Problemas – Tema 2

Problemas resueltos - 6 - ampliacion a representacion y bocetos

1. Representa $y=|-x^2-2x+3|$ **.**

El valor absoluto coloca en positivo todos los valores negativos del argumento: $f(x)=-x^2-2x+3$
Por lo que vamos a estudiar esta función a trozos, formando los siguientes intervalos:

$-x^2-2x+3=0 \rightarrow x=-3 \quad , \quad x=1$
$x<-3 \rightarrow f(-10)<0 \rightarrow$ cambiar signo de $f(x)$
$-3<x<1 \rightarrow f(0)>0$
$1<x \rightarrow f(10)<0 \rightarrow$ cambiar signo de $f(x)$

Nuestra función a trozos, ya sin valor absoluto, sería:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2+2x-3 \quad si \quad x\leq -3 \\ -x^2-2x+3 \quad si \quad -3<x<1 \\ x^2+2x-3 \quad si \quad 1\leq x \end{Bmatrix}$$

El dominio es toda la recta real, por ser funciones polinómicas en cada tramo.

Puntos de corte con el eje $OX \rightarrow y=0 \rightarrow -x^2-2x+3=0 \rightarrow (-3,0),(1,0)$

Puntos de corte con el eje $OY \rightarrow x=0 \rightarrow (0,3)$

Al ser polinomios no tenemos asíntotas.

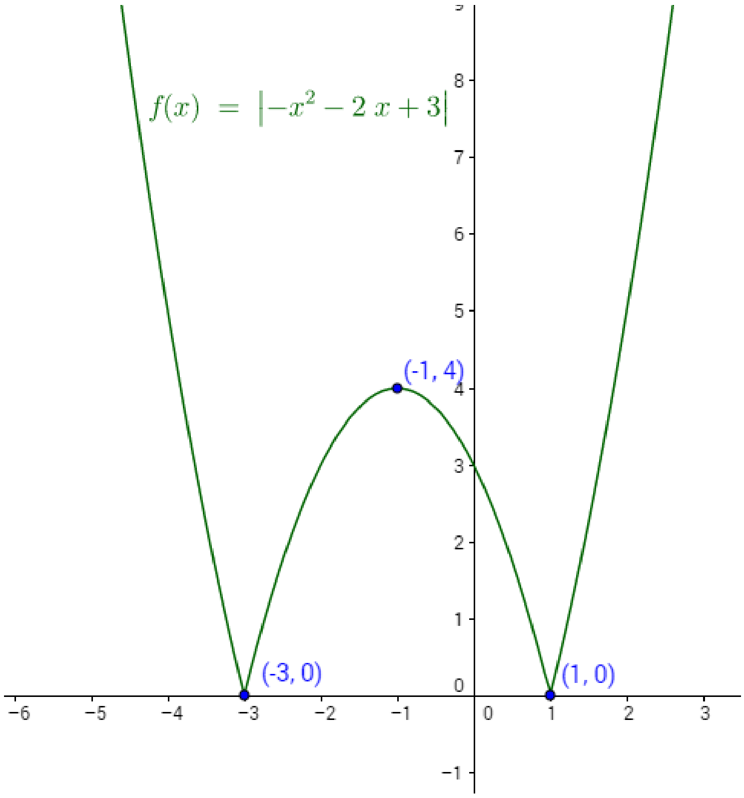
Para estudiar el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, hacemos la primera derivada e igualamos a 0 para obtener los puntos críticos. Haremos el estudio distinguiendo los distintos intervalos.

$x\leq -3 \rightarrow f(x)=x^2+2x-3 \rightarrow f'(x)=2x+2 \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow x=-1\notin(-\infty,-3)$
$-3<x<1 \rightarrow f(x)=-x^2-2x+3 \rightarrow f'(x)=-2x-2 \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow x=-1$
$1\leq x \rightarrow f(x)=x^2+2x-3 \rightarrow f'(x)=2x+2 \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow x=-1\notin(1,\infty)$

Tenemos un punto crítico en $x=-1$ para el intervalo $-3<x<1$. Calculamos la segunda derivada en este intervalo para determinar si estamos ante un extremo relativo → $f''(x)=-2<0$ → máximo relativo $(-1,4)$ de la parábola de este intervalo.

Ya tenemos información suficiente para representar la función. Fíjate que la función es continua en toda la recta real, pero no es derivable en los puntos angulosos que aparecen en $x=-3$ y en $x=1$.

Gráfica de $f(x)=|-x^2-2x+3|$



¡OJO!

Otra alternativa a dibujar la gráfica de una función que está contenida en valor absoluto es dibujar la función contenida en el argumento y, sobre la gráfica, pasar a positivo las imágenes que sean negativas.

2. Obtener extremos de $f(x)=x+\dfrac{1}{e^x}$ **.**

Dominio de la función: toda la recta real, por ser suma de polinomio y exponencial. Y no anularse nunca la exponencial del denominador.

$$f'(x)=1-\frac{1}{e^x} \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow 1-\frac{1}{e^x}=0 \rightarrow x=0$$ punto crítico

El punto crítico $(0,1)$ es candidato a extremos relativo. Evaluamos la derivada a izquierda y derecha de $x=0$.

$$(-\infty,0) \rightarrow f'(-10)=1-\frac{1}{e^{-10}}<0$$

$$(0,\infty) \rightarrow f'(10)=1-\frac{1}{e^{10}}>0$$

Por lo tanto en $(0,1)$ tenemos un mínimo relativo.

