Club GeoGebra Iberoamericano

7

GEOMETRÍA AFÍN Y EUCLÍDEA EN EL PLANO

GEOMETRÍA AFÍN Y EUCLÍDEA EN EL PLANO

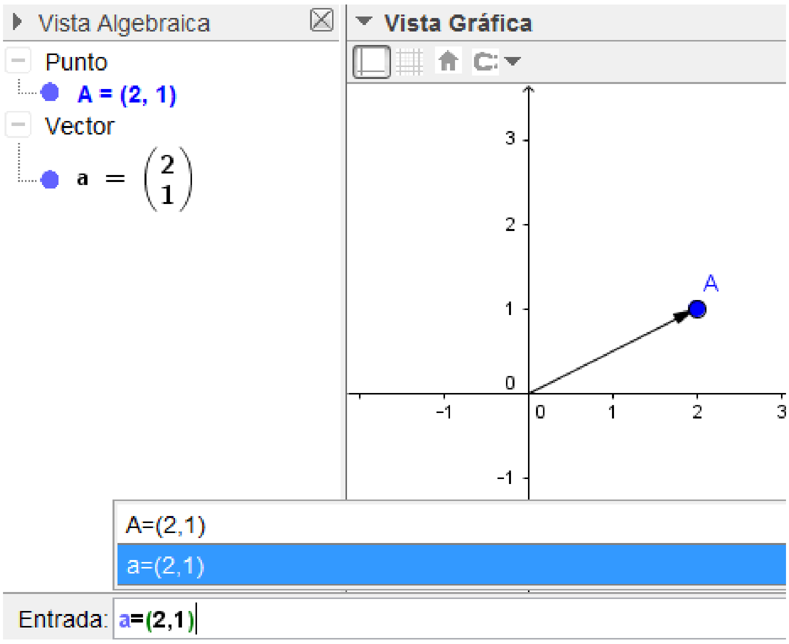
INTRODUCCIÓN

A través de las actividades que proponemos a continuación describiremos las opciones de GeoGebra que permiten trabajar la geometría afín y euclídea.

Además, expondremos algunos comandos que servirán para crear puntos, definir rectas y otros objetos, que se podrán utilizar como alternativa a las distintas herramientas ya conocidas.

En el plano ya conocemos la forma en la que crear un punto utilizando la correspondiente herramienta, aunque también podemos definirlo a través de sus coordenadas, introduciendo la expresión desde la línea de entrada.

Así A=(2,-1) creará el punto A cuyas coordenadas son (2, -1). No olvidemos que si escribimos a=(2,-1) lo que hemos creado es el vector a con las mismas coordenadas.



De manera análoga, utilizando comandos podemos definir una recta en el plano, tal y como exponemos a continuación.

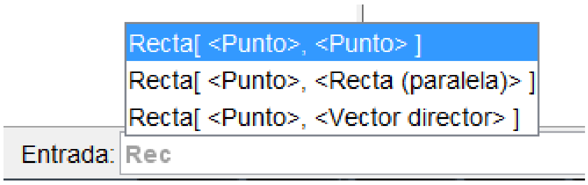
RECTAS EN EL PLANO

Sabemos que una recta se puede crear con la correspondiente herramienta a partir de dos puntos; pero también sabemos que una recta queda definida por dos puntos o por un punto y su vector director. Estas dos opciones son dos de las opciones que nos permite el comando **Recta**.

Recta[A, B] crea la recta que pasa por los puntos A y B, mientras que **Recta[A, v]** traza la recta que pasa por el punto A y tiene a $\vec{v}$ como vector director.

Este comando ofrece una nueva opción que facilitará trazar la recta que pasa por un punto A y es paralela a una recta r. Para ello, escribiremos **Recta[A, r]**.

Todas las opciones aparecerán al escribir Recta en la línea de entrada.



Estas opciones nos permitirán resolver problemas similares a los que exponemos a continuación.

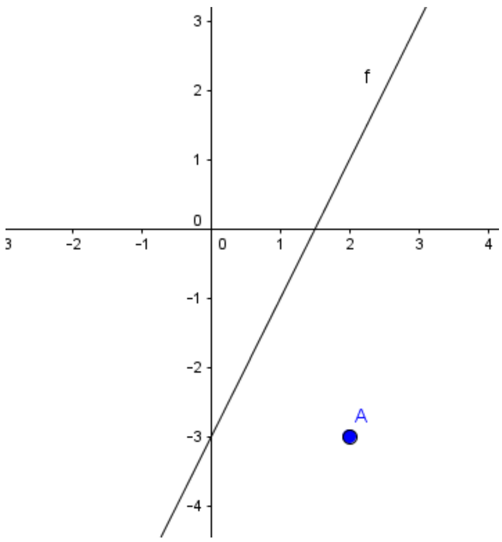
Actividad 1

Dada la recta de ecuación 2x-y=3. Halla la ecuación de la recta paralela que pasa por el punto A(2, -3).

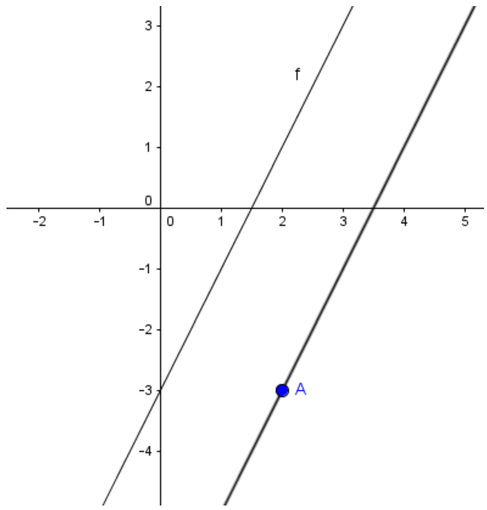
Comenzamos trazando la recta dada, para lo que bastará con escribir su ecuación en la línea de entrada.

A continuación definimos el punto A cuyas coordenadas son (2, -3).

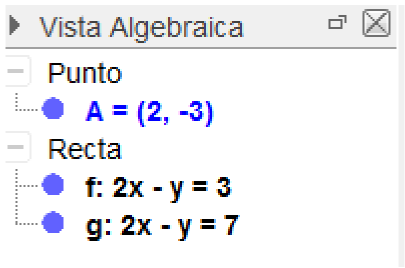
Tendremos en la vista gráfica los dos objetos, tal como aparecen en la imagen siguiente:



Ya sólo queda utilizar la herramienta **Recta paralela** o ejecutar en la línea de entrada el comando **Recta[A, f]**, ya que f es el nombre asignado a la recta dada.



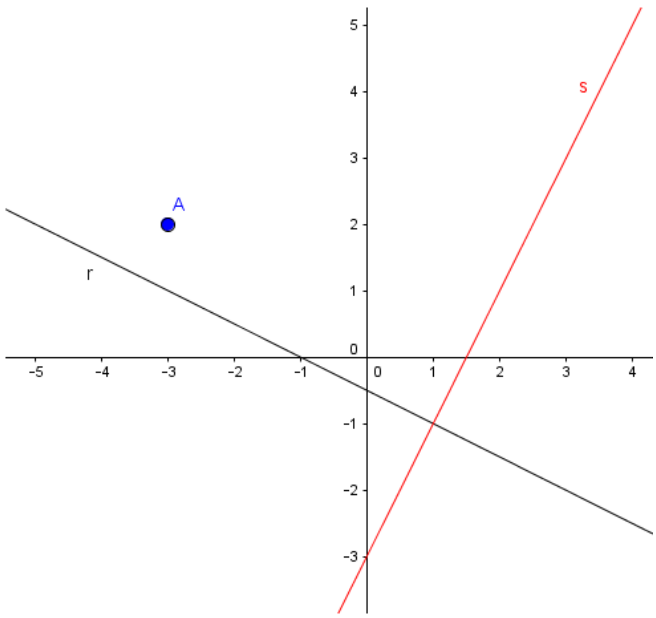
Como es evidente, en la vista algebraica aparecerán las ecuaciones de las dos rectas.



Actividad 2

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de las rectas r: x+2 y= -1 y s: 2 x - y=3, y por el punto (-3, 2).

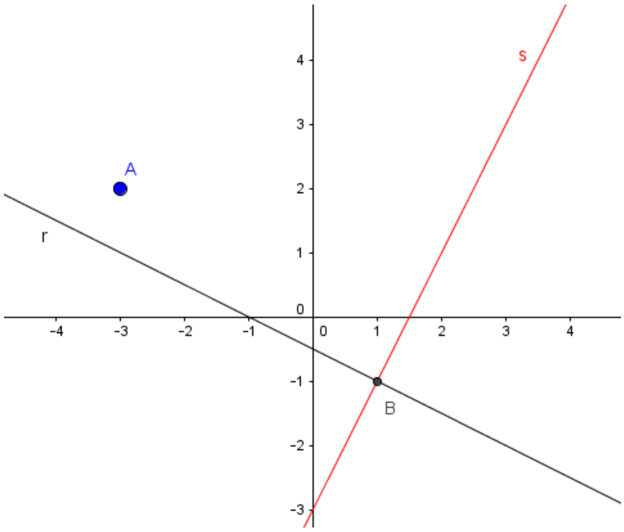
Al igual que en el ejemplo anterior, comenzamos dibujando las dos rectas, introduciendo su ecuación a través de la línea de entrada. También, definimos el punto A(-3,2).



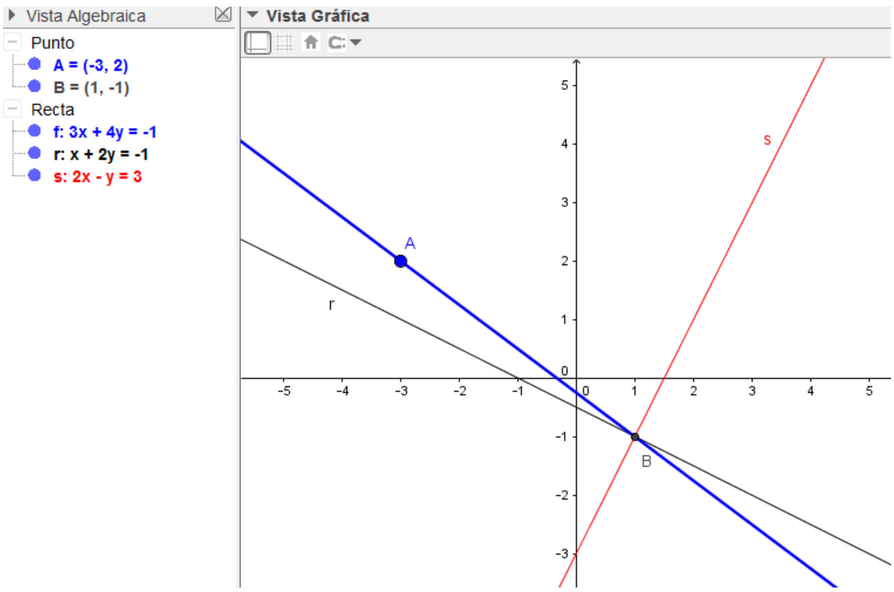
Hemos aprovechados la opción Renombra para cambiar el nombre a las dos rectas.

