Club GeoGebra Iberoamericano

4

CONSTRUCCIÓN DE LUGARES GEOMÉTRICOS, CÓNICAS Y OTRAS CURVAS

CONSTRUCCIÓN DE LUGARES GEOMÉTRICOS, CÓNICAS Y OTRAS CURVAS

INTRODUCCIÓN

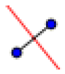
En este tema proponemos la construcción de lugares geométricos con especial atención a las cónicas y a la construcción de algunas curvas famosas.

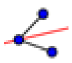
Un lugar geométrico se define como un conjunto de puntos que cumplen una misma propiedad. La mediatriz, la bisectriz, las cónicas, la cicloide, el caracol de Pascal, la cisoide de Diocles y otras figuras geométricas curiosas son lugares geométricos.

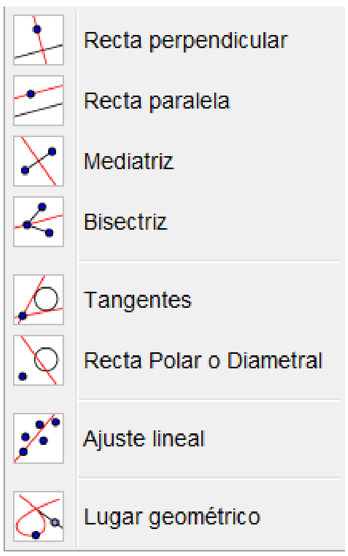
LA HERRAMIENTA LUGAR GEOMÉTRICO

Al igual que en temas anteriores, ofreceremos actividades y materiales que puedan servir como punto de partida y también actividades de investigación para así poder crear materiales propios y poder compartir con los demás participantes; ese es el objetivo fundamental del club.

Incluimos una breve descripción sobre lugares geométricos, de los que ya conocemos algunos como son la mediatriz y la bisectriz, para los que disponemos de las herramientas en GeoGebra que permiten obtenerlos de manera directa.

 **Mediatriz** de un segmento o mediatriz entre dos puntos.

 **Bisectriz** de un ángulo.



Para construir un lugar geométrico utilizando GeoGebra se necesitan dos objetos. Por un lado el objeto que describirá el lugar y el objeto que se moverá para cambiar las condiciones en cada movimiento. Es evidente que este último objeto no se puede mover libremente sobre el plano por lo que a su vez, dependerá de un tercer objeto.

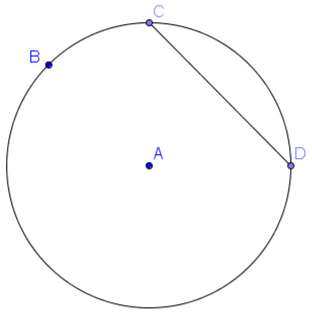
La herramienta para construir lugares geométricos se denomina **Lugar geométrico**  que se encuentra en el menú **Construcciones**.

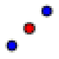
Ejemplo

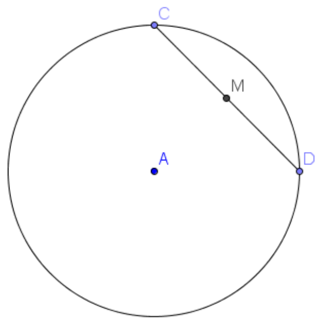
Dibuja el lugar geométrico descrito por el punto medio M de una cuerda AB cuando el punto B recorre la circunferencia.

Para obtenerlo realizaremos el proceso siguiente:

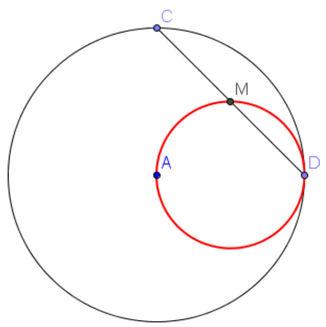
- Dibujamos una circunferencia y trazamos una cuerda CD, siendo C y D dos puntos distintos de los utilizados para crear la circunferencia.



- Utilizamos la herramienta **Medio o centro**  para dibujar el punto medio del segmento CD que llamamos M.



- Seleccionamos la herramienta **Lugar geométrico** y señalamos primero el punto M (que será el que describe el lugar) y el punto C (que será el que se mueva sobre la circunferencia).

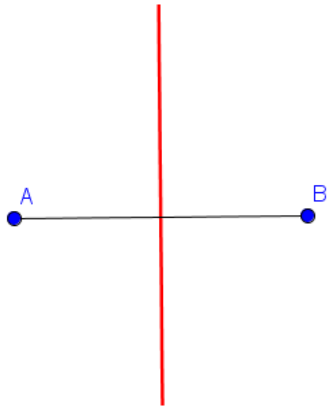


Obtenemos el lugar buscado, una nueva circunferencia que pasa por el otro extremo de la cuerda (D) y por el centro de la circunferencia inicial.

