3. $0,\dot{9} = 1$

Verschiedene Argumentationen

(a) $\frac{1}{9} = 0,\dot{1}$ $\frac{2}{9} = 0,\dot{2}$ $\frac{3}{9} = 0,\dot{3}$ ..... $\frac{9}{9} = 0,\dot{9}$ also: $0,\dot{9} = 1$

(b) $x = 0,\dot{9} \Rightarrow 10 \cdot x = 9,\dot{9}$

Die Zahlen x und $10 \cdot x$ haben dieselben Nachkommastellen; wenn man ihre Differenz bildet, dann verschwinden die Nachkommastellen: $9 \cdot x = 9$, also $x = 1$

(c) Angenommen, es wäre $0,\dot{9} < 1$
Dann müsste es zwischen diesen beiden Zahlen eine weitere Zahl geben, z.B. ihren Mittelwert. Wie sieht die Dezimaldarstellung dieser Zahl aus?

(d) Wir betrachten die Folge $x_n = 0,99......9$ mit n Nachkommastellen.
Dann steht das Symbol $0,\dot{9}$ für den Grenzwert dieser Folge.

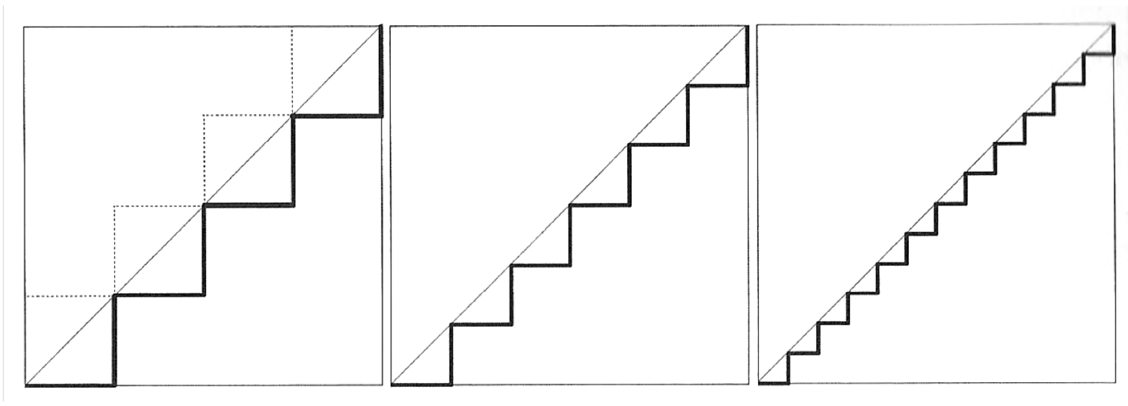
Es gilt: $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

Denn $1 - x_n = 10^{-n}$ kann beliebig klein gemacht werden, wenn man nur n groß genug wählt .... (Definition des Grenzwerts!)

(e) $0,\dot{9} = 0,9 + 0,09 + 0,009 + ...$
Das ist eine konvergente unendliche geometrische Reihe mit $q = 0,1$ und der Summe

$$s_\infty = 0,9.\frac{1}{1-0,1} = 1$$

4. $\sqrt{2} = 2$



Grenzwert von Funktionen an einer Stelle

Bei der Definition des Differentialquotienten bzw. der Ableitung einer Funktion benötigt man den Begriff „Grenzwert einer Funktion an einer Stelle“.
Üblicherweise wird dieser Begriff in einem anschaulichen Sinn verwendet, ohne ihn vorher exakt zu definieren.
Für eine Exaktifizierung der Analysis ist eine formale Definition dieses Begriffs notwendig.

Definition:

Sei I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, a ein innerer Punkt von I

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad = \quad \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

heißt Differentialquotient der Funktion f an der Stelle a, falls dieser Grenzwert existiert, und wird mit $f'(a)$ bezeichnet.

Beispiel:

$f(x) = 2x^2 + 1$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[2(a+h)^2+1]-[2a^2+1]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4ah+2h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (4a+2h) = 4a$$

Zu problematisierende Fragen:

- Warum gilt: $\lim_{h\to 0} (4a+2h) = 4a$
- Warum gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{4ah+2h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (4a+2h)$$

Die beiden Terme, von denen der Grenzwert gebildet wird, sind ja nur gleich für $h \neq 0$, für $h = 0$ ist der Bruchterm nicht definiert, der andere besitzt den Wert $4a$

Bei einer ersten Begegnung mit dem Begriff Differentialquotient kann auf die Problematisierung dieser Fragen verzichtet werden. Dies entspricht einem intuitiven Umgang mit dem Begriff „Grenzwert einer Funktion an einer Stelle“.

Zu klären ist die Bedeutung der Aussage:

$$\lim_{x \to p} f(x) = q$$

Es stehen zwei Definitionen zur Verfügung, die jeweils Präzisierungen einer anschaulichen Idee sind:

Variante 1:

Idee: *Wenn x (auf irgendeine Weise) gegen die Stelle p strebt, dann strebt der zugehörige Funktionswert $f(x)$ gegen den Wert q*

Für jede Folge $\langle x_i \rangle$, die gegen p konvergiert, konvergiert die zugehörige Folge der Funktionswerte $\langle f(x_i)$ gegen q.