3. Sea $f(x)=x^2 e^{-x^2}$. Determina las asíntotas y los intervalos de crecimiento. Hallar, si existen, los extremos relativos de la función.

El dominio de la función es toda la recta real, ya que estamos ante un producto y composición de polinomio y exponencial, que son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto no hay puntos candidatos a asíntotas verticales, al estar la función definida en todo $\mathbb{R}$.

Asíntotas horizontales.

$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty}$ → En el infinito la exponencial es más potente que cualquier polinomio, por lo que la indeterminación tiende a 0 → $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$

Si este razonamiento nos resulta complejo, podemos aplicar L'Hôpital en la resolución del anterior límite.

De forma análoga, en menos infinito el límite resulta: $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$

Existe una asíntota horizontal en $y=0$. Y si existe asíntota horizontal, no existen asíntotas oblicuas.

Calculamos la derivada para el estudio del crecimiento.

$$f(x)=\frac{x^2}{e^{x^2}} \quad \to \quad f'(x)=\frac{2xe^{x^2}-x^2e^{x^2}2x}{(e^{x^2})^2}=\frac{2x-x^2 2x}{e^{x^2}}=\frac{2x-2x^3}{e^{x^2}}$$

$f'(x)=0 \quad \to \quad 2x-2x^3=0 \quad \to \quad 2x(1-x^2)=0 \quad \to \quad x=0 \quad , \quad x=\pm 1$ → puntos críticos

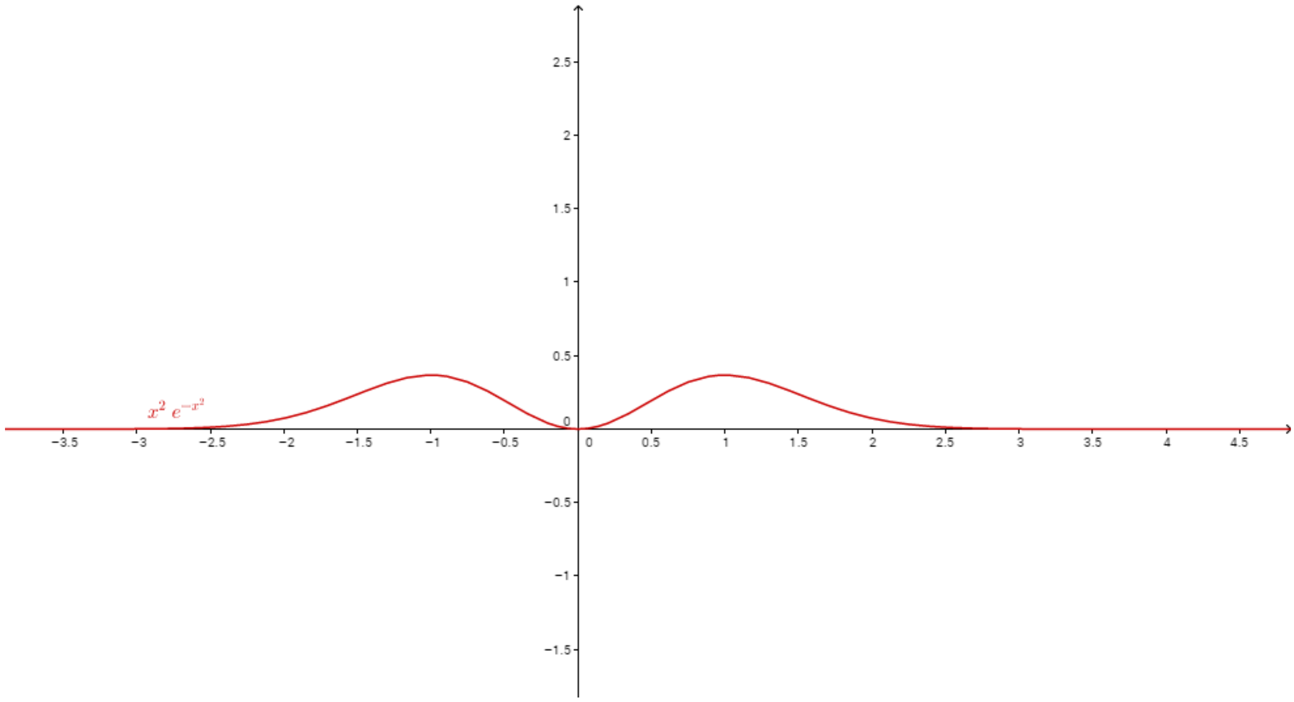
Estudiamos el crecimiento en los siguientes intervalos.

Función $f(x)$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$
Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(-10)>0$	$f'(\frac{-1}{2})<0$	$f'(\frac{1}{2})>0$	$f'(10)<0$

Si $x=-1 \to f(-1)=\frac{1}{e} \to (-1,\frac{1}{e})$ → máximo relativo

Si $x=0 \to f(0)=0 \to (0,0)$ → mínimo relativo

Si $x=1 \to f(1)=\frac{1}{e} \to (1,\frac{1}{e})$ → máximo relativo


$x^2\ e^{-x^2}$
−3.5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5

4. **Haz un esbozo de la gráfica de la función** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & si \quad x<0 \\ 2x^3-15x^2+36x+3 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ **en un entorno alrededor de** $x=0$ **.**

Solo nos piden centrarnos en un intervalo cercano a $x=0$. Estudiamos la continuidad del punto frontera.