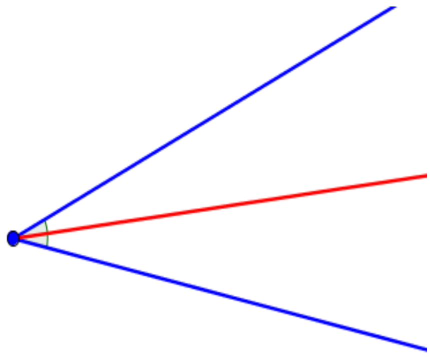
Recordemos que la herramienta lugar geométrico sólo se puede aplicar sobre puntos, por lo que para obtener el lugar descrito por otro objeto será necesario utilizar las opciones de animación y rastro.

LA MEDIATRIZ Y LA BISECTRIZ

Mediatriz: es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos A y B.



Bisectriz: es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas que se cortan A y B. La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que partiendo del vértice lo divide en dos ángulos iguales.



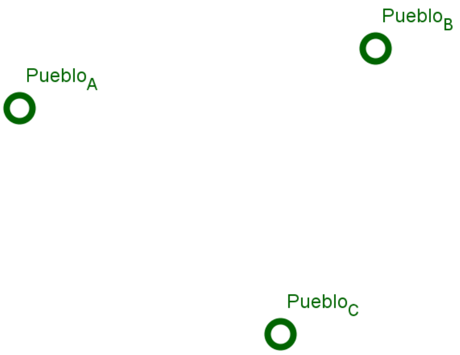
Actividad 1

Dos poblaciones P_1 y P_2 se han puesto de acuerdo para construir un merendero al lado del río y no saben donde hacerlo para que ninguno de los habitantes de ninguna de las poblaciones salga perjudicado.

¿Dónde deberán situar el merendero?

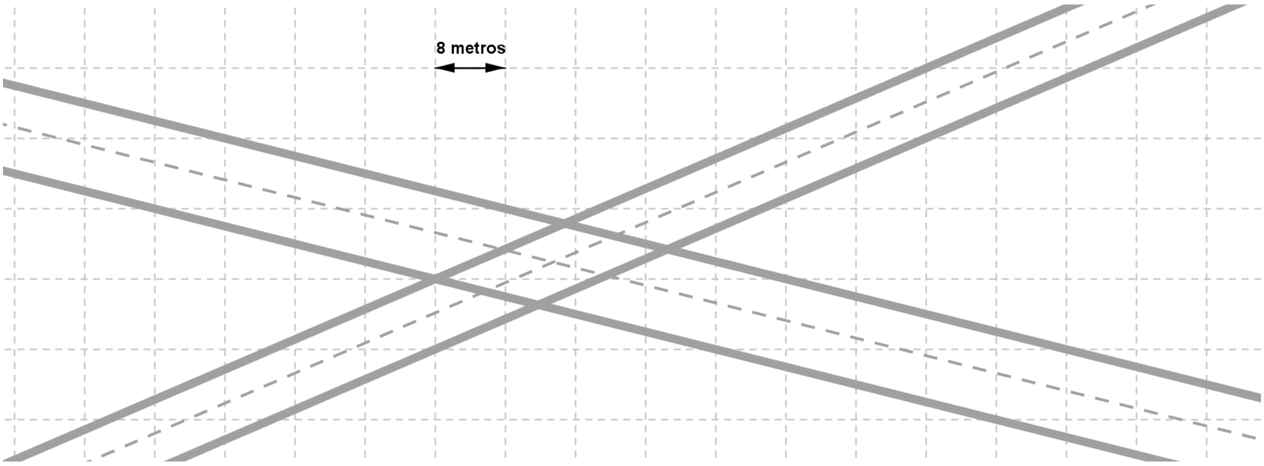
Actividad 2

Una empresa quiere construir una central eléctrica para abastecer a tres pueblos que no están en línea recta. ¿Cuál es el sitio adecuado para que la central esté a la misma distancia de los tres pueblos y de esta forma el coste del suministro sea mínimo para la empresa?



Actividad 3

Se desean colocar cuatro farolas de luz que se encuentre a la misma distancia de dos carreteras que se cruzan (una en cada uno de los ángulos que se forman), la distancia debe ser mayor de doce metros entre las farolas y las carreteras. ¿Dónde debemos colocarlas?

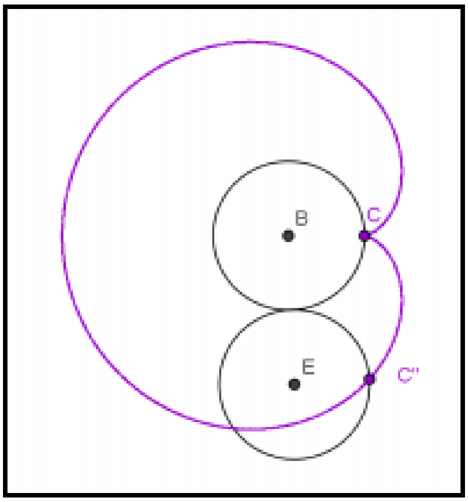


ACTIVIDADES DE INVESTIGACIÓN

Sea una circunferencia que rueda, sin deslizamiento, por el exterior de otra circunferencia de igual radio que permanece inmóvil, podrían ser, por ejemplo, dos monedas de igual valor.