A continuación, obtenemos el punto de corte de las dos rectas, utilizando la herramienta **Intersección** o ejecutando, desde la línea de entrada el comando **Interseca[r, s]**, cuyo formato general es **Interseca[objeto, objeto]**.

Obtendremos el punto B de coordenadas (1, -1), tal y como aparece en la imagen siguiente:



Ya sólo queda obtener la recta que pasa por A y B, para lo que podemos utilizar la herramienta **Recta** o el comando del mismo nombre **Recta[A,B]**.



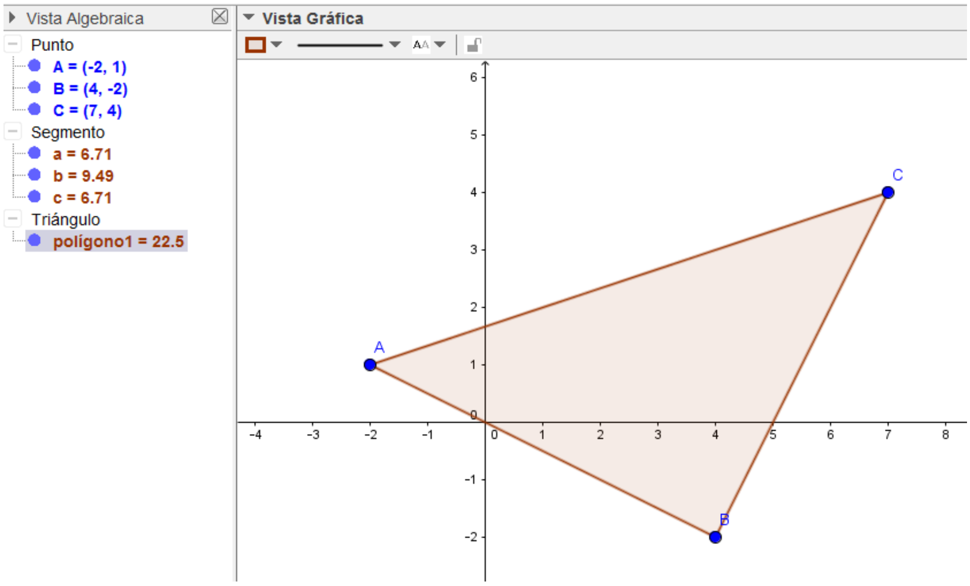
Actividad 3

Dado el triángulo de vértices A(-2, 1), B(4, -2) y C(7,4). Determina las ecuaciones de los lados, las ecuaciones de las medianas y las coordenadas del baricentro.

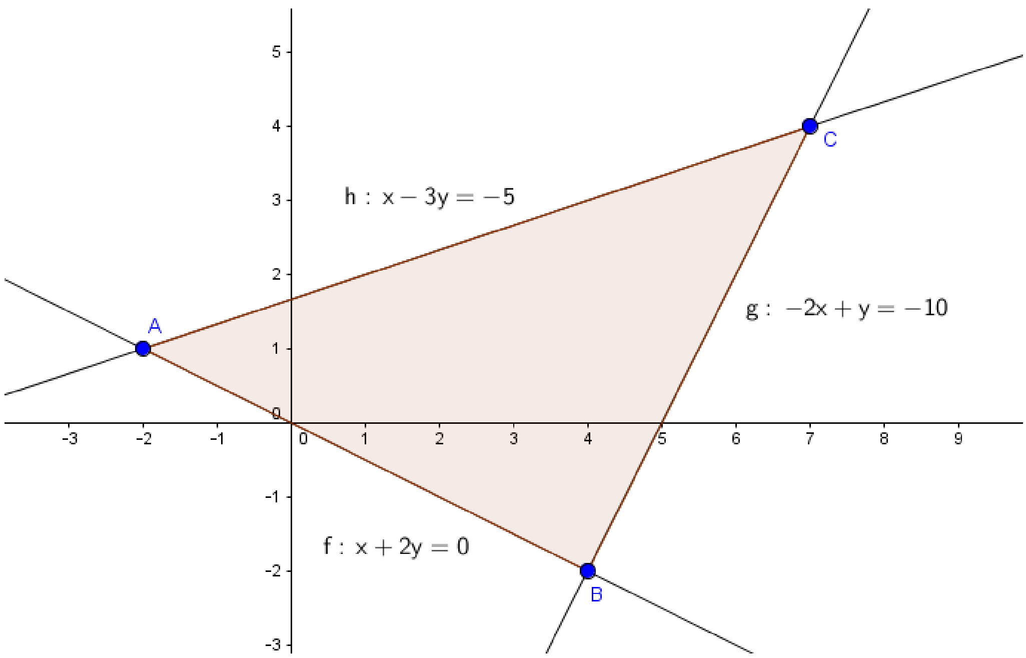
Comprueba la propiedad que cumple el baricentro.

El primer paso para resolver esta actividad será definir los tres puntos correspondientes a los vértices, introduciendo sus coordenadas desde la línea de entrada. Al ser las coordenadas valores enteros también se puede activar la cuadrícula y la atracción a la cuadrícula.

A continuación, con la herramienta Polígono, dibujamos el triángulo de vértices A, B y C.

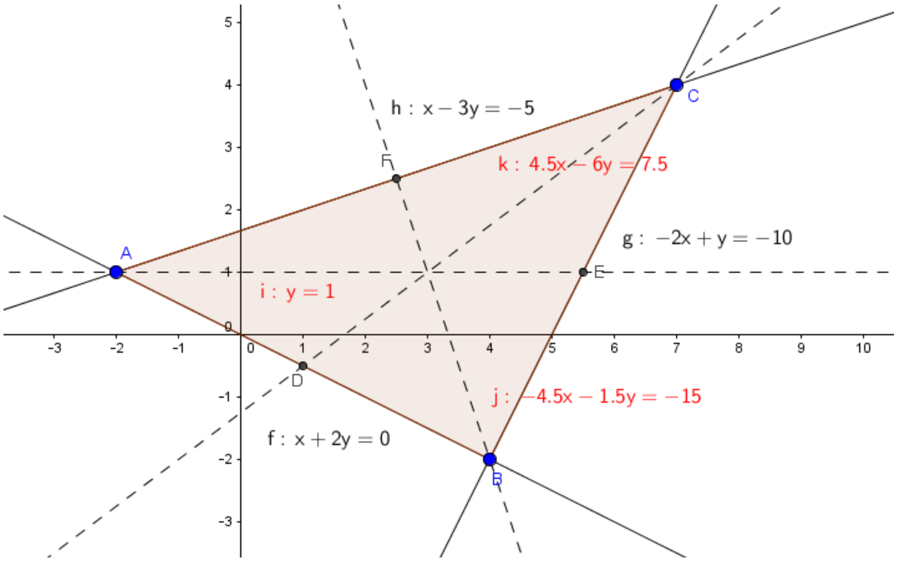


Para obtener las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados, basta con ejecutar el comando o la herramienta **Recta** para cada par de vértices.

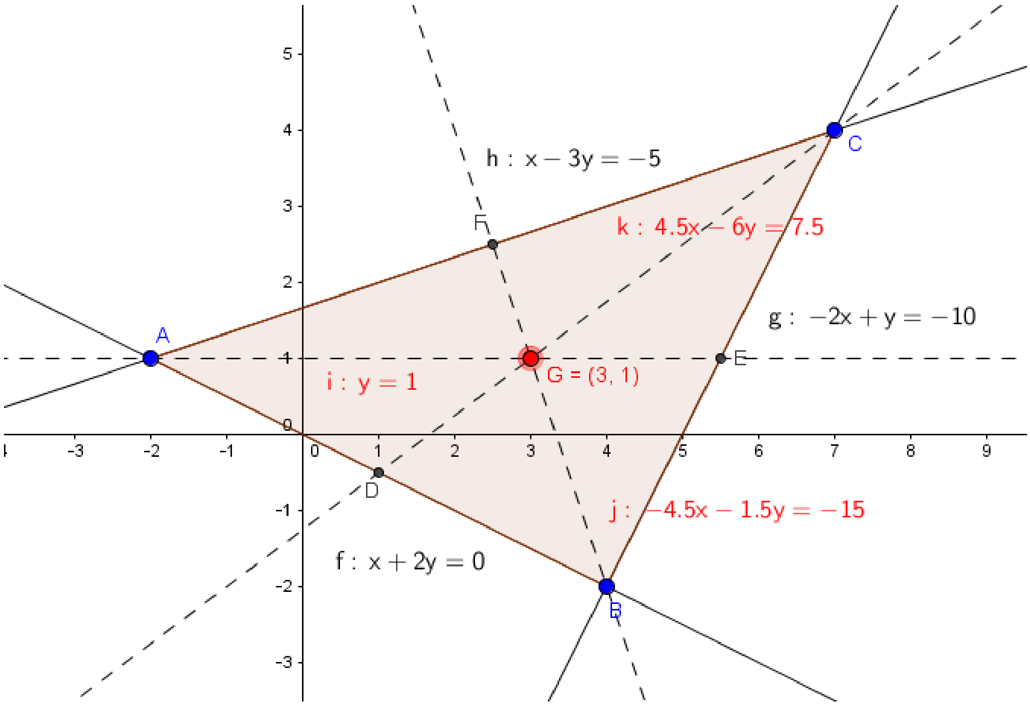


Para que aparezca la expresión de cada recta basta con arrastrarla desde la vista algebraica.

A continuación, para obtener las medianas dibujamos los puntos medios de cada lado, utilizando la herramienta **Punto medio**, trazando a continuación las medianas, como rectas que pasan por cada vértice y por el punto medio del lado opuesto.

