Le cerf-volant de Tamvakis

On appelle *petit quadrilatère* un quadrilatère convexe dont la plus grande distance entre deux sommets est égale à l'unité. Un polygone est *convexe* lorsque tous les segments reliant deux de ses sommets se trouvent à l'intérieur du polygone.

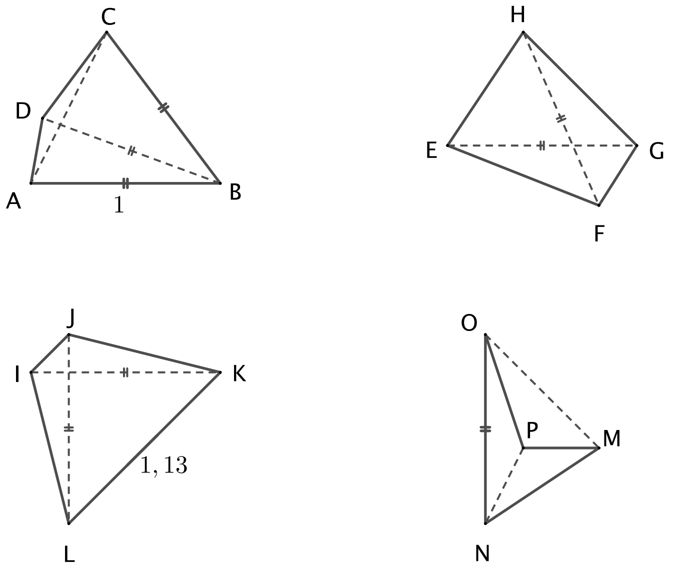

figure 1 : exemples et contre-exemples

ABCD et EFGH sont des petits quadrilatères car ils sont convexes et la plus grande distance entre deux de leurs sommets est égale à 1.
Le polygone IJKL est convexe mais ce n'est pas un petit quadrilatère car la distance entre ses sommets K et L est plus grande que 1.
Même si la plus grande distance entre deux sommets de MNOP est égale à 1, il n'est pas un petit quadrilatère car il n'est pas convexe : en effet, le segment [OM] se trouve à l'extérieur du polygone.

<u>On prendra comme unité le demi-décimètre</u>

1°) a) Construire deux petits quadrilatères.
b) Construire une figure à 4 côtés qui ne soit pas un petit quadrilatère.

2°) En 1922, Karl Reinhardt fit remarquer que le carré de diagonale unité est un petit quadrilatère d'aire maximale (1).
Construire ce carré puis calculer son aire et son périmètre.

3°) On considère maintenant un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et de longueur égale à l'unité (figure 2). Montrer que son aire est égale à 1/2, quelle que soit la position du point d'intersection des diagonales sur celles-ci.

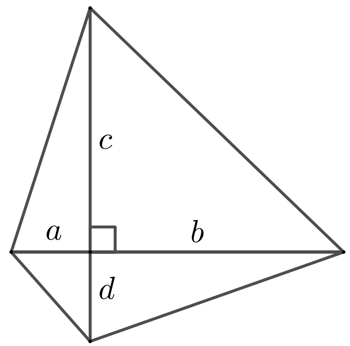

figure 2

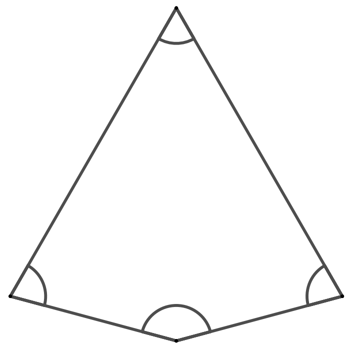

figure 3

4°) Le carré de diagonale unité n'est pas un petit quadrilatère de périmètre maximal.
En 1987, Nikolaos Tamvakis, de l'académie navale hellénique, trouva, parmi tous les petits quadrilatères, celui qui a le plus grand périmètre (2).
Construire sa figure en partant de deux points A et B tels que AB = 1 :

a) Tracer le cercle de centre A passant par B et celui de centre B passant par A.
b) Placer les points d'intersection C et D de ces deux cercles.
c) Tracer le cercle de centre C passant par A.
d) Ce troisième cercle coupe le segment [CD] en E. Placer le point E.

Repasser en couleur le quadrilatère ACBE : c'est le cerf-volant de Tamvakis.
Quelle est son aire ? Expliquer.

5°) Déterminer la mesure de chacun des angles du cerf-volant. Justifier.
Les indiquer sur la figure 3.

6°) On note H le pied de la perpendiculaire à (BE) passant par C.
a) Calculer la valeur exacte de BH.
b) En déduire que le périmètre de ce cerf-volant est égale 2 + 4×cos(75°).

(1) *Extremale polygone gegebenen durchmessers*, Karl Reinhardt, 1922.
(2) *On the perimeter and the area of the convex polygons of given diameter*, N. K. Tamvakis, 1987.
Voir aussi *La saga des trois octogones*, Dossier Pour la Science n°91, 2016.