Пряма і коло Ейлера

Теорема. У будь-якому трикутнику центр описаного кола, центроїд і ортоцентр лежать на одній прямій.

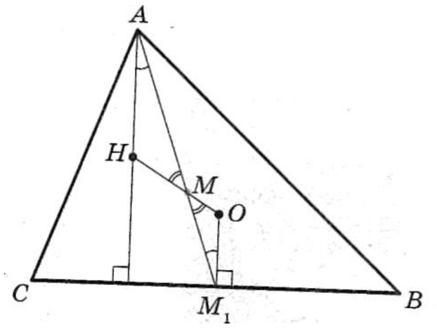
Цю пряму називають **прямою Ейлера.**

Доведення.

Доведення для рівнобедреного трикутника є очевидним.

В прямокутному трикутнику ортоцентр – середина гіпотенузи, тоді всі три точки належать медіані, проведеній до гіпотенузи.

Доведемо теорему для гострокутного різностороннього трикутника.



Оскільки точка M_1 – середина BC, то AM_1 – медіана ΔABC. Нехай $AM_1 \cap HO$ в точці M.

Оскільки $AH \parallel OM_1$, то $\angle HAM = \angle OM_1M$ як внутрішні різносторонні. Крім того, $\angle AMH = \angle M_1MO$ як вертикальні. Отже, $\Delta HAM \sim \Delta OM_1M$ за двома кутами. Звідси $AM : MM_1 = AH : OM_1 = HM : MO = 2$. Отже, точка M ділить медіану AM_1 у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини A і $2OM = MH$. Звідси точка M – центроїд ΔABC.

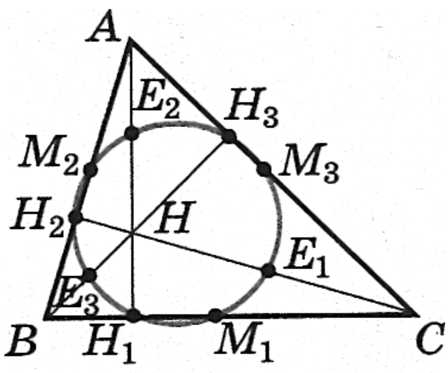
Доведення для випадку тупокутного трикутника аналогічне.

Лема. Три чудові точки трикутника, центр описаного кола, центроїд і ортоцентр, лежать на одній прямій, причому $2OM = MH$.

Означення. Середини відрізків висот від ортоцентра до вершин трикутника називаються точками Ейлера (E).

Теорема Ейлера. Основи медіан, основи висот і точки Ейлера лежать на одному колі, яке називається колом дев'яти точок або колом Ейлера.

Доведення.



Нехай M_1, M_2, M_3 – середини сторін ΔABC; AH_1, BH_2, CH_3 – його висоти; H – ортоцентр, E_1, E_2, E_3 – точки Ейлера.

Опишемо навколо $\Delta M_1M_2M_3$ коло. Доведемо, що H_1 (основа висоти AH_1) і точка Ейлера E_2 (середина відрізка BH) лежать на цьому колі. Дійсно, H_1M_3 – медіана прямокутного ΔABH_1, проведена з вершини прямого кута, $H_1M_3 = ½AB$.

За властивістю середньої лінії M_1M_2 ΔABC маємо: $M_1M_2 = ½AB$. Отже, $H_1M_3 = M_1M_2$.

Крім того, $M_2M_3 \parallel M_1H_1$ ($M_2M_3 \parallel BC$ за властивістю середньої лінії). Отже, трапеція $M_1M_3M_2H_1$ – рівнобічна, а тому коло, яке проходить через три її вершини M_1, M_2, M_3, пройде і через четверту вершину H_1.

Пряма $M_3E_2 \parallel AH$ (M_3E_2 – середня лінія ΔBAH), пряма $M_3M_2 \parallel BC$ (M_3M_2 – середня лінія ΔABC), за умовою $AH \perp BC$. Отже, $M_3E_2 \perp M_3M_2$, тобто $\angle E_2M_3M_2 = 90^o$.

Пряма $M_1E_2 \parallel AH$ (M_1E_2 – середня лінія ΔBHC), пряма $M_1M_2 \parallel AB$ (M_1M_2 – середня лінія ΔABC), за умовою $CH \perp AB$. Отже, $M_2E_1 \perp M_1M_2$, тобто $\angle E_2M_1M_2 = 90^o$.

Навколо чотирикутника $M_3E_2M_1M_2$ можна описати коло, тому що сума протилежних кутів дорівнює 180^o.

Таким чином, коло, яке проходить через три точки M_1, M_2, M_3, проходить і через точки H_1 і E_2.

Аналогічно можна показати, що це коло пройде ще через точки E_1, E_3, H_2, H_3. Отже, основи медіан, основи висот і точки Ейлера лежать на одному колі.