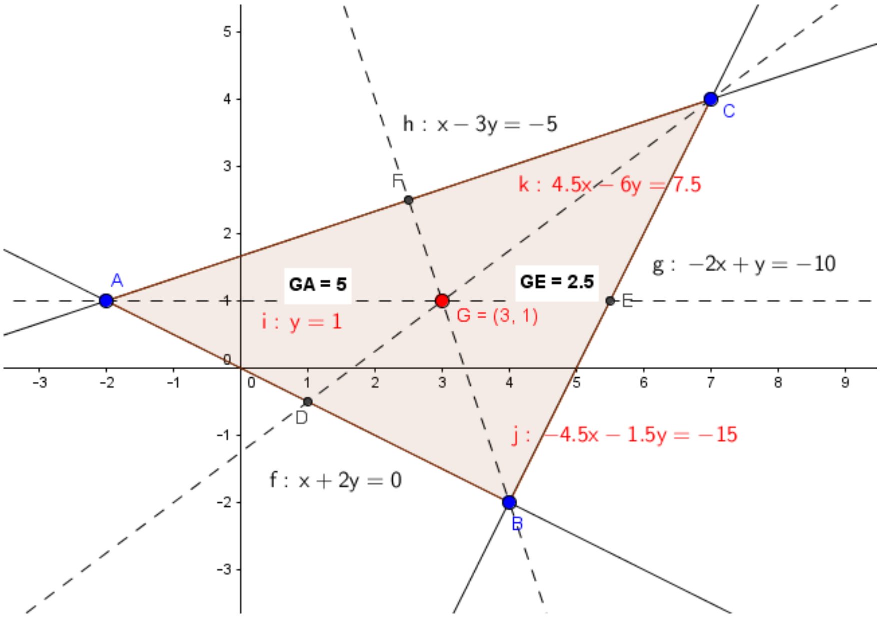


Ahora hallamos el baricentro como punto de intersección de dos cualquiera de las medianas, obtendremos el punto G(3, 1).



Ya sólo queda comprobar la propiedad del baricentro. Para ello, calculamos la distancia del baricentro a uno de los vértices y al punto medio de la mediana trazada desde dicho vértice.

Por ejemplo, calculamos la medida de GA y de GE. Obtenemos que $\overline{GA} = 5$ y $\overline{GE} = 2.5$



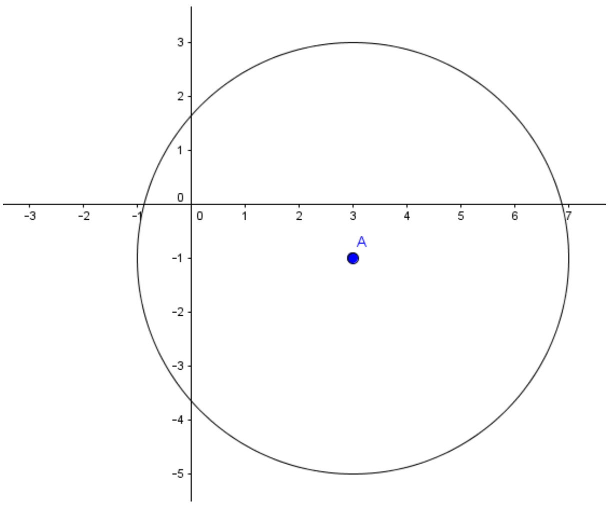
Por lo que se cumple que La distancia del baricentro a cada vértice es doble que al punto medio del correspondiente lado opuesto.

Actividad 4

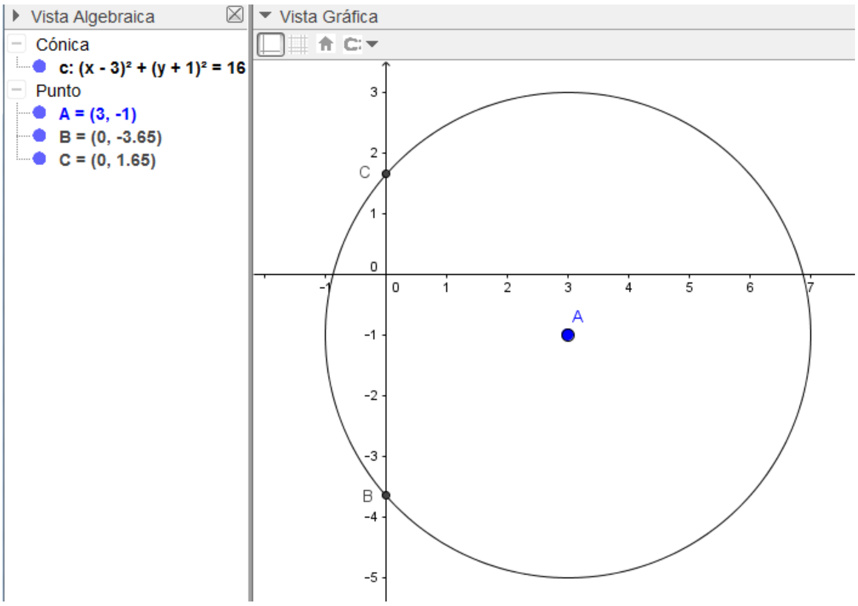
Dados el punto A(3,-1), halla las coordenadas de otro punto B sabiendo que se encuentra en el eje de ordenadas y dista 4 unidades del A.

Como siempre, comenzamos definiendo el punto A.

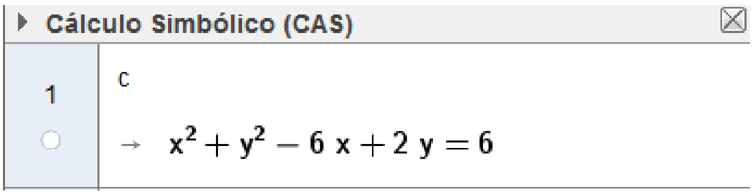
Para encontrar los puntos que están a 4 unidades del punto A, dibujamos la circunferencia de centro A y radio igual a 4, utilizando la herramienta **Circunferencia (centro, radio)** o el comando **Circunferencia[A,4]** cuyo resultado es el mismo.



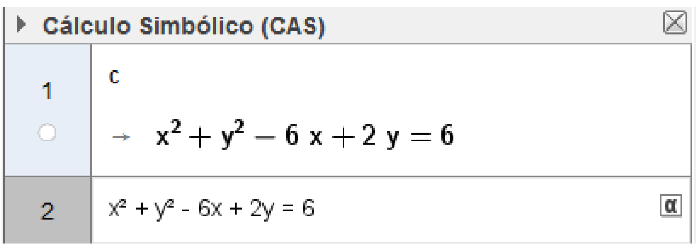
Como los puntos buscados están en el eje de ordenadas, basta con encontrar la intersección de la circunferencia con dicho eje, para obtener las coordenadas de los puntos B y C.



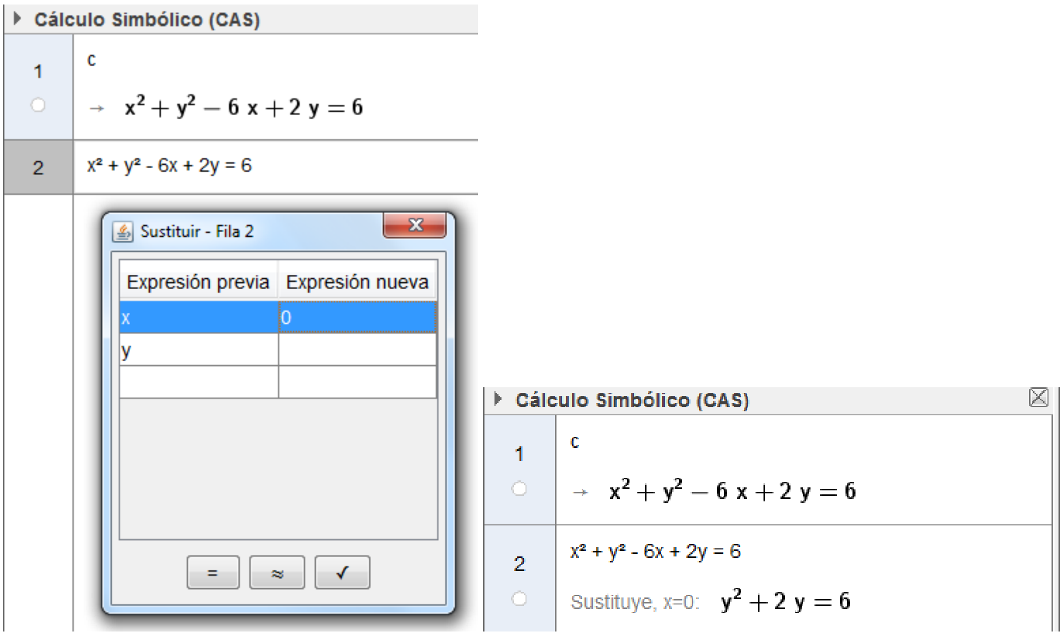
Aprovechando las opciones que ofrece la vista CAS podemos obtener el valor exacto de la ordenada de los puntos B y C.
Para ello, en la primera fila de la vista CAS escribimos c para que al pulsar **Enter** aparezca la ecuación de la circunferencia.



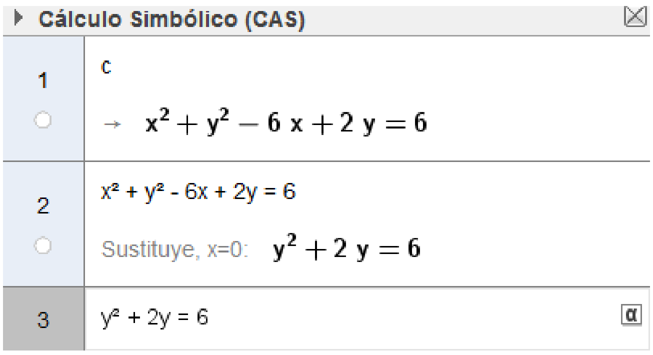
A continuación, en la segunda fila pulsamos la barra espaciadora para que aparezca la ecuación anterior.



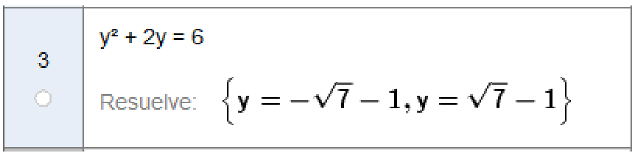
Utilizando la herramienta **Sustituye**, sustituimos en la expresión anterior el valor x por 0 ya que al estar los puntos en el eje de ordenadas, su abscisa es 0.