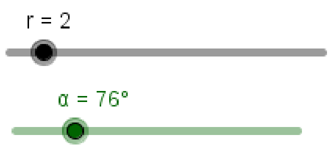
¿Qué trayectoria describirá un punto fijo de la circunferencia rodante?

La curva definida por esta trayectoria se llama **cardioide.**



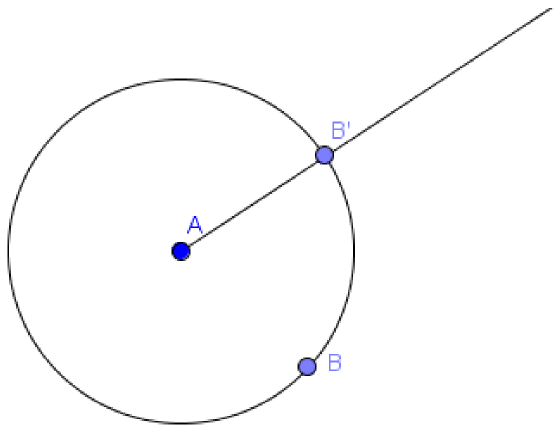
Para simular el movimiento de la circunferencia que rueda sobre otra circunferencia podemos seguir los pasos siguientes:

Definimos un deslizador para representar los valores del radio que llamamos r y deslizador de tipo angular.



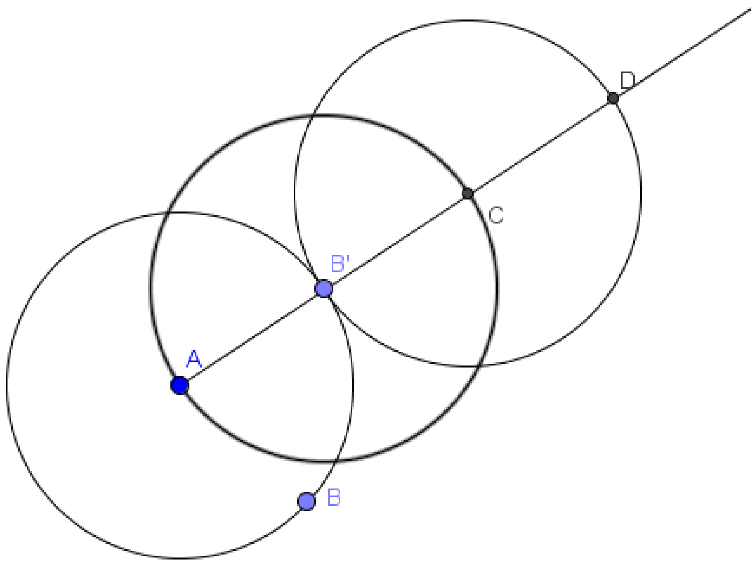
A continuación, dibujamos una circunferencia de centro A y cuya radio sea r, creando un punto B sobre ella.

Rotamos el punto B alrededor del punto A, un ángulo de α grados para obtener el punto B'. Trazamos a continuación la semirrecta AB'.



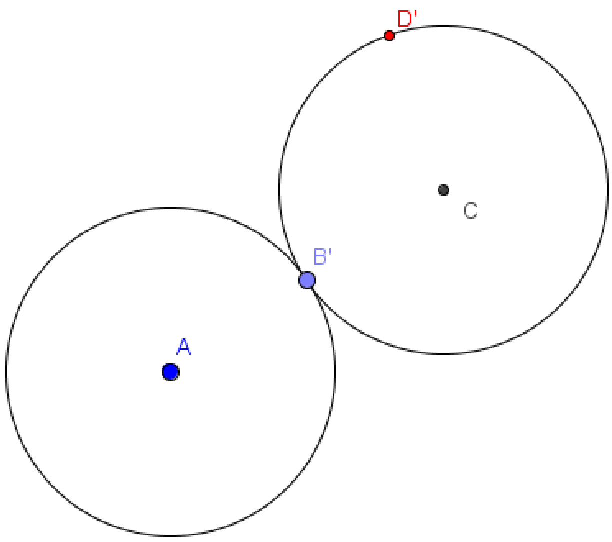
Trazamos una nueva circunferencia con centro en B' y radio r, determinando el punto de intersección de la semirrecta con esta nueva circunferencia. Este punto será C.

Con centro en C y radio r se traza una nueva circunferencia, para obtener el punto D intersección de la semirrecta con esta nueva circunferencia.

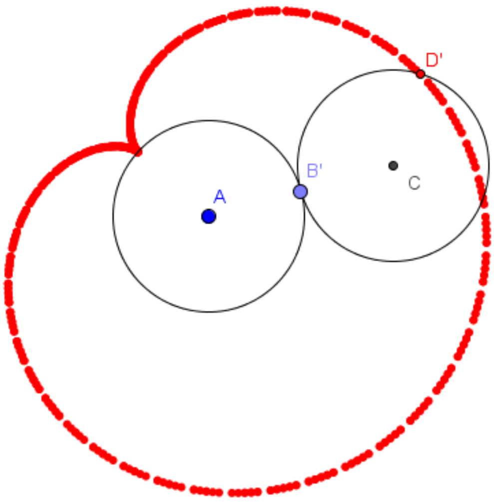


A continuación, rotamos el punto D alrededor de C un ángulo α para obtener el punto D'.