Definition 1:

$\lim_{x \to p} f(x) = q \quad \Leftrightarrow \quad$ *Für jede Folge $\langle x_i \rangle$ mit $x_i \neq p$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = p \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = q$$

Variante 2:

Idee: *Wenn x in der Nähe von p liegt, dann liegt $f(x)$ in der Nähe von q*

Definition 2:

$\lim_{x \to p} f(x) = q \quad \Leftrightarrow \quad$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \neq p$ gilt:

$$|x - p| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - q| < \varepsilon$$

Bemerkungen:

- Definition 1 ist eher dynamisch, Definition 2 eher statisch …
- Definition 1 setzt den Begriff „Grenzwert einer Folge“ voraus, Definition 2 nicht.
- Definition 1 liefert ein Mittel zur Berechnung des Grenzwertes, Definition 2 nicht.

Beispiel:

Sei $f(x) = 2x - 1$

Zeige mit Hilfe beider Definitionen, dass gilt: $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$

a. Mit Definition 1:

Sei $\langle x_i \rangle$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, sodass gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} x_i = 3$
Mit Hilfe der Grenzwertsätze für Folgen erhält man:

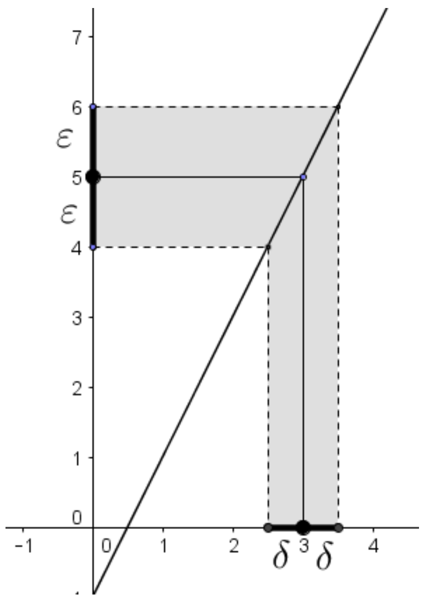
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (2 \cdot x_n - 1) = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Also gilt: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5$

b. Mit Definition 2:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig; mit $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ gilt:

$$|x-3| < \delta \Rightarrow 3 - \delta < x < 3 + \delta$$
$$\Rightarrow 3 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 3 + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow 6 - \varepsilon < 2x < 6 + \varepsilon$$
$$\Rightarrow 5 - \varepsilon < 2x - 1 < 5 + \varepsilon$$
$$\Rightarrow 5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$$
$$\Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$$



Schüler gewinnen leicht den Eindruck, man erhielte den Grenzwert einfach durch Einsetzen in den Funktionsterm, m.a.W.:

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$$

Dies gilt genau dann, wenn f an der Stelle p <u>stetig</u> ist. (Dies ist eine Möglichkeit, den Begriff Stetigkeit zu definieren).

Bei der Berechnung des Differentialquotienten liegt aber zunächst <u>nicht</u> dieser Fall vor:

Sei für eine gegebene Funktion f und eine Stelle a

$$q(h) := \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dann gilt:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} q(h)$$

$q(0)$ ist nicht definiert!

Die schulische Berechnung des Differentialquotienten kann abstrakt so beschrieben werden:

Man versucht durch Kürzen eine Funktion $\overline{q}$ zu finden mit folgenden Eigenschaften:

$$\overline{q}(h) = q(h) \text{ für } h \neq 0$$
$\overline{q}$ ist stetig an der Stelle $h = 0$

In diesem Fall gilt dann:

$$\lim_{h \to 0} q(h) = \lim_{h \to 0} \overline{q}(h) = \overline{q}\,(0)$$

(Man bezeichnet $\overline{q}$ als stetige Fortsetzung der Funktion q an der Stelle 0)

Grundbegriffe der Differentialrechnung

Differenzenquotient – Differentialquotient – Ableitung(sfunktion)

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion;

- $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $\quad (h = b-a;\ a,b \in I;\ a < b)$

  heißt Differenzenquotient bzw. mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[a, b]$

- $\lim\limits_{z \to x} \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\quad (h = z-x;\ x$ ein innerer Punkt von I)

  heißt Differentialquotient bzw. momentane/lokale Änderungsrate von f an der Stelle x und wird mit $f'(x)$ bezeichnet (falls dieser Grenzwert überhaupt existiert)

- Die Funktion $f'\colon I \to \mathbb{R}$ mit $x \to f'(x)$ heißt Ableitung(sfunktion) von f

Zugänge zum Ableitungsbegriff:

1. Ableitung als Steigung der Tangente

Vorgangsweise:

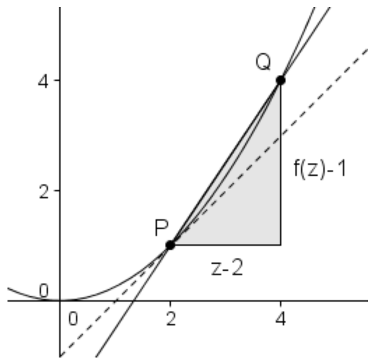
- Steigung einer Kurve in einem Punkt wird definiert als Steigung der Tangente
- Tangente wird aufgefasst als Grenzlage von Sekanten
- Die Steigung der Tangente wird berechnet als Grenzwert von Sekantensteigungen

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{4}.x^2 \quad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht: die Steigung des Graphen der Funktion im Punkt P