$$\exists f(0)=3$$

$$L^{-}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{x+1}{x}=\frac{1}{0^{-}}=-\infty$$ → A.V. a la izquierda de $x=0$

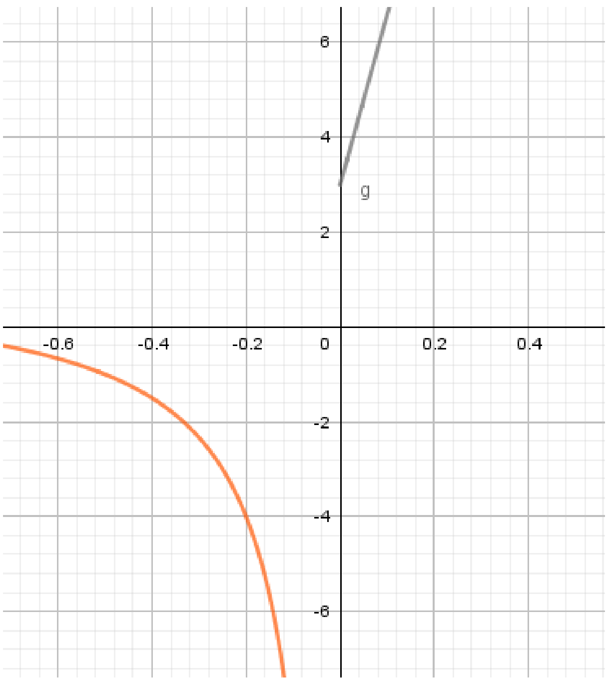
$$L^{+}=\lim_{x\to 0^{-}}(2x^3-15x^2+36x+3)=3$$

Encontramos una discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito.

A la izquierda de $x=0$ sabemos que la función se dispara hacia menos infinito. Para completar el esbozo, solo nos falta determinar si la función crece o decrece a la derecha de $x=0$.

Si $x>0$ → $f'(x)=6x^2-30x+36$, $f'(x)=0$ → $x=2$, $x=3$ son puntos críticos.

Condición suficiente → $f''(x)=12x-30$ → $f''(2)<0$ → $x=2$ es máximo relativo, por lo que la función crece a la derecha de $x=0$.



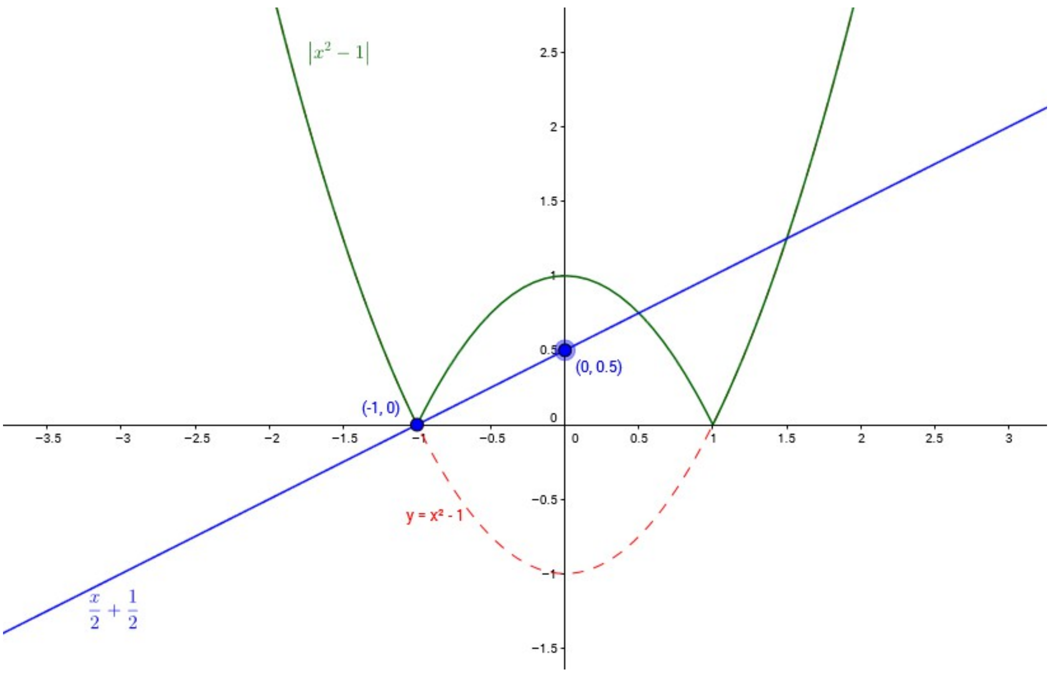
5. Representar sobre una misma gráfica las funciones $f(x)=|x^2-1|$ **y** $g(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ **. Obtener puntos de corte de ambas gráficas.**

Si la función que tenemos dentro del valor absoluto es sencilla de representar (una parábola cóncava hacia arriba, en este ejercicio), la mejor forma de obtener un boceto rápido de su gráfica es pintar la función sin valor absoluto y luego pasar la parte negativa de la función a positiva.

La parábola $y=x^2-1$ tiene extremo relativo en $y'=0 \rightarrow 2x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,-1)$ es un mínimo absoluto de la parábola, ya que al ser positivo el coeficiente que acompaña a x^2 genera una parábola cóncava.

Los puntos de corte con el eje horizontal son → $y=0 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow (-1,0)$, $(1,0)$

La recta $g(x)=\frac{x}{2}+2$ tiene pendiente $m=\frac{1}{2}$ (coeficiente que acompaña a x en la forma explícita de la recta) y pasa por el punto $(0,\frac{1}{2})$ (ordenada en el origen) y por el punto $(-1,0)$.