De nuevo pulsamos la barra espaciadora para que aparezca la expresión anterior en la fila 3.



Por último, utilizamos la herramienta **Resuelve** X= para resolver la ecuación anterior.



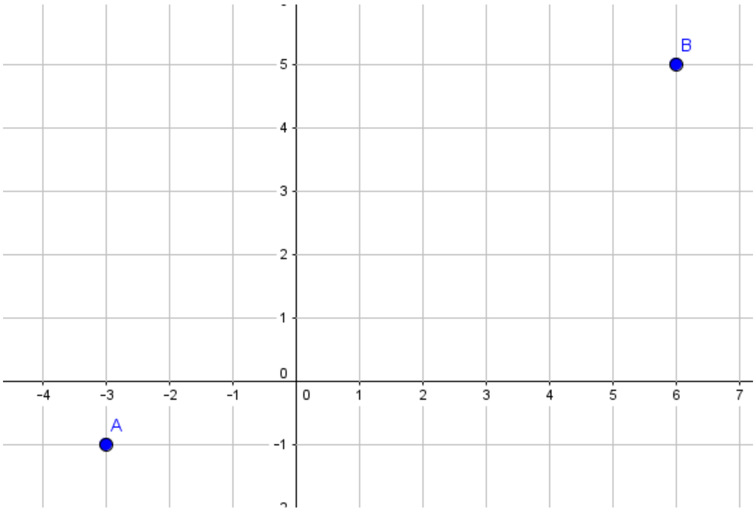
Ya tenemos la solución exacta, los puntos que están a una distancia igual a cinco unidades del punto A son: $(0, -\sqrt{7} - 1)$ y $(0, \sqrt{7} - 1)$.

Actividad 5

Dados los puntos A(-3, -1) y B(6, 5), halla las coordenadas del punto C que divide al segmento en dos partes, de manera que la primera AC es doble de la segunda CB.

Aunque matemáticamente no es correcto sumar las coordenadas de sus puntos, con GeoGebra si se podrán efectuar para obtener otros puntos.

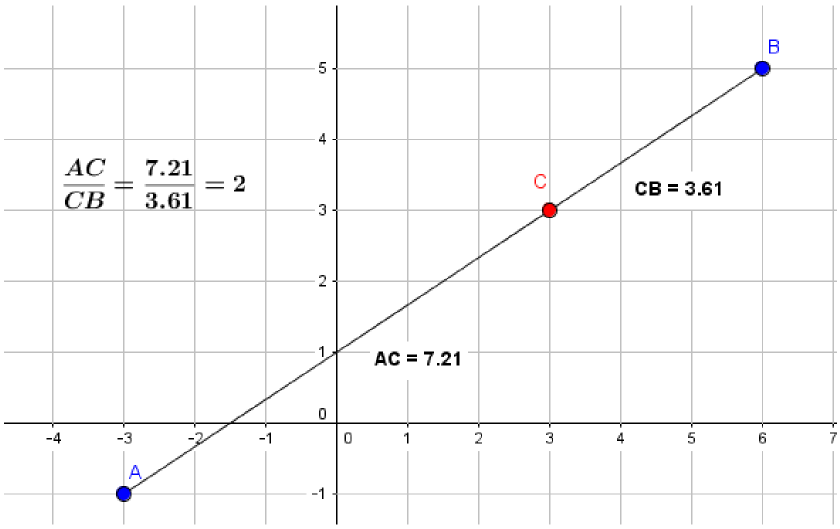
Para resolver la actividad anterior, comenzamos definiendo los puntos A y B.



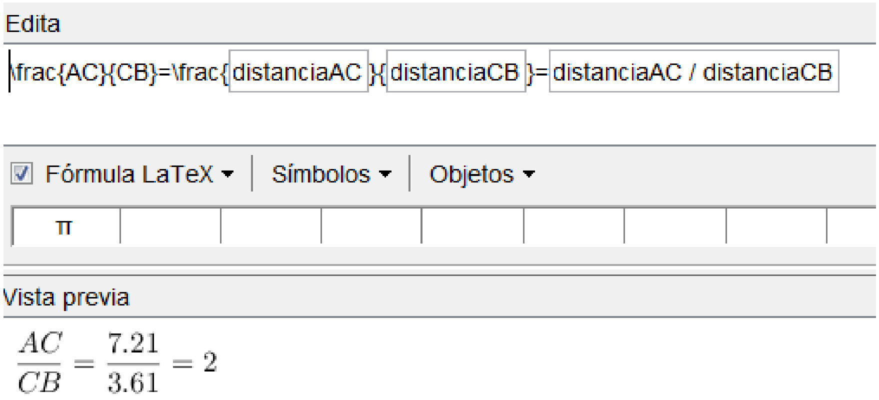
A continuación, definimos un nuevo punto C que cumpla la condición de encontrarse al doble de distancia de B que de A.

$C = A + \frac{2}{3}(B - A)$

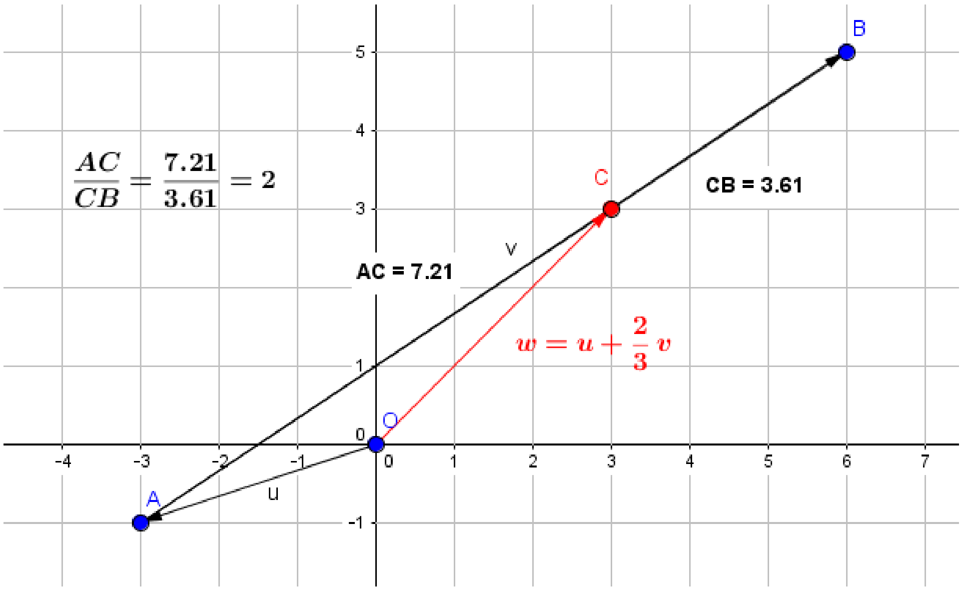
Obtenemos el punto C que podemos comprobar que cumple $\overline{AC} = 2\,\overline{CB}$



Para obtener el texto, basta con introducir la expresión que aparece en la imagen siguiente:



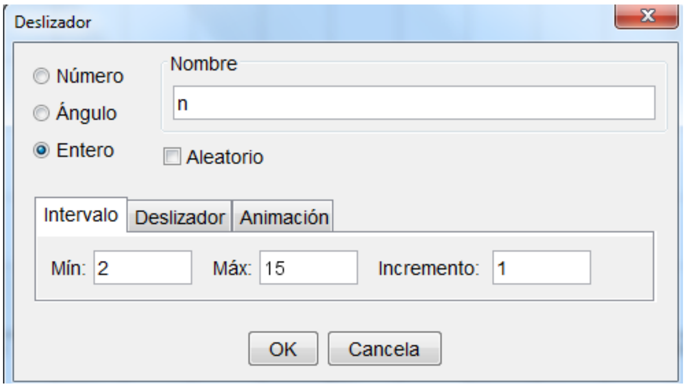
Aunque el efectuar operaciones con puntos parezca un error, no lo es, ya que en realidad lo que GeoGebra efectúa son operaciones con sus correspondientes vectores de posición, tal y como podemos observar en la imagen siguiente:



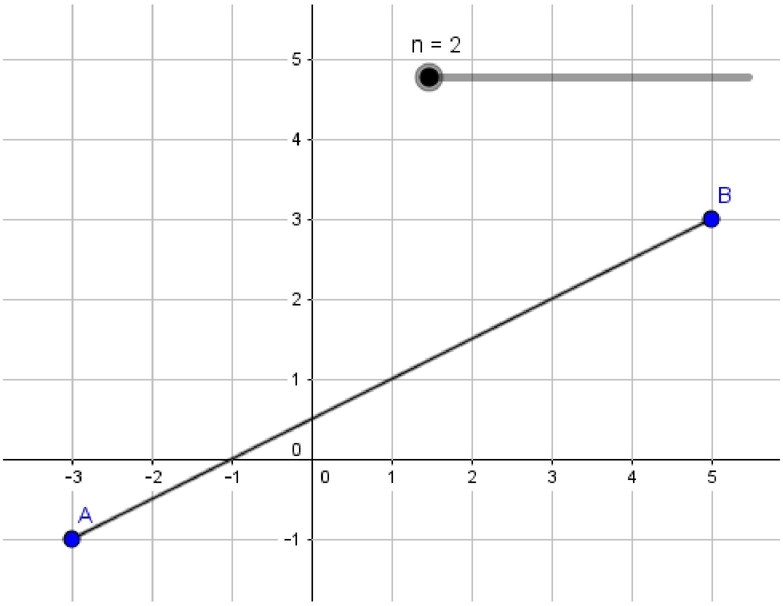
Actividad 6. División de un segmento en partes iguales

Queremos elaborar una construcción para dividir un segmento en n partes iguales, para lo que necesitamos comenzar creando un deslizador que determine el número de partes. Este deslizador será numérico, tomando como valor mínimo 2 y como valor máximo el que nos parezca oportuno.

