



## บทที่ 2 ความเท่ากันทุกประการ

บทเรียนสำคัญในภาคเรียนที่ 2



“

การทำขนมถือเป็นศิลปะอย่างหนึ่ง การชั่ง ตวง วัดปริมาณของส่วนผสมที่ใช้ทำขนมต่าง ๆ นับว่าเป็นเรื่องที่มีความสำคัญมาก เพราะปริมาตรของส่วนผสมทุกชนิดมีผลต่อรสชาติ คุณภาพ และรูปร่างของขนมนั้น ๆ ถ้าหากส่วนผสมเกินหรือขาดไปจากสูตร จะทำให้รสชาติและคุณภาพของขนมไม่เป็นตามที่ต้องการ ซึ่งในปัจจุบันนี้ สิ่งที่สำคัญไม่น้อยไปกว่าเรื่องของรสชาติและคุณภาพของขนม คือ รูปร่างหน้าตาของขนม ต้องมีการออกแบบและตกแต่งให้มีความสวยงาม น่ารับประทาน เพื่อดึงดูดความสนใจของผู้ซื้อ ดังนั้น ในการทำขนมบางชนิดหรือบางขั้นตอนจะมีการใช้แม่พิมพ์เพื่อให้ได้ขนาด และรูปร่างที่เท่ากันทุกชิ้น เช่น การทำวุ้น การทำขนมไหว้พระจันทร์ หรือ การตกแต่งเค้กด้วยรูปต่าง ๆ

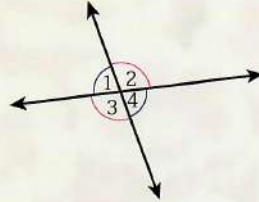
”





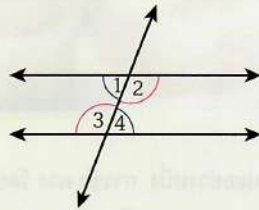
## ทบทวนความรู้ก่อนเรียน

- ❖ ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา
- ❖ ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน



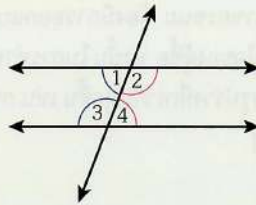
จากรูป จะได้  $\hat{1} = \hat{4}$  และ  $\hat{2} = \hat{3}$

- ❖ เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นขนานคู่หนึ่ง มุมแย้งที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากัน



จากรูป จะได้  $\hat{1} = \hat{4}$  และ  $\hat{2} = \hat{3}$

- ❖ เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นขนานคู่หนึ่ง ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันได้ 180 องศา



จากรูป จะได้  $\hat{1} + \hat{3} = 180^\circ$  และ  $\hat{2} + \hat{4} = 180^\circ$

นักเรียนสามารถทำแบบทดสอบความรู้พื้นฐานก่อนเรียนได้ที่ <http://ipst.me/9142>

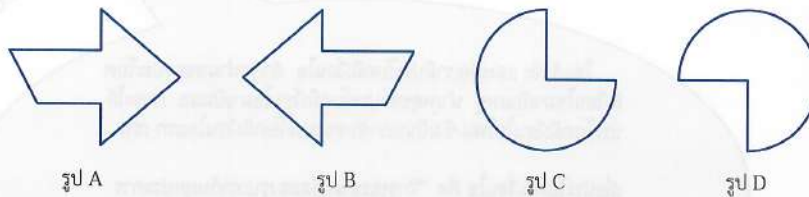


## 2.1 ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต

ในชีวิตประจำวันของนักเรียนจะพบสิ่งต่าง ๆ รอบตัว เช่น ภาชนะใส่อาหาร อาคารบางอาคารที่มีการออกแบบให้มีขนาดหรือรูปร่างที่เหมือนกัน โครงสร้างที่ประกอบจากรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันของสิ่งก่อสร้างในสถานที่ต่าง ๆ ซึ่งออกแบบเพื่อให้เกิดความแข็งแรง สิ่งเหล่านี้ล้วนใช้ความรู้ทางเรขาคณิตในการออกแบบหรือสร้างทั้งสิ้น