Para estudiar los puntos de corte entre ambas gráficas, debemos en primer lugar romper el valor absoluto en trozos. Recuerda: no operes con funciones con valor absoluto sin haberlas roto previamente en trozos.

Para ello igualamos el argumento contenido en el valor absoluto a cero, y obtenemos las raíces.

$$x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1$$

$$si \ \ x<-1 \rightarrow x=-10 \rightarrow (-10)^2-1>0$$

$$si \ \ -1<x<1 \rightarrow x=0 \rightarrow (0)^2-1<0$$

$$si \ \ x>1 \rightarrow x=10 \rightarrow (10)^2-1>0$$

Donde el argumento sea negativo, deberemos colocar un signo menos al quitar el valor absoluto.

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} x^2-1 \quad si \quad x<-1 \\ 1-x^2 \quad si \quad -1\le x\le 1 \\ x^2-1 \quad si \quad x>1 \end{matrix}\right\}$$

Fíjate que ponemos el signo igual en uno (y solo uno) de los tramos de cada punto frontera, para garantizar la continuidad de la función.

Ahora ya podemos estudiar los punto de corte, igualando la fórmula de las gráficas en cada intervalo.

$si \quad x<-1 \quad \rightarrow \quad x^2-1=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}=0$ → No hay solución dentro del intervalo

$$si \quad -1\le x\le 1 \quad \rightarrow \quad 1-x^2=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=0 \quad \rightarrow \quad x=-1 \quad , \quad x=\frac{1}{2}$$

$$si \quad x>1 \quad \rightarrow \quad x^2-1=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{3}{2}$$

Los tres puntos de corte son $(-1,0)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ y $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right)$.

6. El número de litros por metro cuadrado que llovió en un determinado lugar viene dado por la función siguiente:

$$Q(t)=\frac{-t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}+10$$

Donde t es el tiempo en días que va desde $t=1$ (lunes) hasta $t=8$ (lunes de la semana siguiente).

a) Determina en qué día de la semana llovió más y en que día llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovió esos días?

b) Representa gráficamente la función durante los 8 días.

a) Los días en los que llovió más y en los que llovió menos, dentro de un intervalo, son los extremos absolutos. Para obtenerlos, debemos calcular la imagen de los extremos del intervalo y la imagen de los extremos relativos.

$Q'=\frac{-3}{8}t^2+3t-\frac{9}{2} \rightarrow Q'=0 \rightarrow t=2 \quad , \quad t=6$ puntos críticos

$Q''=\frac{-3}{4}t+3$

$Q''(2)>0 \rightarrow t=2$ es un mínimo relativo → coordenadas $(2,Q(2))=(2,6)$

$Q''(6)<0 \rightarrow t=6$ es un máximo relativo → coordenadas $(6,Q(6))=(6,10)$

Evaluamos los extremos del intervalo en la función.

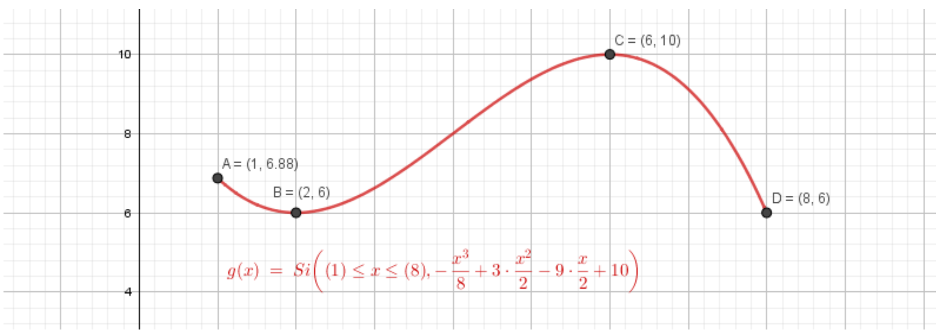
$(1,Q(1))=(1{,}6{,}875)$

$(8,Q(8))=(8,6)$

El día de mayor precipitación (máximo absoluto) es $t=6$ (sábado), con una lluvia de 10 litros por metro cuadrado.

El día de menor precipitación (mínimo absoluto) es $t=2$ (martes) y $t=8$ (lunes de la otra semana), ambos con 6 litros por metro cuadrado.

b) La función es continua por ser polinómica. Hemos obtenido al imagen de los extremos de sus intervalos y la imagen de los extremos relativos, por lo que es fácil trazar su curva en el intervalo $[1,8]$.



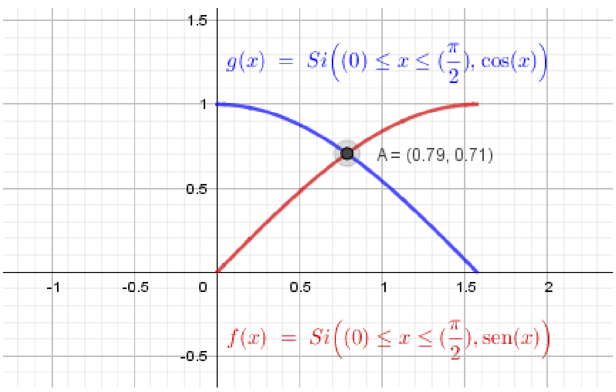
7. Dibuja sobre los mismos ejes $f(x)=\cos(x)$ **y** $g(x)=sen(x)$ **en el intervalo** $[0,\pi/2]$ **.**

Las gráficas del seno y del coseno son bien conocidas. Cuando nos piden representarlas en los mismos ejes debemos obtener, especialmente, los puntos de corte entre ambas gráficas.