Utilizamos la herramienta **Deslizador** , estableciendo los valores siguientes:



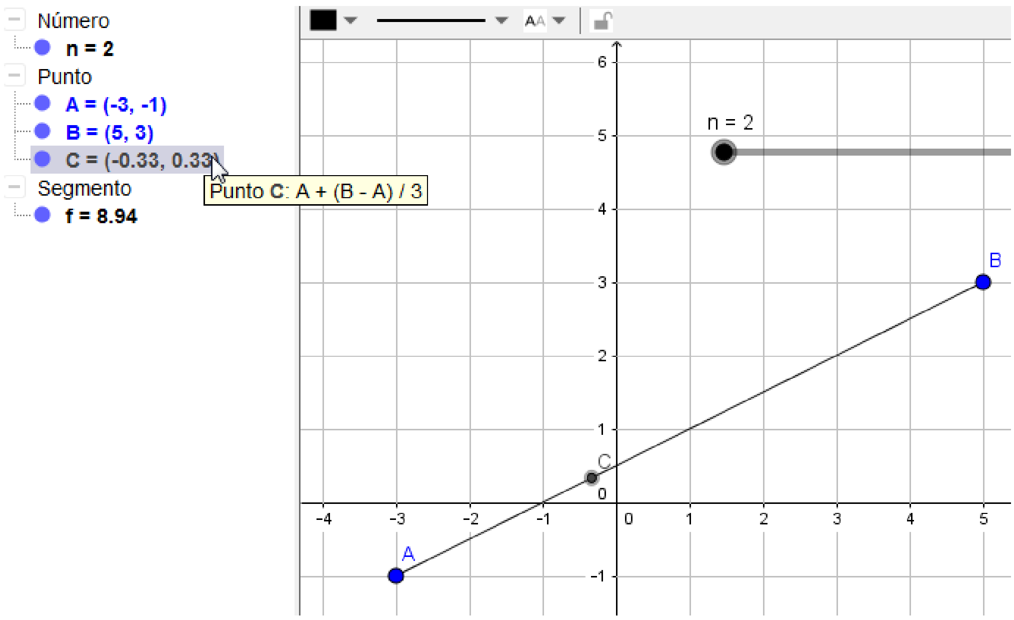
A continuación dibujamos un segmento cualquiera AB.



El siguiente paso será obtener los puntos de las divisiones, para lo que utilizaremos el comando **Secuencia**.

Como ha quedado expuesto en la actividad anterior, es posible "sumar puntos" aunque en realidad lo que estamos sumando son vectores.

Así, $A + \frac{1}{2}(B - A)$ dará el punto medio del segmento AB, $A + \frac{1}{3}(B - A)$ da el punto que corresponde a la tercera parte del segmento, mientras que para obtener la cuarta parte basta con obtener el punto $A + \frac{1}{4}(B - A)$. El resto de divisiones se obtienen cambiando el denominador.



Por tanto, si deseamos dividir el segmento en n partes, es evidente que el denominador será n.

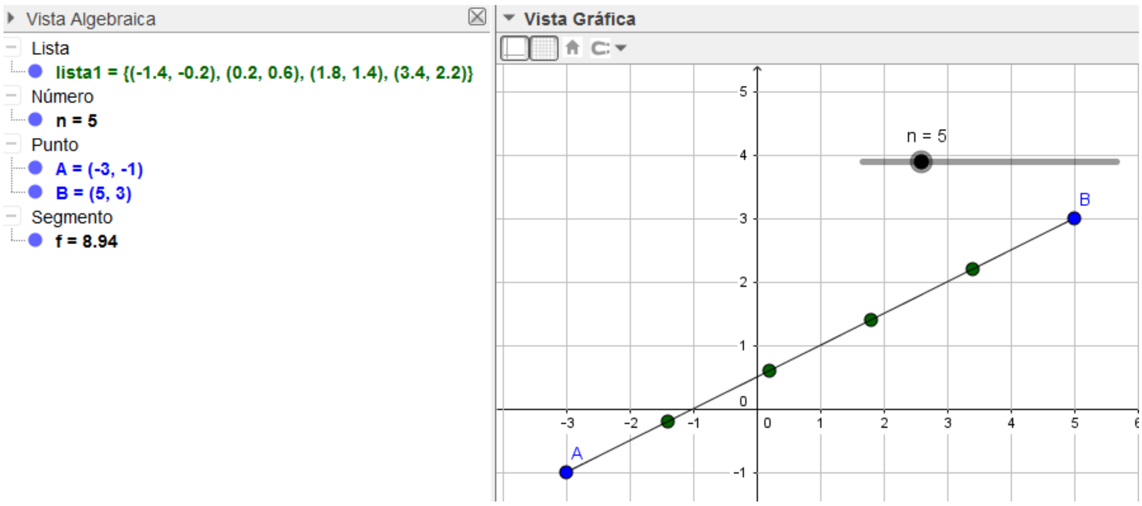
Como además, queremos obtener todos los puntos correspondientes a las divisiones, tendremos que ir multiplicando el denominador por 1, 2, 3, …, n-1.

Por tanto, los puntos de las divisiones los obtendremos con el comando **Secuencia**, utilizando los argumentos siguientes:

Secuencia[A+(B-A)(k/n),k,1,n-1]

Observemos que en la vista algebraica aparece la lista de puntos correspondientes a las divisiones y en la vista gráfica la representación de los puntos.

Basta mover el deslizador para obtener cualquier división del segmento en partes iguales.



Actividades propuestas

A continuación proponemos distintas actividades para su resolución utilizando para ello, las opciones que ofrecen las distintas herramientas o los comandos disponibles en GeoGebra.

Actividad 7

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-2, 3) que equidista de los puntos B(5, -1) y C(3, 7).

Actividad 8

Dados los puntos A(-2, 1) y B(4, 3), halla las coordenadas de dos puntos que dividan al segmento $\overline{AB}$ en tres partes de modo que la primera sea el doble de la segunda, y la tercera parte el triple de la segunda parte.

Actividad 9

El punto A(2, 2) es el punto medio de la cuerda de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$. Halla la ecuación de la recta sobre la que está la cuerda y las coordenadas de los extremos de la cuerda. ¿Cuál es la medida de la cuerda?

Actividad 10

Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (4,1) y forma con los ejes de coordenadas un triángulo de nueve unidades de área.

La ecuación segmentaria de la recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ determina los puntos de corte con los ejes.

Esta es la expresión que debemos utilizar, en la que sabemos que el punto (4,1) pertenece a la recta, por tanto, verifica su ecuación.

$$\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1$$
$$4\,b + a = a\,b$$

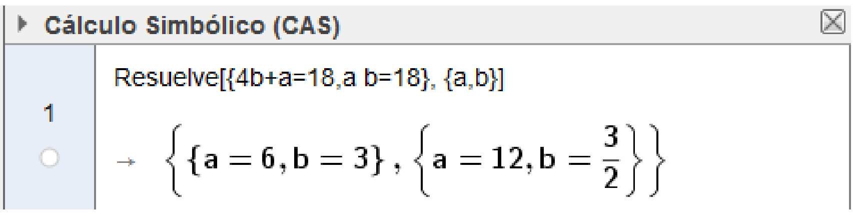
Teniendo en cuenta que la recta corta a los ejes en los puntos A(a,0) y B(0,b), el área del triángulo que forma será $S = \frac{1}{2}\,a\,b$

El área es 9, por tanto, $\frac{1}{2}\,a\,b = 9;\; a\,b = 18$

Resolviendo las dos ecuaciones, tendremos:

$$\left.\begin{array}{r} 4\,a + b = a\,b \\ a\,b = 18 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 4\,a + b = 18 \\ a\,b = 18 \end{array}\right\}$$

Aprovechamos las opciones de **CAS** para resolver el sistema de ecuaciones.

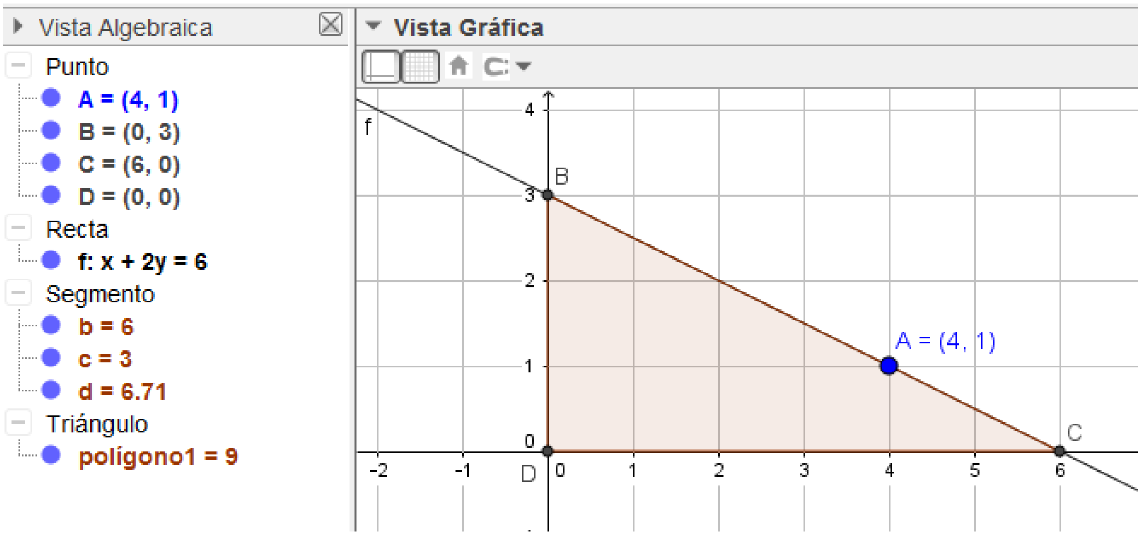


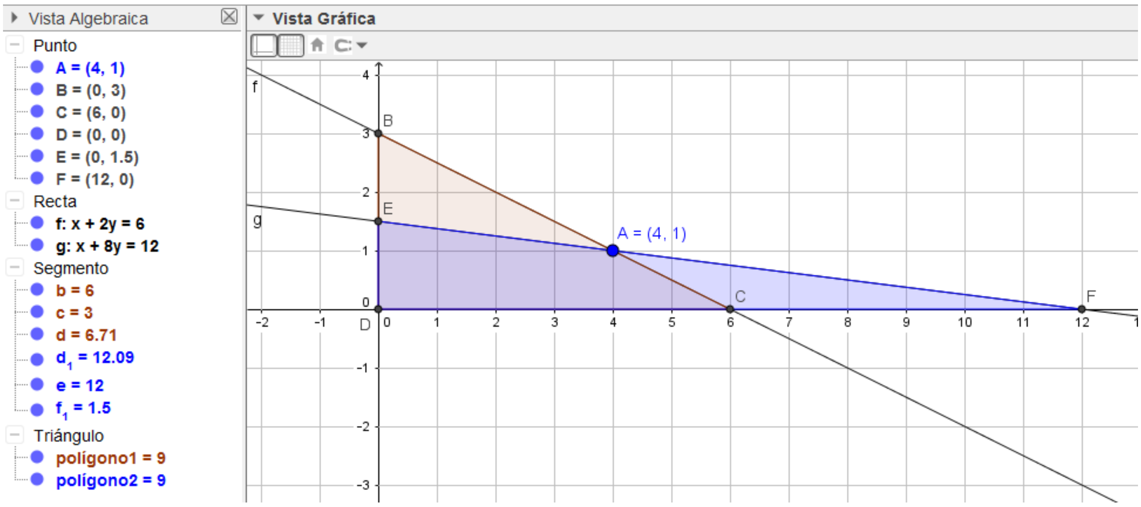
Por tanto, las dos rectas que cumplen las condiciones establecidas serían:

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$$

$$\frac{x}{12}+\frac{y}{3/2}=1$$

Podemos comprobar que estas dos ecuaciones determinan con los ejes un triángulo cuya área es de 9 unidades cuadradas.