Wir betrachten die Steigung der Sekante durch die Punkte P und $Q = \begin{pmatrix} z \\ f(z) \end{pmatrix}$



$$k_s = \frac{f(z)-f(2)}{z-2} = \frac{\frac{1}{4}.z^2 - 1}{z-2} = \frac{1}{4}.\frac{z^2-4}{z-2} = \frac{1}{4}.\frac{(z+2)(z-2)}{z-2} = \frac{1}{4}.(z+2)$$

Die Steigung der Tangente ist der Grenzwert dieses Ausdrucks, wenn z gegen 2 geht:

$$k = \lim_{z \to 2} \frac{1}{4}(z+2) = 1$$

Schwierigkeiten dieses Zugangs:

- Der Begriff Tangente ist nicht wirklich definiert (vgl. Exkurs).
  Die Vorstellung der Tangente als Grenzlage von Sekanten ist neu und mit Schwierigkeiten verbunden (z.B.: Verwechslung Sekante / Sehne)

- Es fehlt eine (außermathematische) Motivation für das Tangentenproblem

2. Ableitung als momentane / lokale Änderungsrate

Man bedient sich in intuitiver Weise des Zeitkontinuums und fragt nach einer (intuitiv vorhandenen!) Änderungsgeschwindigkeit:

Mittlere Geschwindigkeit	=	Differenzenquotient
Momentangeschwindigkeit	=	Differentialquotient

Beispiel:

Wenn ein Körper (nur unter dem Einfluss der Schwerkraft) nach unten fällt, so hat er nach t Sekunden einen Weg $s(t)$ zurückgelegt. Es gilt:

$$s(t) = \frac{g}{2}.t^2 \quad (m) \qquad \text{Rechne mit } g = 10 \quad (m/s^2)$$

(1) Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall [1, 4]!

$$\bar{v}(1;4) = \frac{zurückgelegter\ Weg}{verstrichene\ Zeit} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(4)-s(1)}{4-1} = 25 \quad (m/s)$$

(2) Berechne die Momentangeschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt $t = 1$!

Idee: Näherungsweises Berechnen der mittleren Geschwindigkeit in kurzen Zeitintervallen; Ermitteln der Momentangeschwindigkeit als Grenzwert von mittleren Geschwindigkeiten.

$\bar{v}(1;2)$	$= 15$	$\bar{v}(0;1)$	$= 5$
$\bar{v}(1;1{,}1)$	$= 10{,}5$	$\bar{v}(0{,}9;1)$	$= 9{,}5$
$\bar{v}(1;1{,}01)$	$= 10{,}05$	$\bar{v}(0{,}99;1)$	$= 9{,}95$
$\bar{v}(1;1{,}001)$	$= 10{,}005$	$\bar{v}(0{,}999;1)$	$= 9{,}995$

Offenbar nähert sich die mittlere Geschwindigkeit immer mehr dem Wert 10 und kommt diesem beliebig nahe, wenn die Länge des Zeitintervalls gegen 0 strebt.

Analytische Untersuchung:

$$\bar{v}(1;1+h) = \frac{s(1+h)-s(1)}{h} = \frac{5(1+h)^2-5}{h} = \frac{5+10h+5h^2-5}{h} = 10+5h$$

$$v(1) = \lim_{h\to 0} \bar{v}(1;1+h) = \lim_{h\to 0}(10+5h) = 10$$

(3) Ermittle eine Formel für die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t!

Analog zu (2) berechnet man:

$$\bar{v}(t;t+h) = \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{5(t+h)^2-5t^2}{h} = \ldots\ldots = 10t+5h$$

$$v(t) = \lim_{h\to 0}(10t+5h) = 10t$$

Anmerkung zur LEIBNIZ´schen Schreibweise:

In kurzer Schreibweise (ohne die Argumente anzugeben) lässt sich obige Überlegung folgendermaßen darstellen:

Mittlere Geschwindigkeit: $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ Momentangeschwindigkeit: $v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$

Leibniz schrieb an Stelle dieses Grenzwerts den Ausdruck: $v = \frac{ds}{dt}$

Dabei stehen die Symbole ds und dt für unendlich kleine, aber von 0 verschiedene Zahlen (so genannte infinitesimale Zahlen); v ist der Quotient dieser beiden.

Zur Zeit von Leibniz wurde über die Existenz solcher infinitesimaler Zahlen nachgedacht und gestritten. Als klar wurde, dass es sie in $\mathbb{R}$ nicht gibt, wurden sie aus der Theorie der Analysis eliminiert und durch entsprechende Grenzwert-Begriffe ersetzt.
In der Praxis (bei Physikern, Ingenieuren usw.) wurde allerdings die Definition von Leibniz als Schreibweise formal (!) beibehalten, v.a. weil sie (zusammen mit der Integral-Schreibweise) eine suggestive Denkhilfe darstellt (vgl. das Wort Calculus!)

Beispiele: (1) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$ (Kettenregel)

(2) $v = \dfrac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v.dt \Rightarrow s = \int ds = \int v.\,dt$

Praktisch an der Schreibweise ist auch, dass ausgedrückt wird, nach welcher Variable differenziert (bzw. integriert) wird.