Como solo nos piden dibujarlas en el intervalo $[0,\pi/2]$, solo deberemos resolver la igualdad $sen(x)=\cos(x)$ en ese intervalo.

El único ángulo donde coinciden seno y coseno en el primer cuadrante es 45º, donde $sen(x)=\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

El seno se anula en 0º y alcanza su máximo en 90º. El coseno alcanza su máximo en 0º y se anula en 90º.



8. Dibuja sobre los mismos ejes $f(x)=x^2-2x$ **y** $g(x)=-x^2+4x$

Las dos funciones son parábolas, por lo tanto, para dibujarlas basta con obtener vértices y determinar si con cóncavas o convexas.

Recuerda que si el coeficiente que acompaña a x^2 es positivo, la parábola es convexa y tendrá un mínimo absoluto y relativo en el vértice. Si el coeficiente es negativo, la parábola es cóncava y tendrá un máximo absoluto y relativo en el vértice.

Los puntos de corte con el eje horizontal se obtienen igualando la función a cero.

El corte con el eje vertical se obtiene evaluando la función en $x=0$.

Los puntos de corte entre ambas funciones, se obtiene igualando ambas funciones: $f(x)=g(x)$.

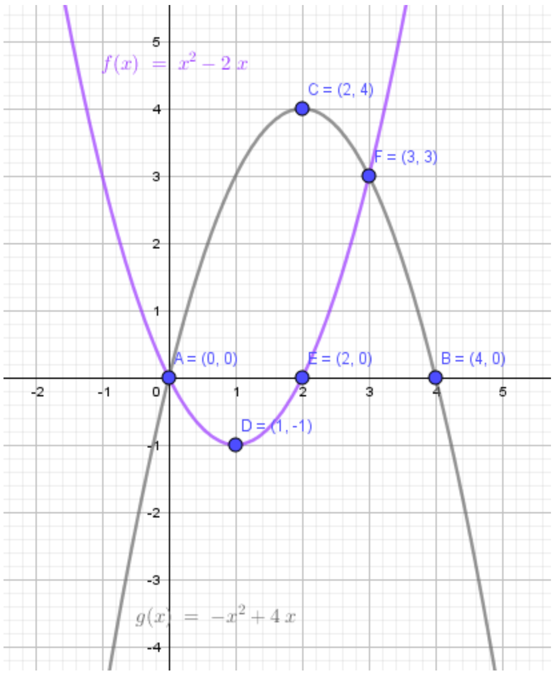
$f(x)=x^2-2x$

$f'(x)=2x-2 \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow 2x-2=0 \rightarrow x=1$ → vértice mínimo relativo

Imagen del vértice → $f(1)=1-2=-1 \rightarrow (1,-1)$

$f(x)=0 \rightarrow x^2-2x=0 \rightarrow x=0 \;,\; x=2 \rightarrow (0,0),(2,0)$ → cortes con eje horizontal

$f(0)=0 \rightarrow (0,0)$ → corte con eje vertical



$g(x)=-x^2+4x$

$g'(x)=-2x+4 \rightarrow g'(x)=0 \rightarrow -2x+4=0 \rightarrow x=2$ → vértice máximo relativo

Imagen del vértice → $g(2)=4 \rightarrow (2,4)$

$g(x)=0 \rightarrow -x^2+4x=0 \rightarrow x=0 \;,\; x=4 \rightarrow (0,0),(4,0)$ → cortes con eje horizontal

$g(0)=0 \rightarrow (0,0)$ → corte con eje vertical

$f(x)=g(x) \rightarrow x^2-2x=-x^2+4x \rightarrow 2x^2-6x=0 \rightarrow x=0 \;,\; x=3 \rightarrow$ corte entre funciones → $(0,0)$, $(3,3)$

9. Considera las funciones $f(x)$ y $g(x):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dadas por $f(x)=6x-x^2$ y $g(x)=|x^2-2x|$. Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

$f(x)=6x-x^2$

$f'(x)=6-2x \rightarrow f'(x)=0$

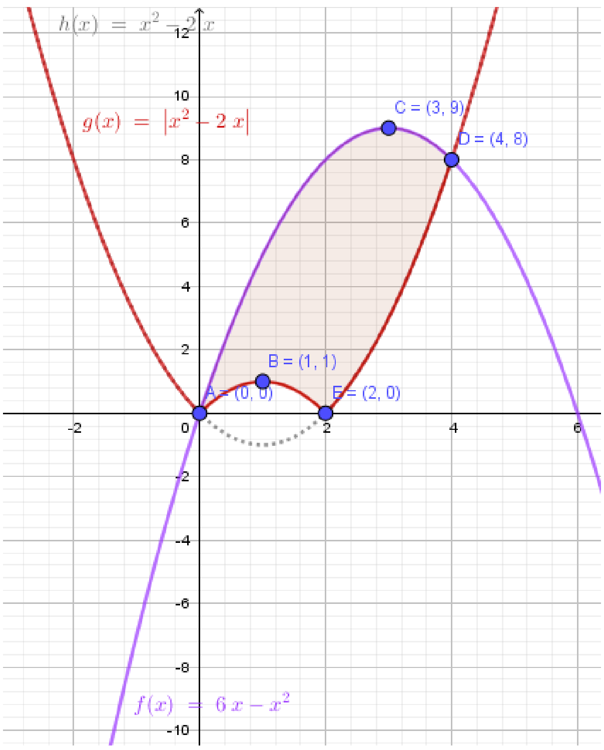
$6-2x=0 \rightarrow x=3$ → vértice máximo relativo