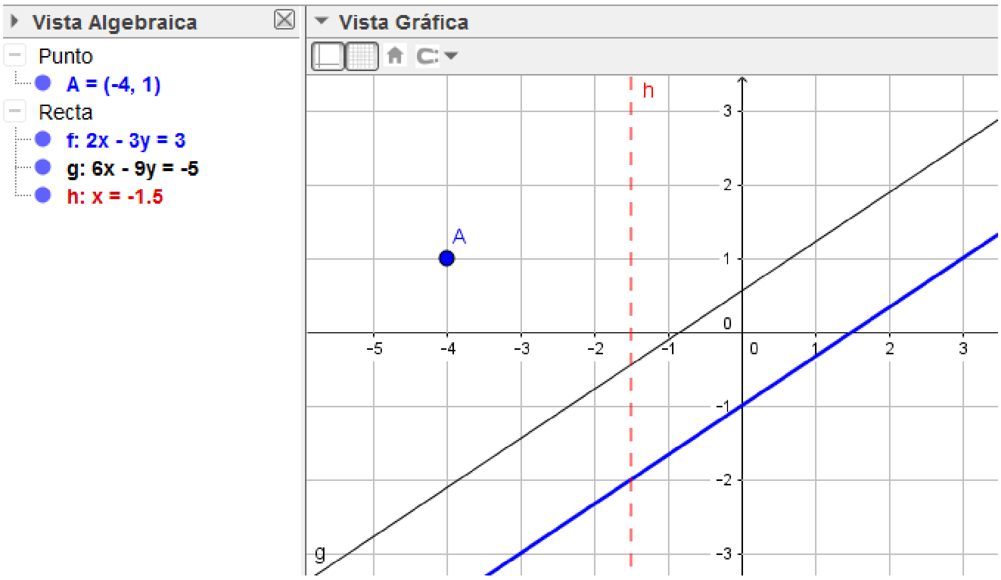




Actividad 11

Dada la recta r: 2x – 3y =3, calcula: la distancia de r a la recta s: 6x-9y=-5; la distancia al punto A(-4,1) y la distancia a la recta t: 2x+3=0.

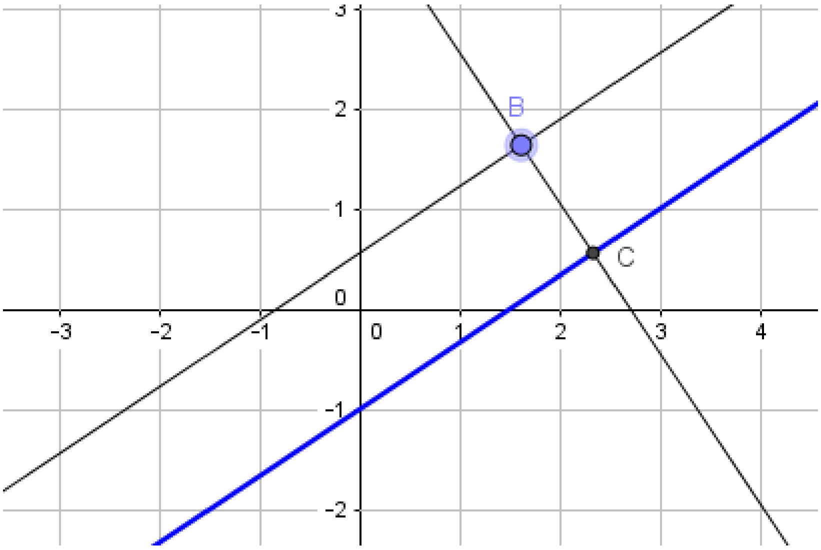
Comenzamos dibujando las tres rectas ye el punto A.



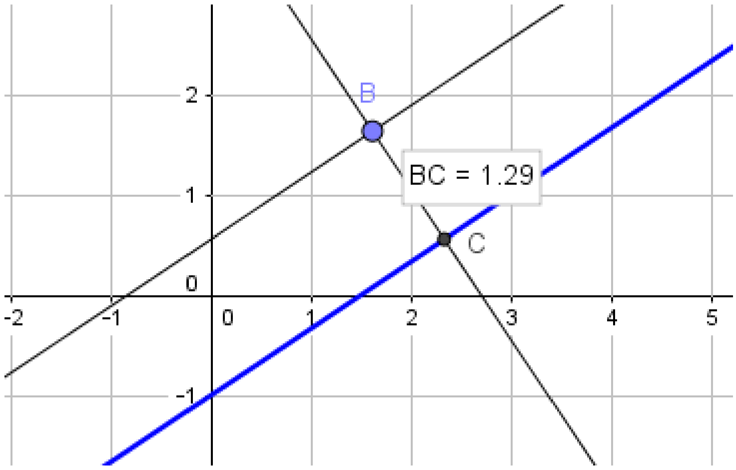
Observamos que las rectas r y t son secantes, por tanto su distancia es 0.

Para obtener la distancia entre las rectas r y s podemos dibujar un punto en una de las dos rectas.

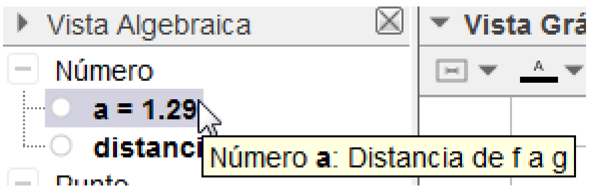
Por ejemplo, dibujamos B en la resta s; trazando a continuación la perpendicular por dicho punto, para determinar el punto de corte con r.



Para obtener la distancia entre las dos rectas, basta con calcular la distancia entre los puntos B y C.

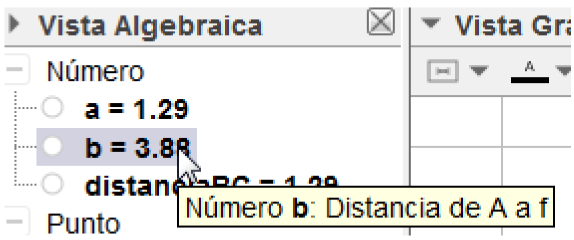


Otra forma de obtener la distancia de manera directa, aunque quizás menos útil desde un punto de vista metodológico, sería utilizar el comando **Distancia**, escribiendo **Distancia[recta, recta]**.



Por último, sólo nos queda hallar la distancia de A a r, para lo que podemos seguir el proceso anterior o podemos utilizar el comando **Distancia** que dará la medida de manera directa.

En este caso escribiremos **Distancia[A, f]**, ya que f es el nombre de la recta r en la vista algebraica.

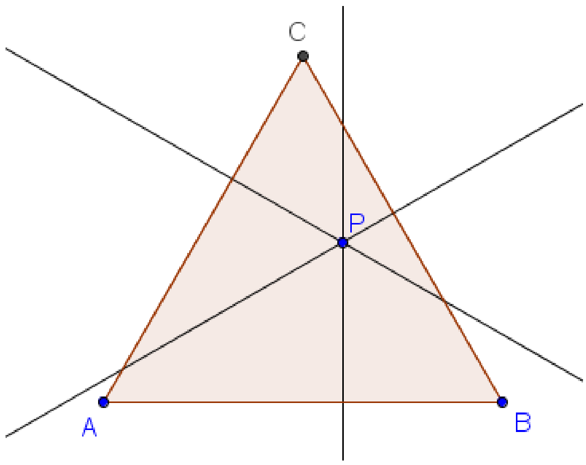


Actividad 12. Teorema de Viviani

En un triángulo equilátero la suma de las distancias de un punto interior a los lados es constante.

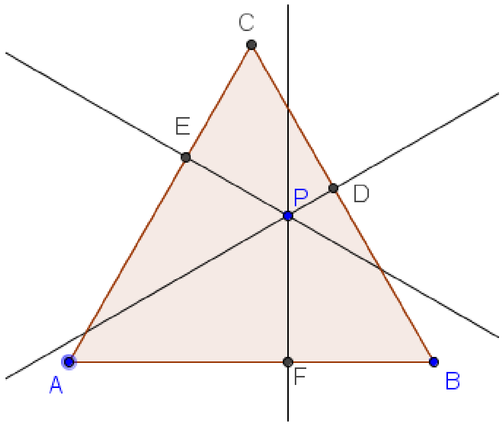
Para comprobar que este teorema se cumple, comenzamos dibujando un triángulo equilátero y un punto interior P.

A continuación, con ayuda de la herramienta Perpendicular trazamos las rectas perpendiculares a cada lado que pasan por P.

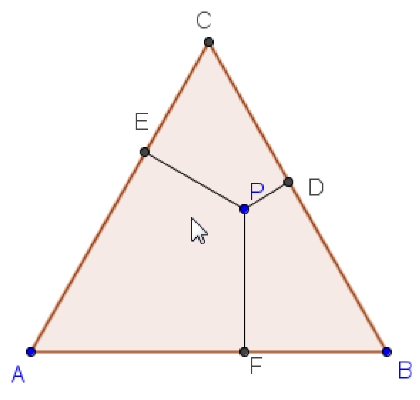


La distancia a cada lado quedará fijada por el punto de intersección de cada una de estas rectas con su respectivo lado.