Beispiel: $F = \dfrac{m.v^2}{r}$ $\quad \dfrac{dF}{dv} = \dfrac{2.m.v}{r}$ $\quad \dfrac{dF}{dm} = \dfrac{v^2}{r}$ $\quad \dfrac{dF}{dr} = -\dfrac{m.v^2}{r^2}$

Vom Differentialquotienten zur Ableitungsfunktion ….

In der Interpretation Momentangeschwindigkeit:

- Momentangeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{s(3+h)-s(3)}{h}$ Zahl, numerisch approximierbar

- Momentangeschwindigkeit zu einem beliebigen Zeitpunkt

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}$ Term, in dem (i.A.) t, aber nicht h vorkommt!

- Funktion, die zu jedem Zeitpunkt die Momentangeschwindigkeit angibt:

$$s': I \to \mathbb{R} \text{ mit } s'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

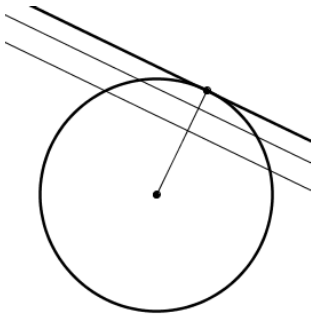
Analog in der Interpretation „Tangentensteigung“:

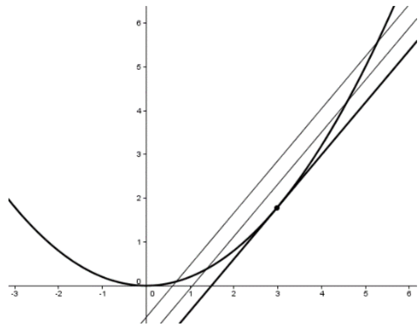
- Steigung der Tangente an einer bestimmten Stelle
- Steigung der Tangente an einer beliebigen Stelle
- Funktion, die jeder Stelle x die Steigung der Tangente an der Stelle x zuordnet

Der Begriff Tangente

Geometrischer Tangentenbegriff:

a. „*Eine Tangente ist eine Gerade, die mit der Kurve genau einen Punkt gemeinsam hat.*“

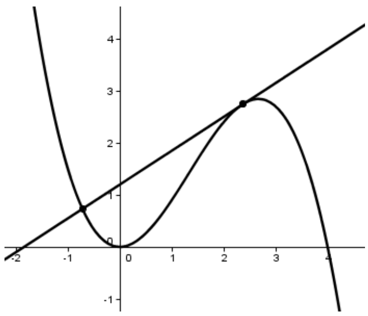


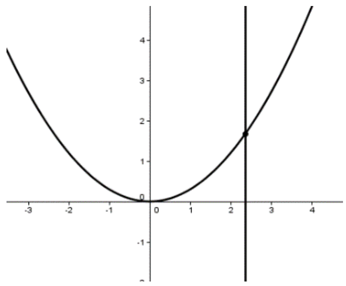


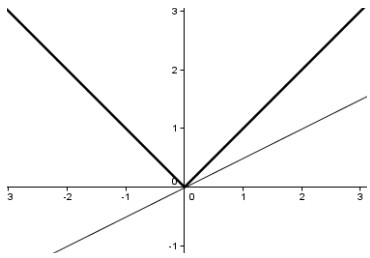
Algebraisch:

Das Gleichungssystem, bestehend aus den Gleichungen der Kurve und der Gerade, besitzt genau eine Lösung

Probleme:



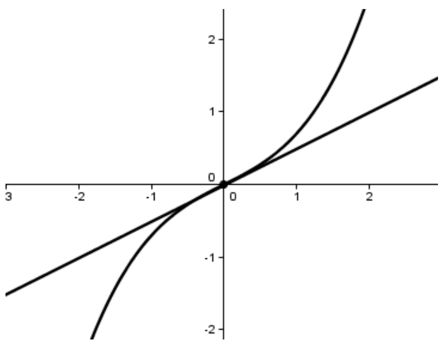




b. „*Eine Tangente ist eine Gerade, die die Kurve berührt, aber nicht schneidet*“

anders ausgedrückt:
Die Kurve hat mit der Tangente einen Punkt gemeinsam, und die Kurve liegt „auf einer Seite der Tangente“
Tangente ist „globale Stützgerade"

Neues Problem:



Analytischer Tangentenbegriff

Tangente ist „lokale Schmiegegerade“, d.h. die beste lineare Approximation in einer kleinen Umgebung des Punktes

Definition:

Die Tangentenfunktion von f an der Stelle a ist jene lineare Funktion g, für die gilt:

$$g(a) = f(a) \quad \text{und} \quad g'(a) = f'(a)$$

d.h.: $$g(x) = f(a) + (x-a).f'(a)$$

Der Graph von g heißt Tangente im Punkt $P = (a, f(a))$

Bemerkungen:

1. Die Idee, ausgehend von einem intuitiven Verständnis von „Tangente“ ihre Steigung mittels Differentialquotienten zu berechnen, wird hier – nachträglich – zu einer exakten Definition des Begriffs Tangente umfunktioniert.

2. In dieser Definition werden Kurven auf Funktionsgraphen beschränkt und Tangenten als Graphen linearer Funktionen betrachtet. Dadurch geht etwas vom ursprünglichen Begriff verloren. So besitzt etwa der Einheitskreis im Punkt $P = (1, 0)$ keine Tangente.

Die Tangentenfunktion ist jene lineare Funktion, die f lokal am besten approximiert.