Imagen del vértice → $f(3)=18-9=9$ → $(3,9)$

$f(x)=0 \rightarrow 6x-x^2=0$

$x=0$, $x=6$ → $(0,0),(2,0)$ → cortes con eje horizontal

$f(0)=0 \rightarrow (0,0)$ → corte con eje vertical



Para dibujar funciones dentro de un valor absoluto, si conocemos la gráfica de la función dentro del argumento del valor absoluto, es muy cómo dibujar esa gráfica y luego aplicar el valor absoluto: lo que es negativo se vuelve positivo.

Así, llamamos $h(x)=x^2-2x$ al argumento del valor absoluto.

$h(x)=x^2-2x$

$h'(x)=2x-2 \rightarrow h'(x)=0 \rightarrow 2x-2=0 \rightarrow x=1$ → vértice mínimo relativo

Imagen del vértice → $h(1)=1-2=-1 \rightarrow (1,-1)$

$h(x)=0 \rightarrow x^2-2x=0 \rightarrow x=0$, $x=2 \rightarrow (0,0),(2,0)$ → cortes con eje horizontal

$h(0)=0 \rightarrow (0,0)$ → corte con eje vertical

Dibujamos ambas funciones, y gráficamente aplicamos valor absoluto a la segunda.

Analíticamente, aplicar valor absoluto implica eliminar las barras del operador valor absoluto y anteponer un signo menos. De esta manera, al igualar las funciones para estudiar los puntos de corte tendremos:

$f(x)=g(x)$

$6x-x^2=x^2-2x \rightarrow x=0$, $x=4 \rightarrow (0,0),(4,8)$ → corte entre las funciones

$6x-x^2=-(x^2-2x) \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$ → corte entre las funciones

10. Esboza el recinto limitado por la recta $y=4-2x$ y las gráficas de $f(x)=3-x^2$ y $g(x)=\frac{-x^2}{4}$. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (las dos curvas y la recta).

$f(x)=3-x^2$

$f'(x)=-2x \rightarrow f'(x)=0$

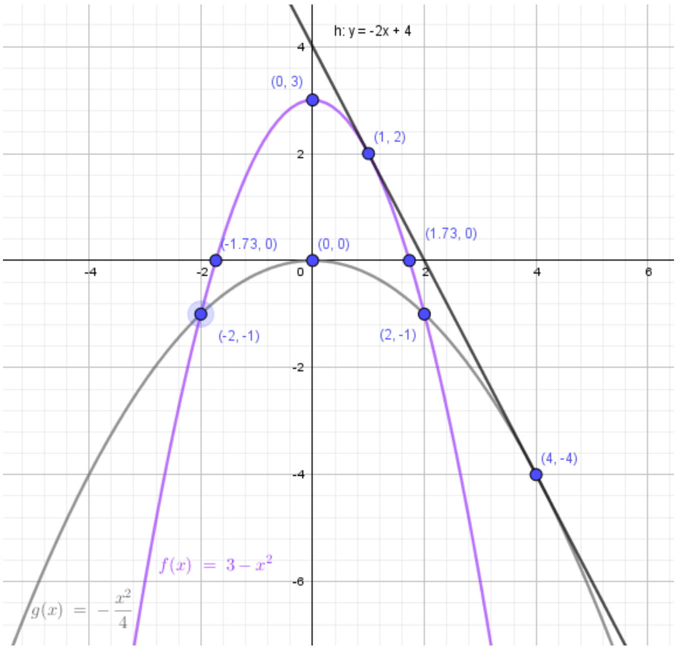
$-2x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow$ vértice máximo relativo

Imagen del vértice $\rightarrow f(0)=3 \rightarrow (0,3)$

$f(x)=0 \rightarrow 3-x^2=0$

$x=\pm\sqrt{3} \rightarrow (+\sqrt{3},0),(-\sqrt{3},0) \rightarrow$ cortes con eje horizontal

$f(0)=3 \rightarrow (0,3) \rightarrow$ corte con eje vertical



$g(x)=\frac{-x^2}{4}$

$g'(x)=\frac{-x}{2} \rightarrow g'(x)=0 \rightarrow \frac{-x}{2}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow$ vértice máximo relativo

Imagen del vértice $\rightarrow f(0)=0 \rightarrow (0,0)$

$f(x)=0 \rightarrow \frac{-x^2}{4}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0) \rightarrow$ corte con eje horizontal

$f(0)=0 \rightarrow (0,0) \rightarrow$ corte con eje vertical

La recta $y=4-2x$ es una recta de pendiente negativa que pasa por $(0,4)$ y por $(2,0)$

Los puntos de corte se obtienen igualando, por parejas, todas las funciones.

$f(x)=g(x) \rightarrow (2,-1),(-2,-1)$

$f(x)=y \rightarrow (1,2)$

$g(x)=y \rightarrow (4,-4)$

11. Sea la función $f(x)=4x^3-x^4$ definida en $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Hacer un boceto de su gráfica.

Tenemos un polinomio. Por lo tanto, no tendremos asíntotas de ningún tipo. El dominio es toda la recta real.

Para obtener el boceto basta con obtener los extremos relativos, los puntos de inflexión y los intervalos de crecimiento.