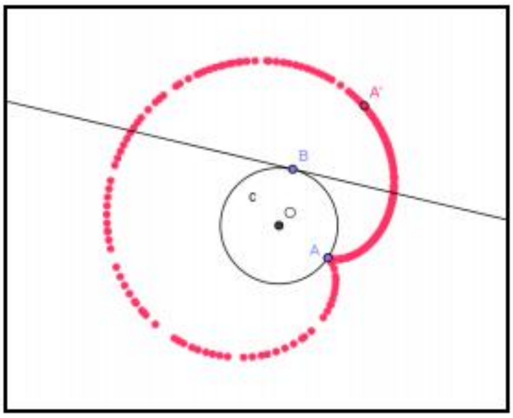
Ocultamos la semirrecta y la circunferencia intermedia. También podemos ocultar los puntos B y D.



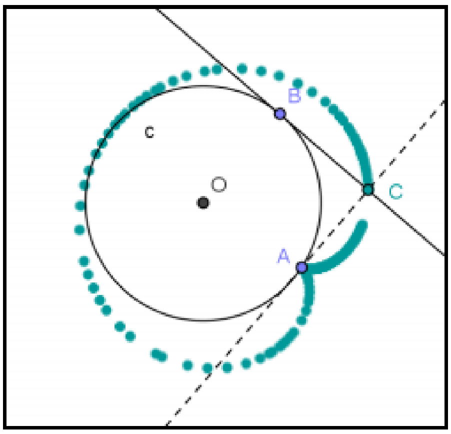
Activamos el rastro del punto D' al que hemos cambiado su color y animamos el deslizador correspondiente al ángulo, para simular el deslizamiento de las dos circunferencia y obtener la cardioide que es la curva descrita por el punto D'.



Comprueba que el conjunto de puntos simétricos a un cierto punto A de una circunferencia dada en relación a todas las tangentes posibles a la circunferencia, es una Cardioide.



Comprueba también que el conjunto de pies de las perpendiculares trazadas desde un punto A de una circunferencia a todas las tangentes posibles a ella, es una Cardioide.

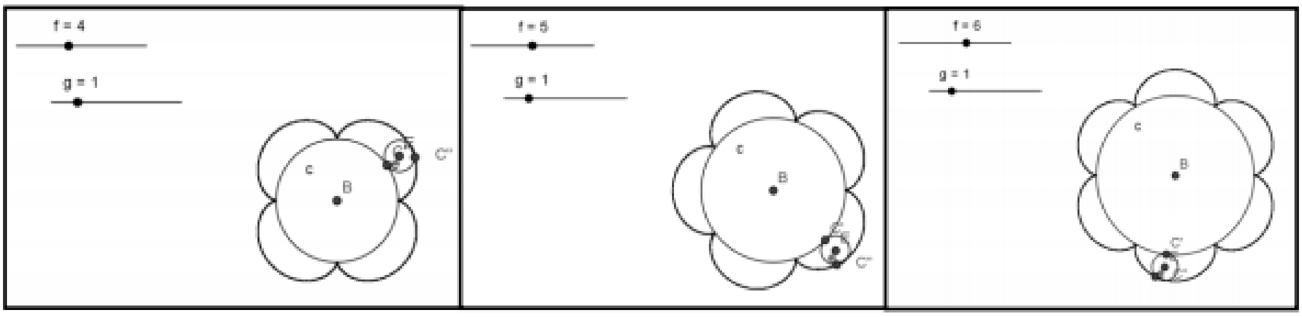


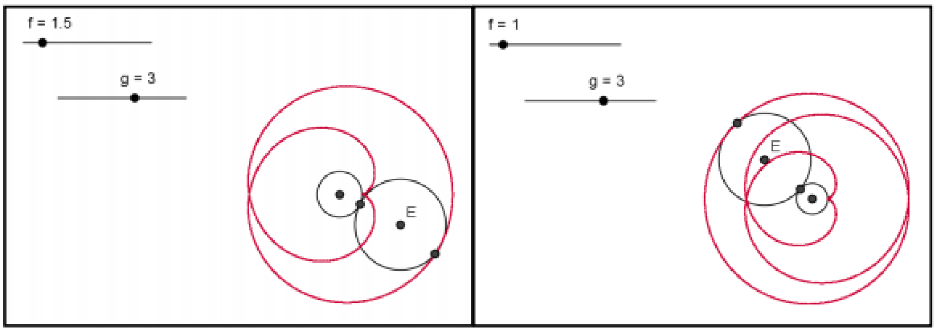
¿Qué pasa si los radios de las circunferencias no son iguales? Probamos definiendo dos deslizadores para los radios de cada una de las circunferencias.

1.- ¿Qué figuras obtenemos si los radios de las circunferencias son números enteros?

2.- ¿Qué sucede si la relación entre los radios no es un número entero?

3.- ¿Y si la circunferencia que se desliza es de radio mayor que la inmóvil?





