაგ., საკვები და არსებობისათვის საჭირო სხვა რესურსები. პოპულაციის უდიდეს მნიშვნელობას, რომელსაც არსებობა შეუძლია მოცემულ გარემოში, ეწოდება ამ გარემოს *მზიდუნარიანობა* (carrying capacity). როდესაც პოპულაცია უახლოვდება ამ სიდიდეს მისი ზრდის სიჩქარე კლებულობს.

ლოჯისტიკური მოდელი

ერთ-ერთი მოდელი, რომელიც ზრდისას ითვალისწინებს გარემოს მზიდუნარიანობას, არის ე.წ. *ლოჯისტიკური მოდელი.* ამ მოდელის მიხედვით, ნაზრდი პროპორციულია არა მხოლოდ პოპულაციის მიმდინარე მნიშვნელობისა, არამედ გარემოს გამოუყენებელი მზიდუნარიანობის.

დავუშვათ P_t არის პოპულაციის (მოსახლეობის) რაოდენობა დროის t მომენტში, ხოლო M არის გარემოს მზიდუნარიანობა. მაშინ P_t/M არის გარემოს ფარდობითი მზიდუნარიანობა, რომელიც გამოყენებულია, ხოლო $(1 - P_t/M)$ არის გარემოს გამოუყენებელი ფარდობითი მზიდუნარიანობა. ლოჯისტიკური მოდელის დაშვების თანახმად, მოსახლეობის ნაზრდი პროპორციულია როგორც მოსახლეობის მიმდინარე რაოდენობის, ასევე გარემოს გამოუყენებელი ფარდობითი მზიდუნარიანობის:

$$P_{t+1} - P_t = r \cdot P_t \cdot \left(1 - \frac{P_t}{M}\right).$$

მცირე რაოდენობის შემთხვევაში, ლოჯისტიკური ზრდის მოდელი უახლოვდება ექსპონენციალური ზრდის მოდელს. ეს ჩანს იქიდან, რომ როდესაც P_t მცირეა M -თან შედარებით, მაშინ P_t/M შეფარდება ძალიან მცირე და $1 - P_t/M$ თანამამრავლი ახლოა ერთთან. ამიტომ ლოგისტიკური განტოლება ღებულობს ასეთ სახეს: $P_{t+1} - P_t \approx r \cdot P_t$.

როდესაც პოპულაციის რაოდენობა P_t უახლოვდება M - ს, ზრდის სიჩქარე მცირდება და $1 - P_t/M$ თანამამრავლი 0 - ს უახლოვდება. განვიხილოთ მაგალითი.

დავუშვათ ზრდის სიჩქარე არის $r = 0.4$, ხოლო მზიდუნარიანობა არის $M = 1000$. ამ პირობებში განტოლება ღებულობს ასეთ სახეს

$$P_{t+1} - P_t = 0.4 \cdot P_t \cdot \left(1 - \frac{P_t}{1000}\right).$$

როდესაც $P_t = 10$, ე.ი. მცირეა 1000 - თან შედარებით, მაშინ $1 - \frac{P_t}{1000} = 0.09 \approx 1$ და $P_{t+1} - P_t \approx 0.4 \cdot P_t \cdot 1 = 0.4 \cdot P_t$. ე.ი. პოპულაცია იზრდება დაახლოებით 40% - ით დროის ყოველ პერიოდში. ეს ზრდა გრძელდება სანამ რაოდენობა მნიშვნელოვნად არ გაიზრდება. მაგალითად, როდესაც $P_t = 500$ მაშინ $1 - \frac{P_t}{1000} = 0.5$ და $P_{t+1} - P_t \approx 0.4 \cdot P_t \cdot 0.5 = 0.2 \cdot P_t$. ე.ი. პოპულაცია იზრდება დაახლოებით 20% - ით დროის ყოველ მომდევნო პერიოდში.

როდესაც P_t მიუახლოვდება 990 - ს (გახდება თითქმის მზიდუნარიანობის ტოლი), მაშინ $1 - \frac{P_t}{1000} = 0.01$ და $P_{t+1} - P_t \approx 0.4 \cdot P_t \cdot 0.01 = 0.004 \cdot P_t$. ე.ი. ზრდის სიჩქარე არის დაახლოებით 0.4%.

პოპულაციის ზრდის ლოჯისტიკური მოდელის სიმულაცია

http://vlab.amrita.edu/?sub=3&brch=65&sim=1110&cnt=1

ლოჯისტიკური მოდელის რეკურენტული ვერსიის გარდა არსებობს ფუნქცია, რომელიც აღწერს პოპულაციის ზრდის დროზე დამოკიდებულებას. ამ ფუნქციას ასეთი სახე აქვს

$$y = \frac{l}{1 + e^{(-hx)}}$$