$f'(x)=12x^2-4x^3$ → punto crítico $f'(x)=0 \rightarrow 12x^2-4x^3=0$

$4x^2(3-x)=0 \rightarrow x=0 \ , \ x=3$ → candidato a extremo relativo

Evaluamos la primera derivada en los siguientes intervalos.

Función $f(x)$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$
Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(-10)>0$	$f'(1)>0$	$f'(10)<0$

$x=0$ No es extremo relativo → es punto de inflexión → $(0,f(0))=(0,0)$

$x=3$ Sí es máximo relativo → $(3,f(3))=(3,27)$

$f''(x)=24x-12x^2$ → candidato a punto de inflexión
$f''(x)=0 \rightarrow 24x-12x^2=0$

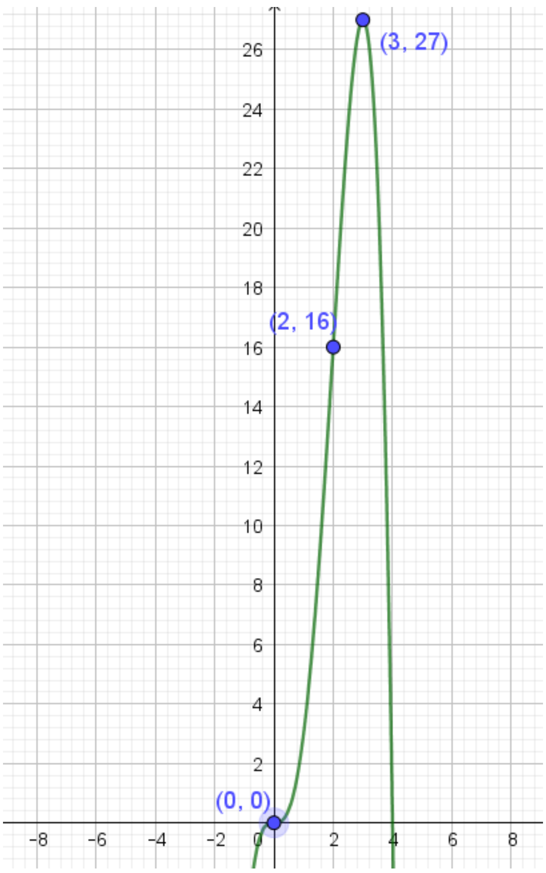
$12x(2-x)=0 \rightarrow x=0 \ , \ x=2$ → candidato a punto de inflexión.

Evaluamos los candidatos a punto de inflexión en la tercera derivada:

$f'''(x)=24-24x$

$f'''(0)=24>0 \rightarrow x=0$ punto de inflexión de cóncavo a convexo → $(0,f(0))=(0,0)$

$f'''(2)=-24<0 \rightarrow x=2$ punto de inflexión de convexo a cóncavo → $(2,f(2))=(2,16)$



12. Sean las funciones polinómicas $f(x)=x^3+2$ y $g(x)=-x^2+2x+2$. Calcula los cortes de ambas gráficas entre sí y dibujas las gráficas.

Los cortes entre ambas funciones se obtienen igualando sus ecuaciones.

$$x^3+2=-x^2+2x+2$$

$$x^3+x^2-2x=0$$

$$x(x^2+x-2)=0$$

Cuyas soluciones son $x=0$, $x=-2$, $x=1$.

Las coordenadas de los puntos de corte son:

$$f(0)=2 \rightarrow (0,2)$$

$$f(-2)=-6 \rightarrow (-2,-6)$$

$$f(1)=3 \rightarrow (1,3)$$

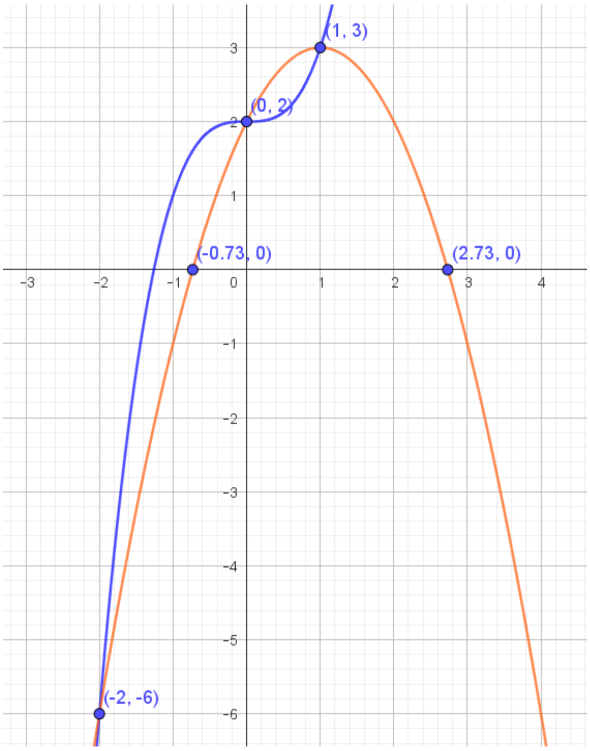
La primera función $f(x)$ es una traslación vertical de dos unidades, hacia arriba, de la gráfica bien conocida de x^3 . Por lo que el punto de inflexión se encontrará en el punto $(0,2)$.

La segunda función es una parábola cóncava (coeficiente líder negativo). Los cortes de la parábola con ele eje horizontal se obtiene igualando a cero su ecuación:

$-x^2+2x+2=0$ → Resolver ecuación de segundo grado → $x=1+\sqrt{3}$, $x=1-\sqrt{3}$

El vértice de la parábola (máximo relativo y absoluto) es el punto crítico de la función.