Obtenemos así las curvas llamadas **concoides del círculo** o **caracoles de Pascal**.

CONSTRUCCIÓN DE CURVAS

Con la herramienta **Lugar geométrico** o con el rastro y animación, según sea el caso, podemos obtener distintas curvas.

En las siguientes actividades proponemos algunas.

CISOIDE DE DIOCLES

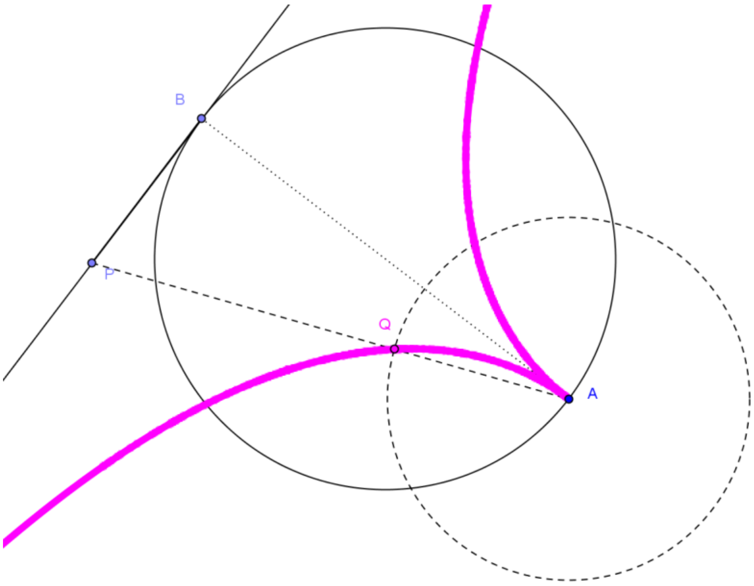
Para construir la cisoide de Diocles dibujamos una circunferencia y dos puntos A y B extremos de un diámetro de la misma.

Trazamos la recta tangente a la circunferencia sobre uno de ellos, el punto B, y sobre esta recta situamos otro punto P.

Sea m la distancia entre P y B. Unimos el punto P con A y se dibujamos una circunferencia de centro A y radio m. La intersección de esta circunferencia con el segmento AP nos dará un punto Q que cumple la relación d(A, Q) = d(B, P).

Determina el lugar geométrico del punto Q al mover P.

El resultado será la cisoide de Diocles cuyo aspecto será similar a la imagen siguiente:



LA BRUJA DE AGNESI

Para obtener esta curva, partimos de una circunferencia c de centro O que pasa por A. Sea B el extremo opuesto del diámetro de extremo A.

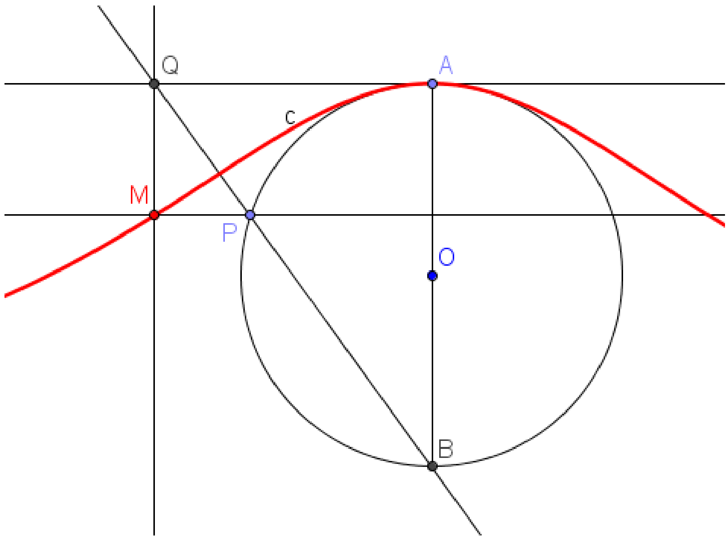
Traza la tangente t a la circunferencia en A y dibuja un punto P sobre c.

Dibuja la recta que pasa por B y P, siendo Q el punto intersección con la tangente t.

Desde P dibuja la paralela a la recta tangente t y desde Q, traza la perpendicular a la misma tangente; llamamos M al punto intersección de la paralela y la perpendicular.

Halla el lugar geométrico del punto M cuando P recorre la circunferencia.

La curva que tienes que obtener se denomina la bruja de Agnesi.



LA CICLOIDE

La cicloide es la curva engendrada por un punto situado sobre una circunferencia que gira sobre una recta sin deslizarse.