Genauer:
Sei g die Tangentenfunktion von f an der Stelle a, h irgendeine andere lineare Funktion mit der Eigenschaft $h(a) = f(a)$, dann gilt:

Es gibt eine Umgebung $U(a)$, sodass $|f(x) - g(x)| < |f(x) - h(x)|$ für alle $x \in U(a) \setminus \{a\}$

Mit $h(x) = f(a) + (x-a).k$ sieht man das schnell aus folgender Darstellung:

$$|f(x) - h(x)| = |f(x) - f(a) - (x-a).k\ | = |x-a| . \left| \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - k \right|$$

Beispiel: Die Betragsfunktion $x \to |x|$ besitzt an der Stelle 0 keine bestapproximierende lineare Funktion, wie man sich leicht klarmacht.

Ableitungsregeln

Diese bieten die Möglichkeit, ohne Nachdenken über den Differentialquotienten direkt aus dem gegebenen Term der Funktion auf algebraischem Weg den Term der Ableitungsfunktion zu ermitteln.

Vorteil: Entlastung der Denkarbeit; relativ einfaches kalkülhaftes Arbeiten
Nachteil: Konzentration auf algebraische Technik; Verlust des inhaltlichen Bezugs

Man benötigt zwei Arten von Ableitungsregeln:

(1) Regeln zum Ableiten gewisser „Grundfunktionen"
(2) Regeln zum Ableiten von Funktionen, die aus diesen „Grundfunktionen" zusammengesetzt sind

Die in der Liste der Grundkompetenzen enthaltenen Ableitungsregeln sind mit * markiert

Tabelle zu (1):

$f(x)$	$f'(x)$	Anmerkung	
c	0	Konstante Funktion	*
x^r	$r \cdot x^{r-1}$	$r \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Q}$	*
$\sin(x)$	$\cos(x)$	x im Bogenmaß	*
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	x im Bogenmaß	*
e^x	e^x		*
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$a \in \mathbb{R}^+$	
$\ln(x)$	x^{-1}		
$\log_a(x)$	$(x \cdot \ln(a))^{-1}$	$a \in \mathbb{R}^+$	

Tabelle zu (2)

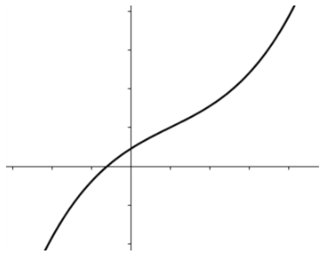
$f(x)$	$f'(x)$	Anmerkung	
$u(x) \pm v(x)$	$u'(x) \pm v'(x)$	Summenregel	*
$a \cdot u(x)$	$a \cdot u'(x)$	Regel v. konst. Faktor	*
$u(a \cdot x)$	$a \cdot u'(a \cdot x)$	Spezielle Kettenregel	*
$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$	Produktregel	
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v(x)^2}$	Quotientenregel	
$u(v(x))$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$	Kettenregel	

Untersuchung von Funktionen

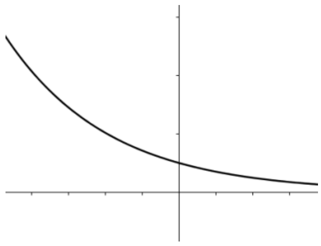
Mit den Mitteln der Differentialrechnung können manche Eigenschaften von Funktionen vorteilhaft untersucht werden, z.B. Monotonie und Extremstellen.
Die entsprechenden Begriffe sind ohne Bezug zur Differentialrechnung definiert (und im Lehrplan bereits in der 6.Klasse vorgesehen):

Monotonie:

Anschaulich:



Graph steigt von links nach rechts an
Je größer x, desto größer $f(x)$
Wenn $x_1 < x_2$, dann $f(x_1) < f(x_2)$



Graph fällt von links nach rechts
Je größer x, desto kleiner $f(x)$
Wenn $x_1 < x_2$, dann $f(x_1) > f(x_2)$

Definition:

Eine Funktion f heißt

- streng monoton wachsend in A, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- monoton wachsend in A, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- streng monoton fallend in A, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- monoton fallend in A, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

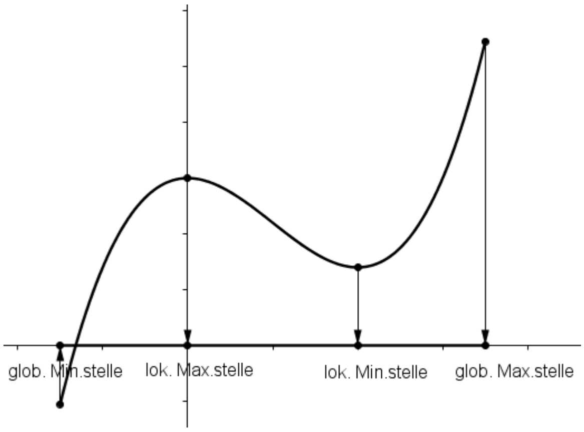
Bemerkung:

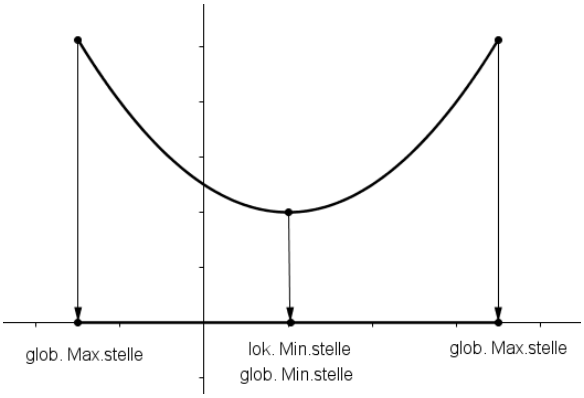
Um nachzuweisen, dass eine Funktion f streng monoton wachsend ist, muss gemäß Definition nachgewiesen werden, dass aus einer Ungleichung $(x_1 < x_2)$ eine andere Ungleichung $(f(x_1) < f(x_2))$ folgt.