$g'(x)=-2x+2 \rightarrow -2x+2=0 \rightarrow x=1 \rightarrow g(1)=3$ → Vértice $(1,3)$.



13. Dibujar la gráfica de la función $f(x)=-x^2+12$ y dibuja el rectángulo inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función y el eje de abscisas, que tiene su base sobre dicho eje, con una altura de 3 unidades y que es simétrico respecto al eje vertical.

Calcular el área del rectángulo.

Los cortes de la función con el eje horizontal son:

$$f(x)=0 \rightarrow -x^2+12=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{12} \rightarrow (-\sqrt{12},0) \quad , \quad (+\sqrt{12},0)$$

El vértice de la parábola cóncava (coeficiente líder negativo) aparecen en el punto crítico:

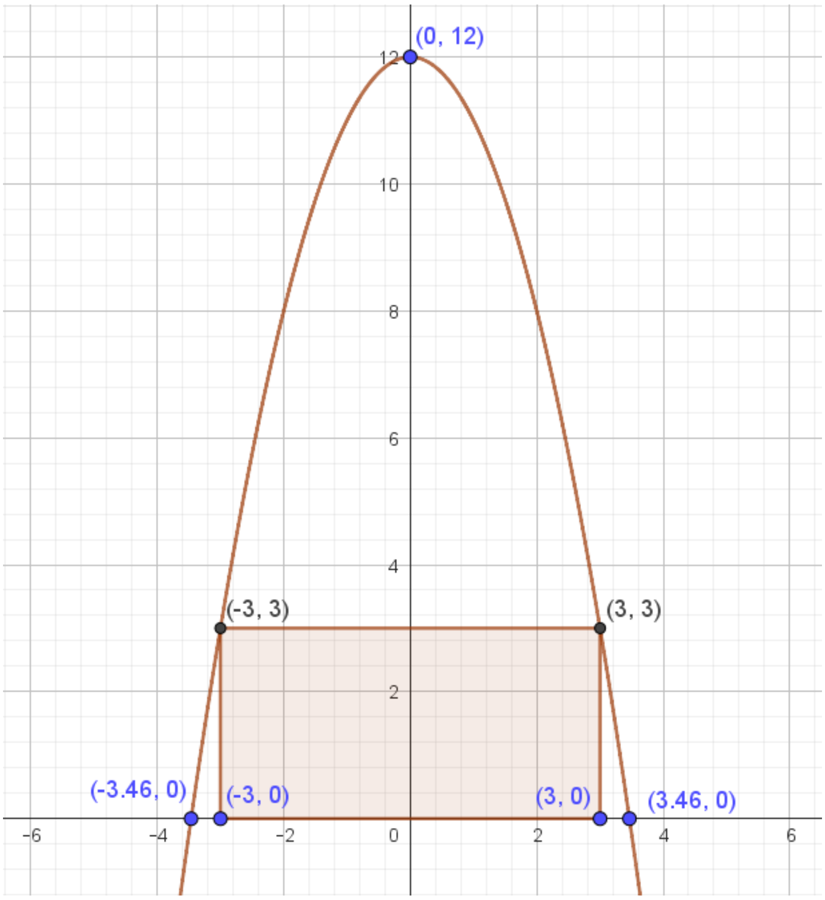
$f'(x)=0 \rightarrow -2x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow$ Vértice: $(0,12)$

Si el rectángulo inscrito tiene una altura de 3 unidades, significa que la imagen de la función es igual a 3. Es decir:

$$3=-x^2+12 \rightarrow -9=-x^2 \rightarrow x=-3 \quad , \quad x=-3$$

Por lo tanto, las coordenadas de los vértices que forman la base del rectángulo son:

$$(-3,0) \quad , \quad (3,0)$$



El área del rectángulo e obtiene multiplicando la longitud de la base por la longitud de la altura.

$$A=6\times3=18\,u^2$$

14. Dibuja la gráfica de $f(x)=x\cdot|x-1|$

Rompemos el valor absoluto, quedando una ecuación a la izquierda de x=1 y otra ecuación a la izquierda de x=1.

A la izquierda de x=1 el argumento del valor absoluto es negativo, por lo que quitamos las barras y cambiamos el signo.

A la derecha de x=1 el argumento del valor absoluto es positivo, por lo que simplemente quitamos las barras.

La función es continua en el punto frontera, por lo que añadimos el signo igual en uno de los dos tramos.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x\cdot(-x+1) & si & x\leq 1 \\ x\cdot(x-1) & si & x>1 \end{Bmatrix} \rightarrow f(x)=\begin{Bmatrix} -x^2+x & si & x\leq 1 \\ x^2-x & si & x>1 \end{Bmatrix}$$

Tenemos dos parábolas. Estudiamos sus cortes con los ejes y sus vértices.

A la izquierda de x=1

$f(x)=-x^2+x \rightarrow -x^2+x=0 \rightarrow$ Cortes con el eje horizontal: $(0,0)$, $(1,0)$

$f'(x)=-2x+1 \rightarrow -2x+1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ Vértice (máximo relativo y absoluto): $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

A la derecha de x=1

$f(x)=x^2-x \rightarrow x^2-x=0$

Cortes con el eje horizontal: $(0,0)$ (no está a la derecha de x=1), $(1,0)$

$f'(x)=2x-1 \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$ (no está a la derecha de x=1)