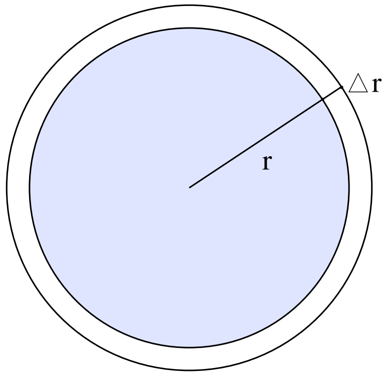
Die Ableitung als Verstärkungsfaktor

Kreis:

In Abhängigkeit vom Radius lässt sich der Flächeninhalt eines Kreises durch $\mathbf{A(r) = \pi \cdot r^2}$ beschreiben. Verändert man den Radius r des Kreises um $\mathbf{\Delta r}$, so entsteht eine Kreisfläche mit dem Flächeninhalt $\mathbf{A(r+\Delta r) = \pi \cdot (r+\Delta r)^2}$.

Der Kreisring der Breite $\mathbf{\Delta r}$ hat den Flächeninhalt $\mathbf{A(r+\Delta r) - A(r) = \pi \cdot (r+\Delta r)^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(2r\Delta r + (\Delta r)^2\right)}$. Für kleine Werte von $\mathbf{\Delta r}$ kann man $\mathbf{(\Delta r)^2}$ vernachlässigen, sodass sich die Näherung $\mathbf{A(r+\Delta r) - A(r) = \Delta A \approx 2\pi r \cdot \Delta r}$ ergibt. Der Flächeninhalt des Kreises wächst also proportional zu $\mathbf{\Delta r}$ mit dem Umfang $\mathbf{2\pi r}$ als Proportionalitäts- oder Verstärkungsfaktor.

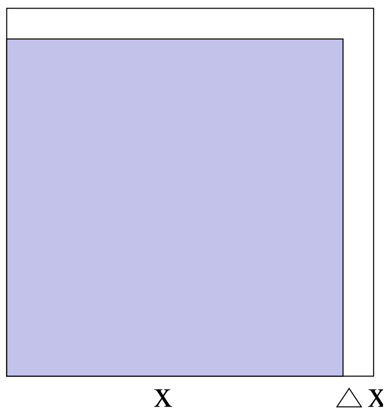


Die Ableitung des Flächeninhalts einer Kreisfläche nach dem Radius ist also $\mathbf{A'(r) \approx \frac{\Delta A}{\Delta r} \approx 2\pi r}$.

Quadrat:

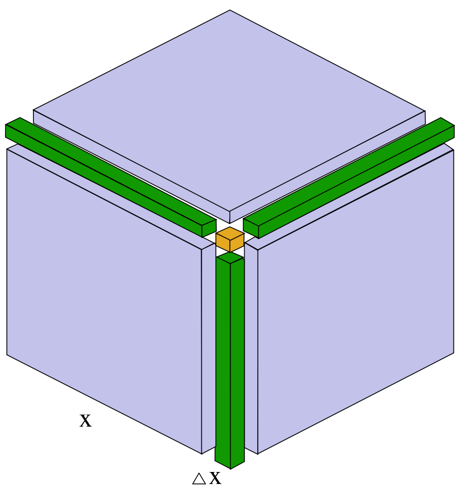
Verlängert man bei einem Quadrat eine Seite um $\mathbf{\Delta x}$, so wächst der Flächeninhalt um $\mathbf{A(x+\Delta x) - A(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \approx 2x\Delta x}$. Der Flächeninhalt des Quadrats wächst also proportional zu $\mathbf{\Delta x}$ mit dem halben Umfang $\mathbf{2x}$ als Proportionalitäts- oder Verstärkungsfaktor.

Die Ableitung des Flächeninhalts eines Quadrats nach der Seitenlänge ist also $\mathbf{A'(r) \approx \frac{\Delta A}{\Delta x} \approx 2x}$.



Würfel:

Erläutern Sie anhand der Abbildung rechts anschaulich, dass die Ableitung des Würfelvolumens nach der Kantenlänge x durch den Term $\mathbf{3x^2}$ ausgedrückt werden kann.



Kugel:

Für eine Kugel beträgt das Volumen in Abhängigkeit vom Radius $\mathbf{V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3}$.

Bestimmen Sie die Ableitung des Kugelvolumens nach dem Radius algebraisch.

Deuten Sie Ihre Ergebnis dann anschaulich geometrisch.