ให้นักเรียนพิจารณารูปต่อไปนี้



จะเห็นว่าสามารถเคลื่อนที่รูป A ไปทับรูป B ได้สนิท และสามารถเคลื่อนที่รูป C ไปทับรูป D ได้สนิท ในทางคณิตศาสตร์เมื่อสามารถเคลื่อนที่รูปเรขาคณิตรูปหนึ่งไปทับรูปเรขาคณิตอีกรูปหนึ่งได้สนิท โดยใช้การแปลงทางเรขาคณิต จะกล่าวว่ารูปเรขาคณิตสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ ซึ่งเป็นไปตามบทนิยามของ **ความเท่ากันทุกประการ (congruence)** ของรูปเรขาคณิตบนระนาบดังนี้



### ชวนคิด 2.1

จากรูป A และรูป B ที่กำหนดให้ ต้องใช้การแปลงทางเรขาคณิตแบบใด เพื่อทำให้รูป A ไปทับรูป B ได้สนิท

**บทนิยาม** รูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ เคลื่อนที่รูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท

ข้าพเจ้านี้ จากข้อความในบทนิยามนี้ เราสามารถพูดอีกอย่างที่มีความหมายเหมือนกันได้อีกนะ

ข้าพเจ้านี้จะพูดแบบนี้ได้ไหมล่ะ  
“ถ้ารูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการ แล้วจะเคลื่อนที่รูปเรขาคณิตรูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท”  
และ  
“ถ้าเคลื่อนที่รูปเรขาคณิตรูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท แล้วรูปเรขาคณิตสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ”

ได้จ้ะ เราจะเรียกข้อความที่ตามหลัง “ถ้า” ว่า “เหตุ”  
ข้อความที่ตามหลัง “แล้ว” ว่า “ผล” และเรียกข้อความที่มีการเชื่อมด้วยคำว่า ถ้า...แล้ว... ว่า ประโยคมีเงื่อนไข

ใช่แล้วจ้ะ และเมื่อเรามีประโยคมีเงื่อนไข ถ้าเรานำผลของประโยคมีเงื่อนไขมาเป็นเหตุ นำเหตุของประโยคมีเงื่อนไขมาเป็นผล เราจะได้ประโยคมีเงื่อนไขใหม่ ซึ่งเป็นบทกลับของประโยคมีเงื่อนไขแรก เช่น

เมื่อประโยคมีเงื่อนไข คือ “ถ้ารูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการ แล้วจะเคลื่อนที่รูปเรขาคณิตรูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท”  
จะได้ บทกลับของประโยคมีเงื่อนไขนี้คือ  
“ถ้าเคลื่อนที่รูปเรขาคณิตรูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท แล้วรูปเรขาคณิตสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ”

เมื่อรูปเรขาคณิต A และรูปเรขาคณิต B เท่ากันทุกประการ จะเขียนว่า  $\text{รูป A} \cong \text{รูป B}$  อ่านว่า **รูป A เท่ากันทุกประการกับรูป B** หรือ **รูป A และรูป B เท่ากันทุกประการ**

**ตัวอย่างที่ 1** จงหาว่าในแต่ละข้อต่อไปนี้ รูปเรขาคณิตคู่ใดเท่ากันทุกประการ

1)



รูป ก



รูป ข



รูป ค



รูป ง



รูป จ

2)



รูป ก



รูป ข



รูป ค



รูป ง



รูป จ

3)



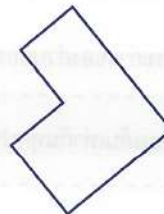
รูป ก



รูป ข



รูป ค



รูป ง



รูป จ

**แนวคิด** คาดคะเนว่ารูปคู่ใดน่าจะเท่ากันทุกประการ แล้วตรวจสอบรูปคู่นั้น โดยใช้กระดาษลอกลายลอกรูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งว่าทับกันได้สนิทหรือไม่

จากการตรวจสอบได้คำตอบดังนี้

- 1) รูป ก  $\cong$  รูป ค และ รูป ข  $\cong$  รูป ง
- 2) รูป ก  $\cong$  รูป จ และ รูป ข  $\cong$  รูป ค
- 3) รูป ก  $\cong$  รูป ง และ รูป ข  $\cong$  รูป จ