Dieser Nachweis ist bei manchen Funktionen einfach (mit Hilfe elementarer Rechenregeln für Ungleichungen), im Allgemeinen aber kaum möglich.

Extremstellen (globale und lokale)

Anschaulich:





Definition:

Eine Stelle x_0 heißt

- (globale) Maximumstelle von f in A wenn gilt: $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in A$
- (globale) Minimumstelle von f in A wenn gilt: $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in A$

- lokale Maximumstelle von f in A wenn es eine Umgebung $U \subseteq A$ von x_0 gibt, sodass gilt: $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in U$

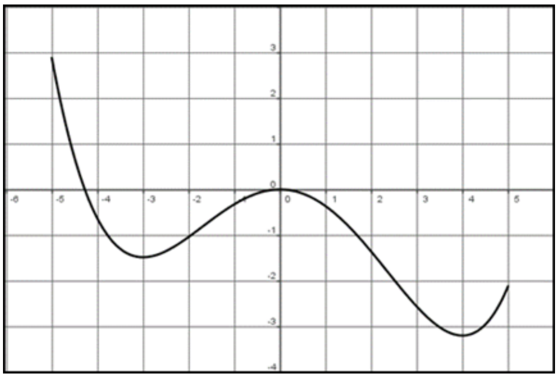
- lokale Minimumstelle von f in A wenn es eine Umgebung $U \subseteq A$ von x_0 gibt sodass gilt: $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in U$

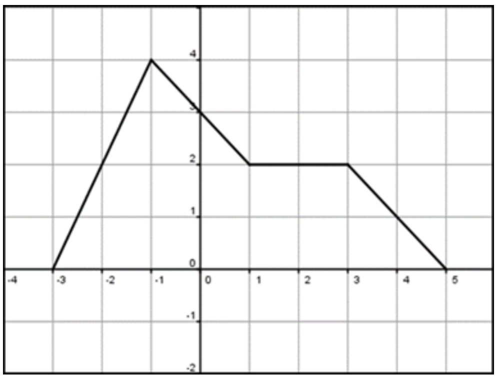
Bemerkung:

Eine Umgebung U einer Stelle x_0 ist ein offenes Intervall mit $x_0 \in U$.
Aufgrund obiger Definition ist eine globale Extremstelle, die „am Rand" der Menge A liegt, keine lokale Extremstelle, eine globale Extremstelle, die „im Inneren" der Menge A liegt, aber schon

Aufgabe:

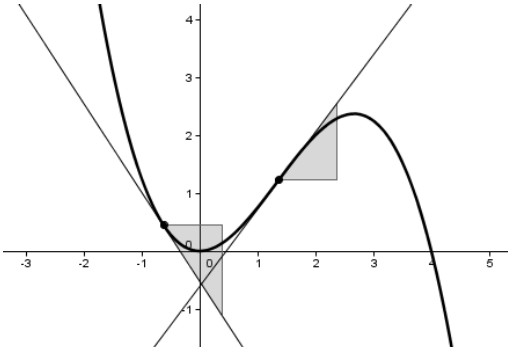
Ermitteln Sie globale und lokale Extremstellen folgender Funktionen:





Monotonie und Ableitung

Der Zusammenhang zwischen Monotonieverhalten einer Funktion f und dem Vorzeichen der Ableitung f' kann gut der Anschauung entnommen werden.



Vorsicht ist geboten bei der Formulierung!

Versuch: $f'(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ *f ist an der Stelle x_0 streng monoton wachsend*

Diese Formulierung ist <u>sinnlos</u>, denn es gibt keine Monotonie an <u>einer</u> Stelle!!

Monotonie-Satz:

$f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[\quad \Rightarrow \quad f$ ist in $[a, b]$ streng monoton wachsend
$f'(x) < 0$ für alle $x \in]a, b[\quad \Rightarrow \quad f$ ist in $[a, b]$ streng monoton fallend

Der Beweis dieses Satzes ist schwierig (er kann etwa mit Hilfe des Mittelwertsatzes geführt werden). Es kann dieser Satz aber in der Folge gut als Argumentationsbasis für den Großteil der schulischen Analysis verwendet werden.

Der Monotonie-Satz liefert die Grundlage für die Untersuchung von Monotonie und lokalen Extremstellen einer Funktion $f: I \to \mathbb{R}$

(1) Ermittle <u>alle</u> Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$

(2) Diese zerlegen das Intervall I in Teilintervalle, innerhalb derer sich das Vorzeichen von f' nicht ändert (falls f' stetig ist …)
Das Vorzeichen von f' kann daher in jedem Teilintervall an einer willkürlich(!) ausgewählten „Teststelle“ bestimmt werden.
In jedem Teilintervall ist f streng monoton. („Monotonie-Intervalle“)

(3) Wenn sich das Vorzeichen von f' „beim Durchgang durch eine Stelle x_i“ ändert, so liegt eine lokale Extremstelle vor:
eine lokale Minimumstelle bei Änderung von negativ auf positiv
eine lokale Maximumstelle bei Änderung von positiv auf negativ

Andernfalls liegt keine lokale Extremstelle vor.