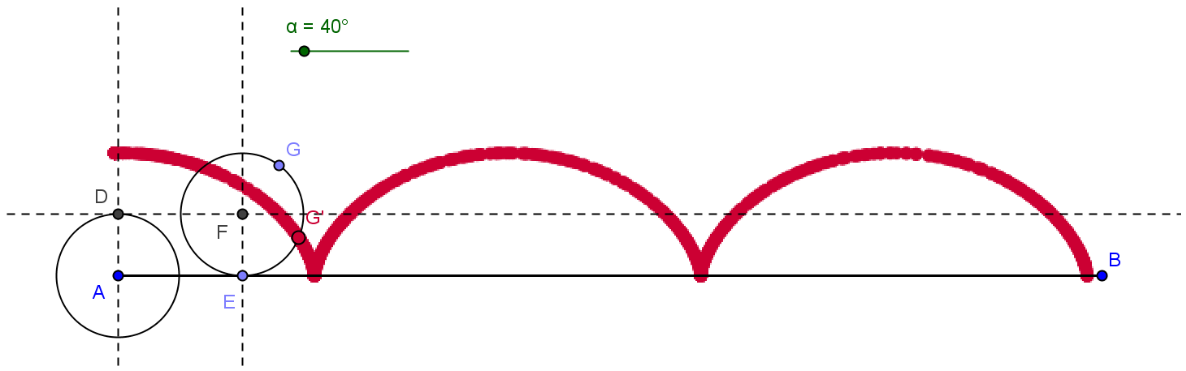
La historia de la cicloide data de 1634; muchos matemáticos como Pascal, Galileo, Descartes y Mary Somerville se han ocupado de estudiarla.

Si pensamos en la trayectoria de una válvula de una bicicleta tendremos una cicloide acortada y si pensamos en un punto de una rueda de un tren que sobresale del raíl tendremos una cicloide alargada.

Para obtener la cicloide recomendamos los siguientes pasos

- Trazar un segmento AB.
- Dibuja una circunferencia de centro A y radio r (asigna un valor cualquiera, por ejemplo r=1).
- Traza una recta perpendicular al segmento AB por el punto A. Sea D uno de los puntos (superior) de intersección de la recta con la circunferencia.
- Traza una paralela al segmento AB por el punto D.
- Sitúa un punto E sobre el segmento AB.
- Traza una perpendicular al segmento AB por el punto anterior E. Sea F el punto de intersección con la paralela a AB.
- Dibuja una circunferencia de centro F y radio r (r=1).
- Sobre esta circunferencia sitúa un punto G.
- Define un deslizador angular α , y déjalo en 45º.
- Utiliza la herramienta rotación para rotar el punto G alrededor del centro F, un ángulo igual a la medida del segmento AE (g) menos el ángulo α (g-α) que previamente debes haber dibujado con la herramienta segmento AE. Obtendrás el punto G'.

- Para dibujar la cicloide se puede hacer de dos formas:
  - Activa el rastro de G’ y mueve el punto E a lo largo del segmento AB
  - Mediante la herramienta Lugar geométrico dibuja el lugar que describe el punto G’ cuando E recorre el segmento AB.



EPICICLOIDES

Utilizaremos las posibilidades que nos dan el rastro y la animación automática para construir las curvas denominadas epicicloides, para las que utilizaremos los deslizadores para controlar las velocidades de las animaciones.

Dibuja una circunferencia c1, ocultando los puntos que utilizados para su construcción. Sobre ella dibuja un punto C; a continuación, dibuja una nueva circunferencia c2 con centro en C y radio fijo. Sobre esta nueva circunferencia c2 dibuja un punto D.

Define un deslizador a que comienza en 2 y llega hasta 10 con incremento de una unidad.

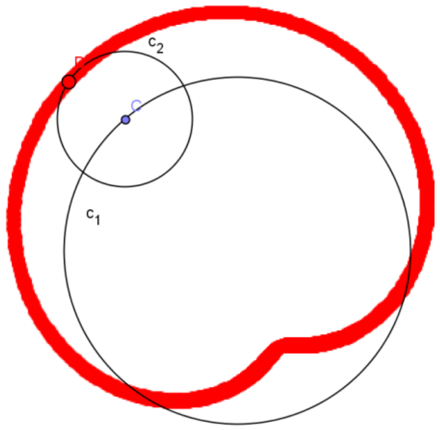
Activa las animaciones automáticas de los puntos C y D, y entra en las propiedades del punto D y escribe el valor a del deslizador como velocidad de animación del punto D.

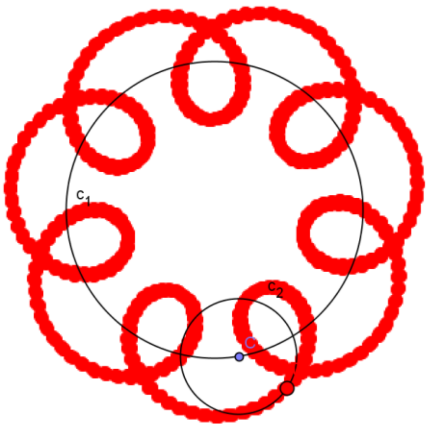
Observa lo que ocurre con el punto D.

Cambia de color el punto D y activa su rastro.

Y finalmente comprueba las figuras que obtienes moviendo el deslizador a que define la velocidad de la animación del punto D.