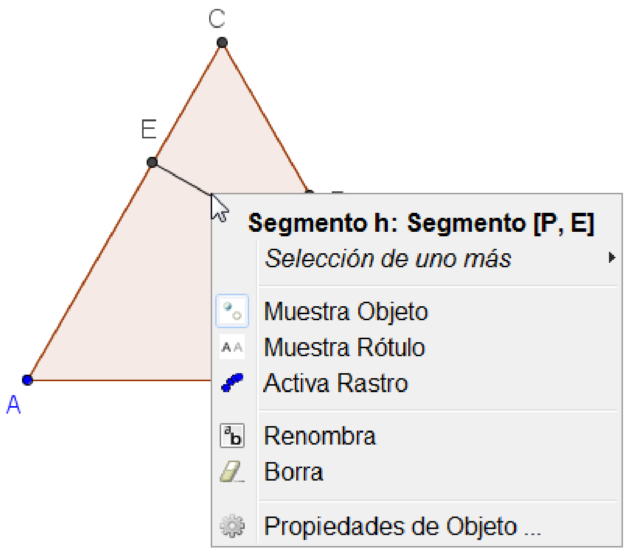
Utilizando Intersección encontramos cada uno de los puntos.

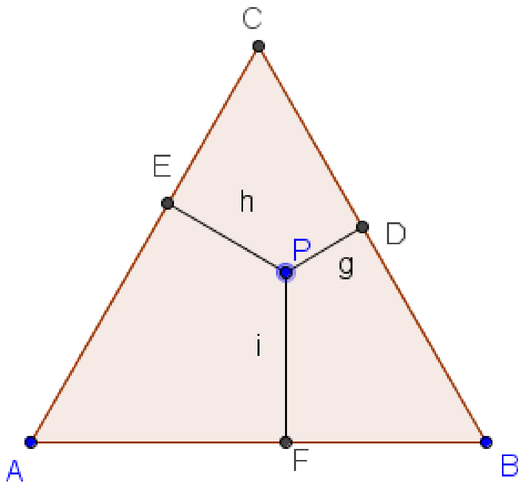


Las tres distancias serán los segmentos PD, PE y PF que definimos como segmentos, ocultando previamente las tres rectas.



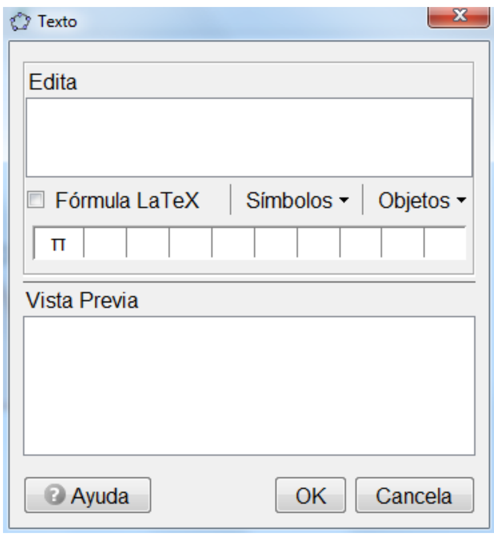
A continuación, tenemos que obtener la suma de estos tres segmentos; a los que previamente haremos que aparezca su nombre, pulsando el botón derecho sobre cada uno de ellos para que aparezca la opción Muestra Rótulo.





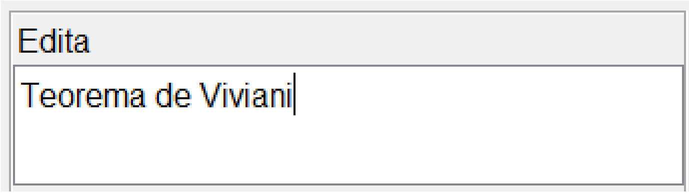
La suma de los tres segmentos la obtendremos y expondremos en la vista gráfica con ayuda de la herramienta **Texto** ABC .

Una vez seleccionada esta herramienta, haremos clic (botón izquierdo) en cualquier parte libre de la vista gráfica. Aparecerá la siguiente ventana para introducir el texto.

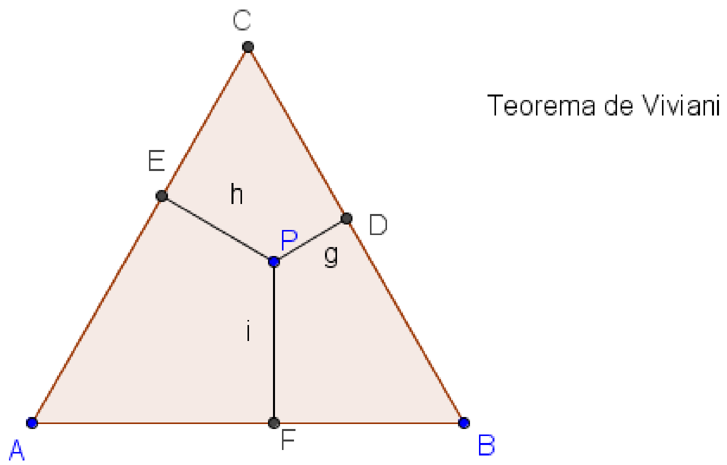


Cualquier texto que se escriba debajo de Edita aparecerá en la Vista gráfica al pulsar el botón **OK**.

Por ejemplo, escribimos el nombre del teorema que estamos comprobando.

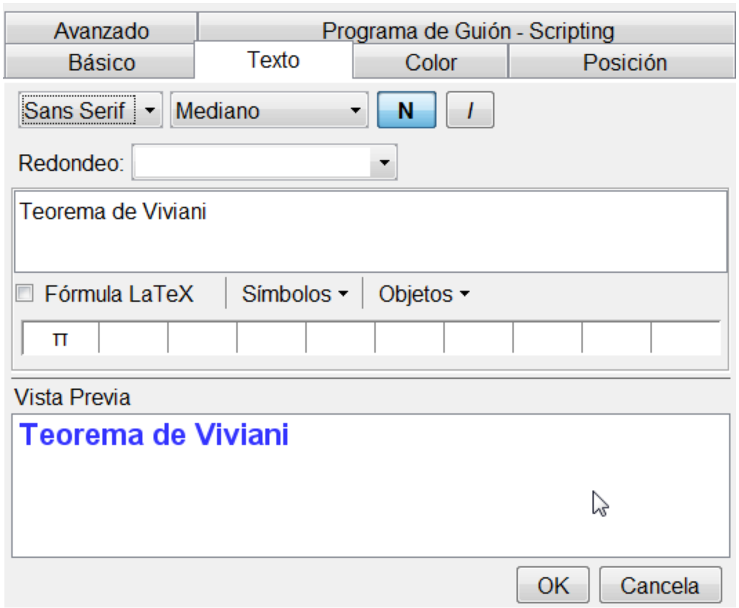


La vista gráfica presentará el siguiente aspecto.

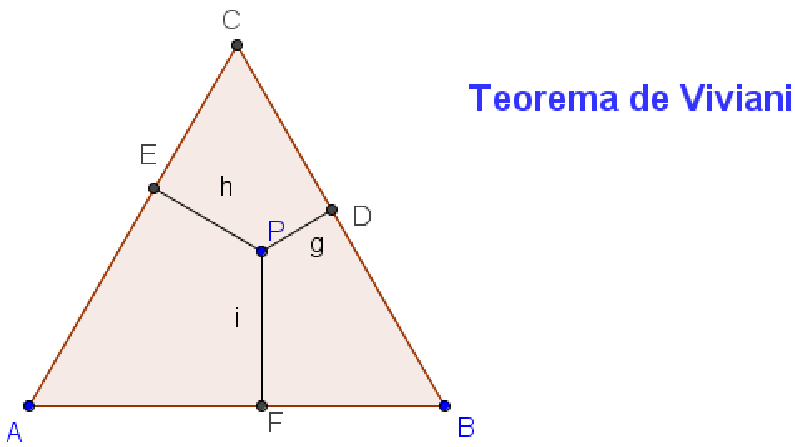


Las características de este texto, al igual que las de cualquier objeto que interviene en una construcción, se podrán modificar utilizando la opción Propiedades de objeto que aparece al pulsar el botón derecho sobre él.

Por ejemplo, podemos modificar su tamaño y color, a partir de las pestañas Texto y Color, respectivamente.



El aspecto, una vez realizados los cambios será el que muestra la imagen siguiente:



También, se pueden modificar las características del texto utilizando las opciones que aparecen en la parte superior de la vista gráfica.

Este texto podemos decir que es un texto estático ya que no depende de ningún valor y por tanto, no cambiará al modificar la posición de los objetos que intervienen en la construcción.

Sin embargo, los segmentos cambian su medida al variar la posición del punto P, por lo que vamos a exponer como introducir un texto, en este caso, dinámico.

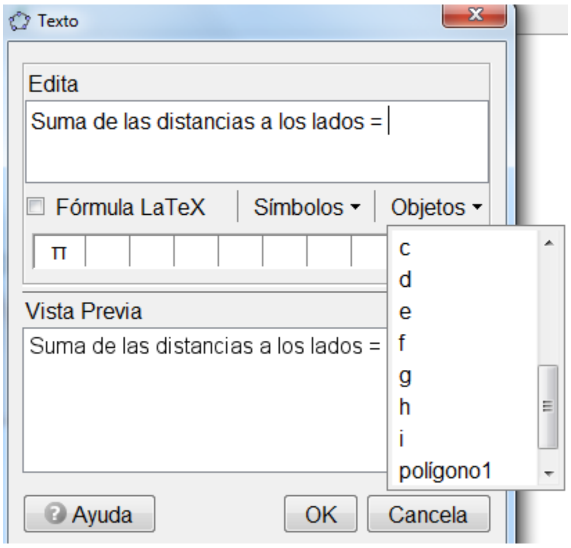
Seleccionamos de nuevo la herramienta **Texto**, pulsando en una zona libre de la vista gráfica, para que aparezca la ventana ya conocida.

Escribimos en **Edita** el texto *Suma de las distancias a los lados =*.