Kriterien für lokale Extremstellen

(1) x_0 ist lokale Extremstelle $\quad\Rightarrow\quad f'(x_0) = 0$

Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend!

(2) $f'(x_0) = 0 \;\wedge\; f''(x_0) \neq 0 \quad\Rightarrow\quad x_0$ ist lokale Extremstelle

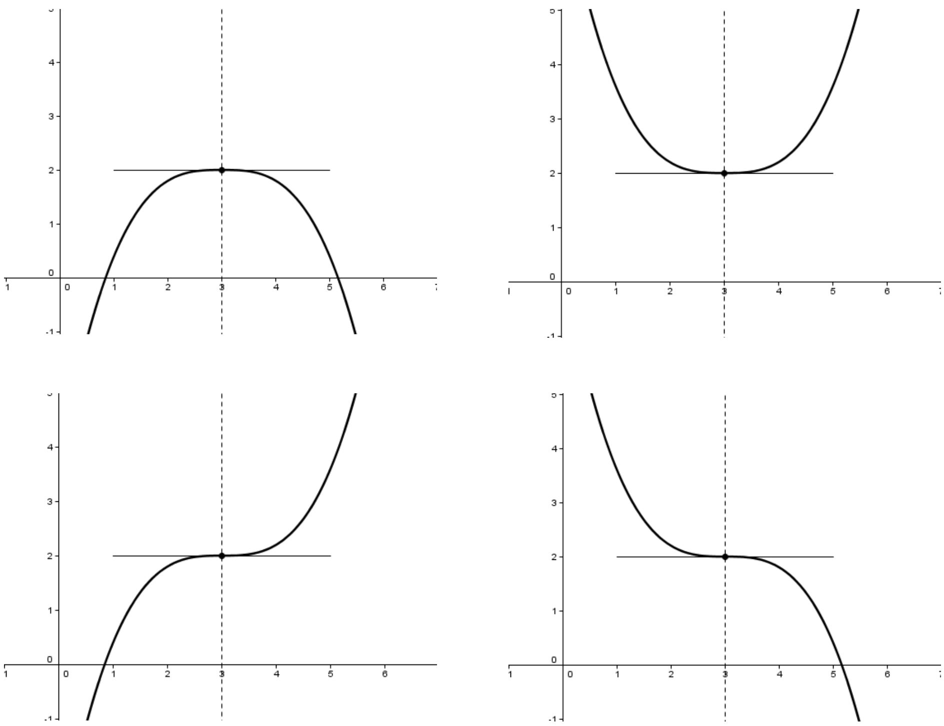
Die Bedingung $f'(x_0) = 0 \;\wedge\; f''(x_0) \neq 0$ ist hinreichend, aber nicht notwendig!

Genauer gilt:

(2′) $f'(x_0) = 0 \;\wedge\; f''(x_0) > 0 \quad\Rightarrow\quad x_0$ ist lokale Minimumstelle

$f'(x_0) = 0 \;\wedge\; f''(x_0) < 0 \quad\Rightarrow\quad x_0$ ist lokale Maximumstelle

Die vier typischen Situationen:



Suche nach globalen Extremstellen („Maximum-Minimum-Suche“)

In vielen Anwendungssituationen sind nicht lokale Extremstellen gesucht, sondern globale!

Gegeben: Intervall I , Funktion f differenzierbar
Gesucht: globale Maximum- bzw. Minimumstellen von f in I

Wichtige Standardsituationen:

(1) I ist ein abgeschlossenes Intervall, etwa $I = [a, b]$
Die Gleichung $f'(x) = 0$ besitzt in I die Lösungen $x_0, x_1, \ldots., x_n$ (und keine weiteren)

Dann gilt:
Globale Maximum- und Minimumstellen befinden sich in der Menge $\{a, x_0, \ldots., x_n, b\}$ und können durch Vergleich der Funktionswerte gefunden werden.

(2) I ist irgendein Intervall
$f'(x_0) = 0$ mit $x_0 \in I$
$f''(x) > 0$ für alle $x \in I$ (bzw. $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$)

Dann gilt:
x_0 ist globale Minimumstelle (bzw. Maximumstelle) von f in I

Krümmung und zweite Ableitung

Der Begriff Krümmung (links / rechts) kann anschaulich aus der Betrachtung von Tangentensteigungen gewonnen werden:

Definition:

f ist in $[a,b]$ *linksgekrümmt* $\Leftrightarrow$ f' ist in $[a,b]$ streng monoton wachsend
f ist in $[a,b]$ *rechtsgekrümmt* $\Leftrightarrow$ f' ist in $[a,b]$ streng monoton fallend

x_0 heißt *Wendestelle*, wenn sich an der Stelle x_0 das Krümmungsverhalten ändert.