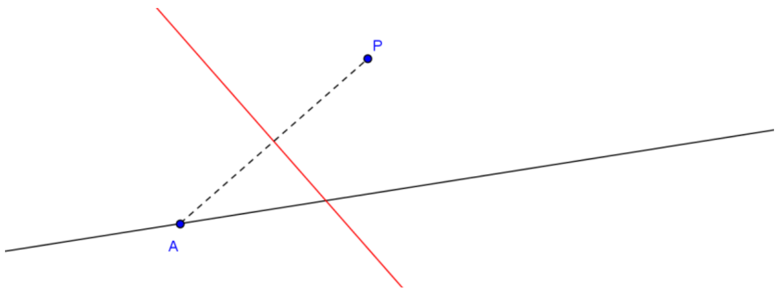
Obtendrás algunas curvas similares a las imágenes siguientes:





Actividad 1

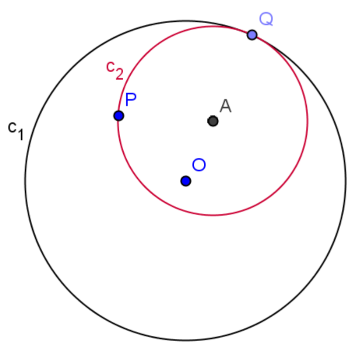
Dada una recta y un punto exterior arbitrario P. Tomar un punto A sobre la recta y hallar la mediatriz de segmento PA. Hallar el lugar geométrico que determina mediatriz (activa su rastro) cuando A recorre la recta.



Actividad 2

Sea P un punto interior de una circunferencia c_1. Sea Q un punto cualquiera de dicha circunferencia. Construye la circunferencia c_2 tangente en Q que pasa por el punto P, y halla el lugar geométrico de los centros de las circunferencias c_2 cuando Q se mueve en la circunferencia c_1.

¿Qué ocurre si P coincide con O? ¿Y si P está fuera de la circunferencia c_1?



Actividad 3

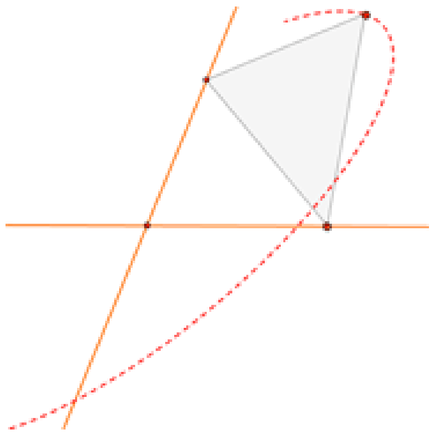
Estudia el lugar geométrico del punto de corte de las diagonales de un cuadrilátero cíclico cuando los vértices del cuadrilátero recorren la circunferencia.

Si variamos la velocidad de uno sólo de los vértices, entre dos y diez, ¿qué figuras se obtienen?

Actividad 4. El Lugar Geométrico de Van Schooten

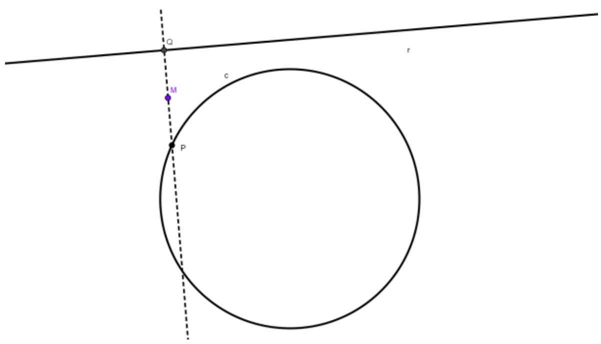
Los vértices de un triángulo rígido se deslizan en el plano por los lados de un ángulo. ¿Qué lugar geométrico describe el tercer vértice?

Realiza la siguiente construcción y piensa que ocurriría si construimos otro polígono cualquiera



Actividad 5

Traza una recta r y una circunferencia c cualquiera que no interseque a la recta. Dibuja un punto P cualquiera sobre la circunferencia y halla el punto de intersección de la recta ortogonal a la recta r que pasa por P y la propia recta r. Dibuja el lugar geométrico de los puntos medios del segmento PQ.



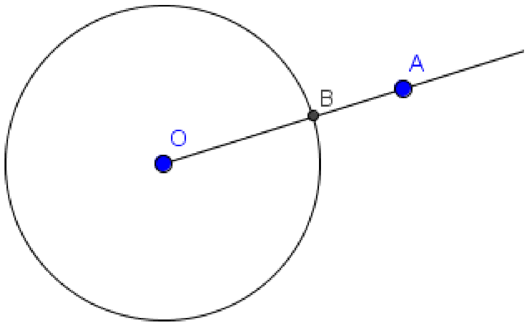
¿Influye de algún modo que la circunferencia c y la recta r no sean secantes?

Actividad 6

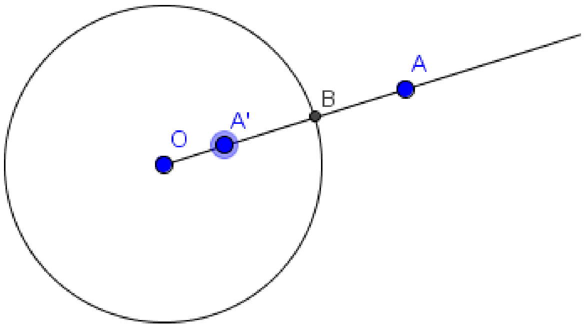
Con ayuda de las herramientas disponibles en GeoGebra para dibujar una elipse. Comprueba la relación entre la excentricidad y la forma de la elipse.