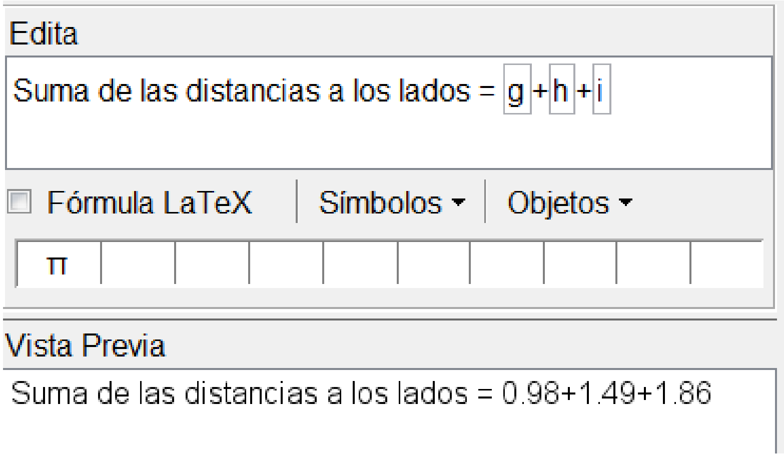
Ahora deseamos que aparezcan las distancias de P a los lados del triángulo que en la construcción se denominan g, h, i.

Si escribimos los caracteres g, h e i, estaremos introduciendo de nuevo texto estático que no se actualizará al cambiar su medida.

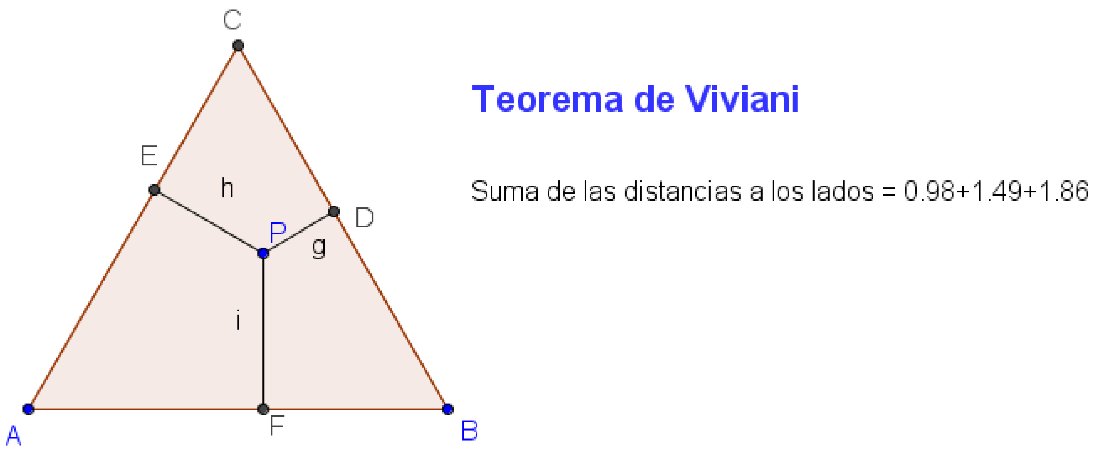
Para lograr que GeoGebra sustituya estos caracteres por sus respectivos valores, debemos seleccionarlos desde la pestaña **Objetos**.



Seleccionamos el primer segmento g, escribimos el signo +, seleccionamos el segundo segmento h, escribimos + y de nuevo, seleccionamos i. Los caracteres se muestran encerrados en un rectángulo y sus valores aparecerán en la Vista previa.



El texto aparece en la vista gráfica y se actualizará al mover el punto P.

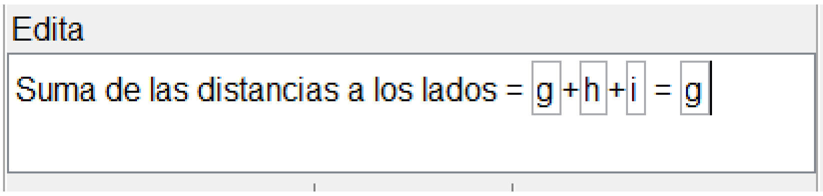


Ya solo nos queda obtener el valor de la suma de los valores g, h e i, de manera que la suma también sea dinámica.

Para modificar el texto que acabamos de introducir, hacemos un doble clic sobre él para que aparezca de nuevo la ventana anterior.

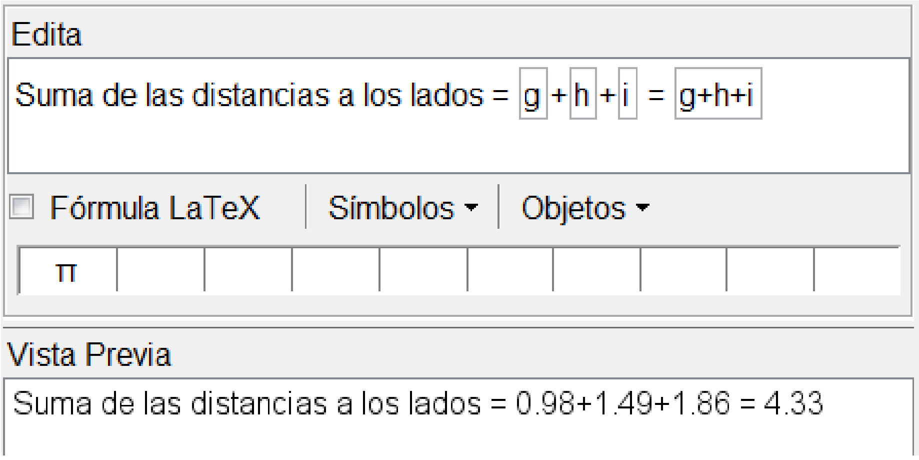
Escribimos el signo = al final del texto que ya teníamos y pulsamos de nuevo sobre g en la pestaña objetos.

Tendremos algo similar a lo que aparece en la imagen siguiente:

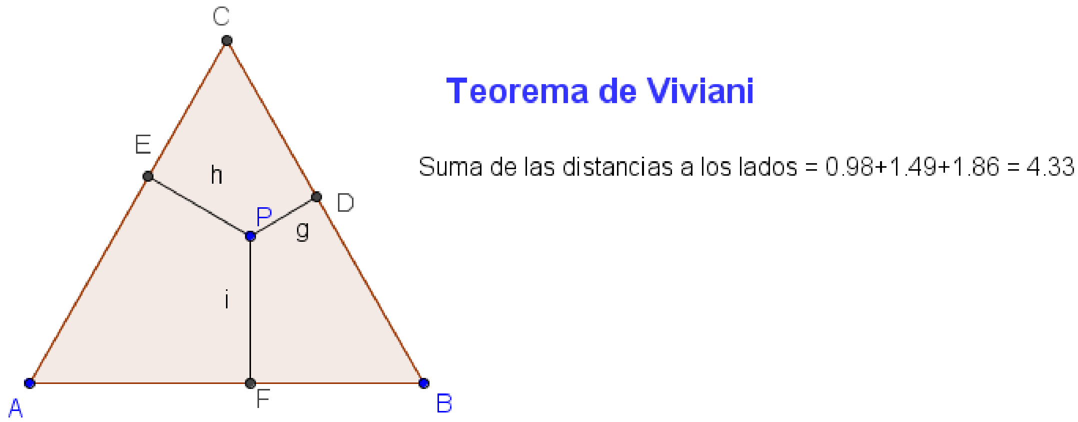


Situamos el cursor dentro del último cuadro, justo detrás de g y escribimos +h+i (introducimos estos caracteres desde teclado, no desde Objetos).

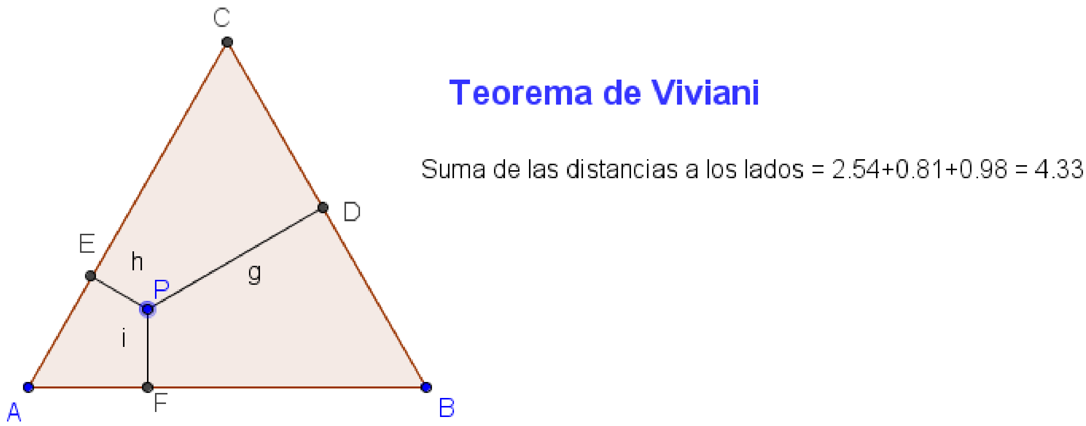
El aspecto será el siguiente:



Observamos que ha sustituido el valor de g+h+i por su suma tal y como deseábamos.



Ya solo nos queda mover el punto P para comprobar que a pesar de que las longitudes de los segmentos cambian, la suma se mantiene constante.



Este valor constante coincide con la altura del triángulo ya que cuando P es un vértice del triángulo, la suma de las distancias a los lados es la altura.

Podemos finalizar la comprobación trazando y midiendo la altura.

Dependiendo del nivel de los alumnos a los que propongamos esta actividad podemos plantear el tipo de actividad para que no solo sea comprobar, sino también que intenten averiguar cuál es el valor de la constante.

Actividad 13. Teorema de Ceva

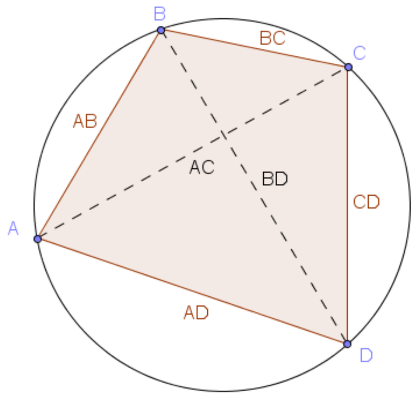
Si AX, BY y CZ son tres cevianas concurrentes de un triángulo ABC, entonces

$$\frac{AZ}{ZB}.\frac{BX}{XC}.\frac{CY}{YA}=1$$

Comprueba que al mover los vértices del triángulo la relación se mantiene. Una ceviana es un segmento que une un vértice del triángulo con un punto del lado opuesto.

Actividad 14. Teorema de Ptolomeo

Si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de las diagonales.



AB.CD + AD . BC = AC . BD