Wegen des Monotonie-Satzes kann eine Bedingung mit Hilfe der 2.Ableitung formuliert werden:

$f''(x) > 0$ für alle $x \in]a,b[$ $\Rightarrow$ f ist in $[a,b]$ linksgekrümmt
$f''(x) < 0$ für alle $x \in]a,b[$ $\Rightarrow$ f ist in $[a,b]$ rechtsgekrümmt

x_0 ist Wendestelle $\Rightarrow$ $f''(x) = 0$

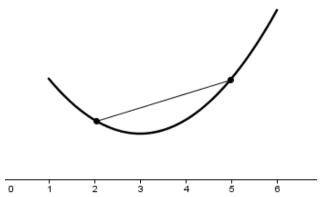
Aufgrund dieses Kriteriums mit Hilfe der 2.Ableitung sagt man statt „rechtsgekrümmt" auch „negativ gekrümmt", statt „linksgekrümmt" auch „positiv gekrümmt".

Achtung:

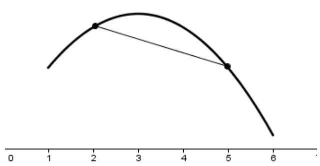
Hier wird mit dem Begriff Krümmung nur zwischen Links- und Rechtskrümmung unterschieden. Umgangssprachlich redet man aber auch von „starker Krümmung" usw., denkt also an ein Maß für die Krümmung. Dies ist ein Thema der Differentialgeometrie und wird üblicherweise im Mathematikunterricht nicht behandelt.

Alternative Definition der Krümmung (ohne Bezugnahme auf die Ableitung!)

f ist (im Intervall $[a,b]$) *linksgekrümmt* (konvex), wenn gilt:
Jede Sekante des Graphen verläuft oberhalb des Graphen



f ist (im Intervall $[a,b]$) *rechtsgekrümmt* (konkav), wenn gilt:
Jede Sekante des Graphen verläuft unterhalb des Graphen



Beispiele: Untersuchung von Funktionen mit Hilfe der Ableitung

1. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0{,}1.x^4 - 0{,}8.x^3 + 1{,}8.x$

   - Untersuche das Monotonieverhalten und ermittle die lokalen Extremstellen
   - Untersuche das Krümmungsverhalten und ermittle die Wendestellen
   - Zeichne den Graph der Funktion unter Verwendung der erzielten Ergebnisse

2. Die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten wird beschrieben durch die Funktion

   $$y(t) = 20 \cdot t \cdot e^{-t} \qquad (t \geq 0)$$

   t … Zeit in Stunden ab Einnahme
   $y(t)$ …. Konzentration des Medikaments im Blut, gemessen in „Einheiten"

   - Wie hoch ist die maximale Konzentration, und wann wird sie erreicht?
   - Die Funktion besitzt eine Wendestelle. Ermittle sie! Welche Bedeutung hat sie im untersuchten Kontext?
   - Wann ist nach diesem Modell die Konzentration wieder auf Null gesunken?
   - Zeichne den Graph der Funktion im Zeitintervall [0, 10]!

3. Ein Geschoss wird aus einer Höhe von 10 m unter einem Winkel von 42° abgeschossen und schlägt in einer Entfernung von 100 m auf dem Boden auf. Wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt, ist die Flugbahn eine Parabel.

   - Beschreibe die Flugbahn durch eine quadratische Funktion!
   - Berechne die maximale Höhe, die der Körper erreicht!
   - Berechne den Aufprallwinkel auf dem Boden!

4. Begründe folgende Sätze:

   (1) *Eine Polynomfunktion 3. Grades besitzt stets genau eine Wendestelle und maximal zwei lokale Extremstellen*

   (2) *Eine Polynomfunktion 3.Grades besitzt entweder keine lokale Extremstelle oder zwei lokale Extremstellen.*

   Hinweis:
   Zeige, dass $f'(x)$ das Vorzeichen nicht wechselt, wenn die Gleichung $f'(x) = 0$ genau eine Lösung besitzt.

5. Eine Epidemie ist ausgebrochen. Zu Beginn des Beobachtungszeitraums gab es 20 Erkrankte, nach 10 Tagen bereits 60 Erkrankte. Der Verlauf der Epidemie soll durch zwei unterschiedliche Modelle beschrieben werden.

Modell A:
Es wird angenommen, dass die Anzahl der Erkrankten exponentiell zunimmt.

- Ermittle den Term der zugehörigen Exponentialfunktion!
- Erstelle eine Prognose für die Anzahl der Erkrankten nach 20 bzw. 25 Tagen!
- Wie groß ist die momentane Änderungsrate der Anzahl der Erkrankten nach 10 bzw. nach 25 Tagen?

Modell B:
Die Anzahl der Erkrankten nach t Tagen ist gegeben durch $g(t) := -0{,}02t^3 + 0{,}6t^2 + 20$

- Zeige, dass dieses Modell zu den eingangs angegebenen Daten passt!
- Ermittle lokale Extremstellen und Wendestellen der Funktion! *Was bedeuten diese Zeitpunkte im beschriebenen Kontext?*
- Zeichne den Graph im Intervall [0, 30]! (Einheiten geeignet wählen!)
- Wie groß ist die momentane Änderungsrate der Anzahl der Erkrankten nach 10 bzw. nach 25 Tagen?

6. Zeige:

- Die Gleichung $x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 2 = 0$ besitzt <u>keine</u> reelle Lösung
- Die Gleichung $x^3 + 3x + 5 = 0$ besitzt <u>höchstens eine</u> reelle Lösung