### ข้อสังเกต

การตรวจสอบว่ารูปเรขาคณิตสองรูปใดเท่ากันทุกประการหรือไม่ อาจทำได้โดยใช้กระดาษลอกลายลอกรูปหนึ่งแล้วนำไปทับอีกรูปหนึ่ง ถ้าพบว่าทับกันได้สนิท แสดงว่ารูปเรขาคณิตสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

### ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง

เมื่อกำหนด  $\overline{AB}$  และ  $\overline{CD}$  ที่  $AB = CD$  ดังรูป



ถ้าใช้กระดาษลอกสาย ลอก  $\overline{AB}$  แล้วนำไปทับ  $\overline{CD}$  ให้จุด A ทับจุด C

เนื่องจาก  $AB = CD$  จะได้จุด B ทับจุด D

ดังนั้น  $\overline{AB}$  และ  $\overline{CD}$  ทับกันสนิท

นั่นคือ ถ้า  $AB = CD$  แล้ว  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

ในทางกลับกัน ถ้ากำหนด  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$  ดังรูป



จากบทนิยามของความเท่ากันทุกประการ จะสามารถเคลื่อนที่  $\overline{AB}$  ไปทับ  $\overline{CD}$  ได้สนิท

จะได้  $\overline{AB}$  และ  $\overline{CD}$  ยาวเท่ากัน

นั่นคือ ถ้า  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$  แล้ว  $AB = CD$

โดยทั่วไปความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง เป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้

ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ ส่วนของเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน



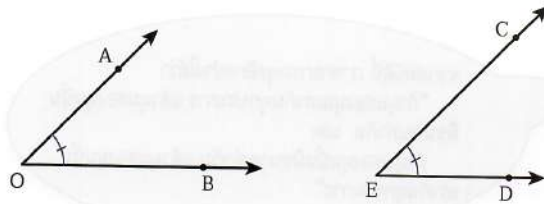
ชาวบ้านจ๊ะ จากสมบัตินี้ เราสามารถพูดอีกอย่างได้ว่า  
“ถ้าส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ  
แล้วส่วนของเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน และ  
ถ้าส่วนของเส้นตรงสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วส่วนของ  
เส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นเท่ากันทุกประการ” ก็ได้ ใช่หรือไม่ใช่



ใช่จ๊ะชาวหอม ซึ่งจาก  $\overline{AB}$  และ  $\overline{CD}$   
ที่กำหนดให้ข้างต้น เราจะกล่าวได้ว่า  
ถ้า  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$  แล้ว  $AB = CD$  และ  
ถ้า  $AB = CD$  แล้ว  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$   
ซึ่งสอดคล้องกับสมบัตินี้เลย

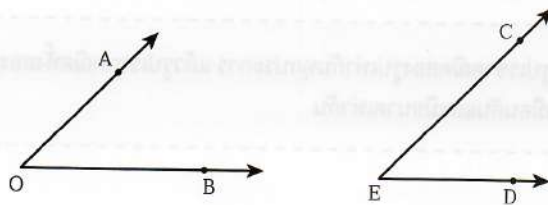
### ความเท่ากันทุกประการของมุม

เมื่อกำหนด  $\hat{A}OB$  และ  $\hat{C}ED$  ที่  $\hat{A}OB = \hat{C}ED$  ดังรูป



ถ้าใช้กระดาษลอกกลายลอก  $\hat{A}OB$  แล้วนำไปทับ  $\hat{C}ED$  โดยให้จุด  $O$  ทับจุด  $E$  และ  $\vec{OA}$  ทับ  $\vec{EC}$   
 เนื่องจาก  $\hat{A}OB = \hat{C}ED$  จะได้  $\vec{OB}$  ทับ  $\vec{ED}$   
 ดังนั้น  $\hat{A}OB$  และ  $\hat{C}ED$  ทับกันสนิท  
 นั่นคือ ถ้า  $\hat{A}OB = \hat{C}ED$  แล้ว  $\hat{A}OB \cong \hat{C}ED$