Actividad 7

Sea c una circunferencia con centro en O y sea A un punto del plano distinto de O. La semirrecta OA cortará a la circunferencia c en el punto B.

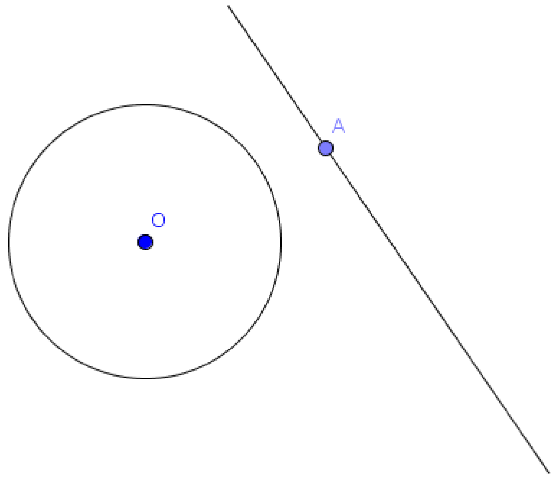


El punto A’ simétrico de A con respecto al punto B se denomina simétrico de A con respecto a la circunferencia c.

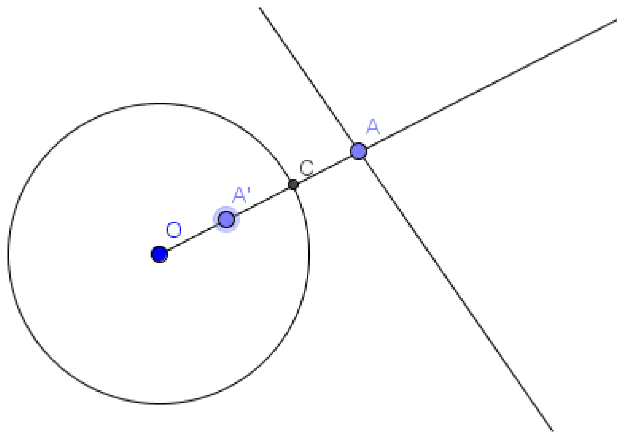


Por ejemplo, para obtener el simétrico de una recta con respecto a la circunferencia c realizaríamos el proceso siguiente:

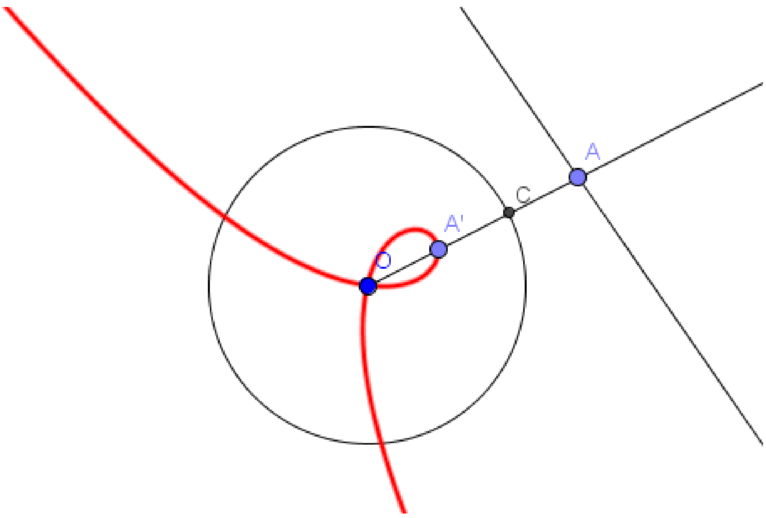
1. Dibujamos la recta r y situamos un punto A en la recta.



2. Obtenemos A’ simétrico del punto A con respecto a la circunferencia c.



3. Utilizando la herramienta Lugar geométrico obtenemos el lugar que describe el punto A’ cuando A recorre la recta.



De manera similar, obtén el simétrico de una circunferencia e y el simétrico de un cuadrado.

Actividad 8

Construye los óvalos de Cassini que se definen como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el producto de su distancia a dos puntos fijos, denominados focos, es contante.

Actividad 9

A partir de una curva c se traza la recta tangente en un punto P de c. Sea Q el punto de intersección de la recta tangente anterior con la recta perpendicular a la tangente por un punto O.

Se denomina podaría de la curva c al lugar geométrico del punto Q cuando P recorre la curva c.

Hallar la podaría de una elipse para los siguientes casos:

a. O es un punto exterior a la elipse.

b. O es un punto de la elipse.

c. O es el centro de la elipse.

d. O es un foco de la elipse.

Actividad 10

La curva denominada astroide se puede construir como la envolvente de todos los segmentos de longitud r, cuyos extremos se apoyan en dos diámetros perpendiculares de una circunferencia cuyo radio es también r.

Realiza la construcción necesaria para obtener esta curva.