ในทางกลับกัน ถ้า  $\hat{A}OB \cong \hat{C}ED$  ดังรูป



จากบทนิยามของความเท่ากันทุกประการ จะสามารถเคลื่อนที่  $\hat{A}OB$  ไปทับ  $\hat{C}ED$  ได้สนิท  
 จะได้  $\hat{A}OB = \hat{C}ED$   
 นั่นคือ ถ้า  $\hat{A}OB \cong \hat{C}ED$  แล้ว  $\hat{A}OB = \hat{C}ED$

โดยทั่วไปความเท่ากันทุกประการของมุม เป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้

มุมสองมุมเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ มุมทั้งสองมุมนั้นมีขนาดเท่ากัน



จากสมบัตินี้ เราสามารถพูดอีกอย่างได้ว่า  
 “ถ้ามุมสองมุมเท่ากันทุกประการ แล้วมุมสองมุมนั้นมีขนาดเท่ากัน และ  
 ถ้ามุมสองมุมนั้นมีขนาดเท่ากัน แล้วมุมสองมุมนี้เท่ากันทุกประการ”



ใช้เงาข้าวหอม ซึ่งจาก  $\hat{A}OB$  และ  $\hat{C}ED$  ที่กำหนดให้ เราก้าวได้ว่า  
 ถ้า  $\hat{O} \cong \hat{E}$  แล้ว  $\hat{O} = \hat{E}$  และ  
 ถ้า  $\hat{O} = \hat{E}$  แล้ว  $\hat{O} \cong \hat{E}$   
 ซึ่งสอดคล้องกับสมบัตินี้เลย

ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิตที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เป็นไปตามสมบัติของความเท่ากันทุกประการที่กล่าวว่า

ถ้ารูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการ แล้วรูปเรขาคณิตทั้งสองรูปนั้นมีรูปร่างเหมือนกันและมีขนาดเท่ากัน

ในทางกลับกัน

ถ้ารูปเรขาคณิตสองรูปมีรูปร่างเหมือนกันและมีขนาดเท่ากัน แล้วรูปเรขาคณิตทั้งสองรูปนั้น เท่ากันทุกประการ



ข้าวปั้นทำอะไรอยู่

กำลังดูกระดาษ 2 แผ่นนี่อยู่จ๊ะ เป็นรูปใบไม้สีเขียวกับสีแดง ข้าวปั้นลองวางทับกันแล้ว ทับกันสนิทเลย แสดงว่ากระดาษทั้งสองแผ่นนี้เท่ากันทุกประการ







ข้าวหอมก็มีกระตารูปใบไม้เหมือนกัน แต่เป็นสีเหลือง  
ข้าวหอมขอมมีกระตารูปใบไม้สีแดงของข้าวปุ้นน้อยสี



นี่จะ



โอโฮโฮ... กระตารูปใบไม้สีแดงกับสีเหลือง เท่ากันทุกประการเลย



ถ้าอย่างนั้น ข้าวปุ้นคิดว่า กระตารูปใบไม้สีเขียวกับสีเหลือง  
จะเท่ากันทุกประการด้วยแน่ ๆ เลย



งั้น ข้าวหอมลองดูให้นะ ว่าข้าวปุ้นคิดถูกหรือเปล่า



ข้าวปุ้นคิดถูกจริง ๆ ด้วย  
กระตารูปใบไม้สีเขียวกับ  
สีเหลือง เท่ากันสนิทพอดีเลย

นอกจากสมบัติของความเท่ากันทุกประการที่กล่าวมาแล้ว ยังมีสมบัติอื่น ๆ ของความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต  
อีก ดังนี้

ให้ รูป A รูป B และรูป C เป็นรูปเรขาคณิตใด ๆ

1. สมบัติสะท้อน : รูปเรขาคณิตใด ๆ รูปหนึ่ง จะเท่ากันทุกประการกับรูปเรขาคณิตรูปนั้น

สมบัติสะท้อน : รูป A  $\cong$  รูป A

2. สมบัติสมมาตร : ถ้ารูปเรขาคณิต A เท่ากันทุกประการกับรูปเรขาคณิต B แล้วรูปเรขาคณิต B จะเท่ากันทุกประการ  
กับรูปเรขาคณิต A

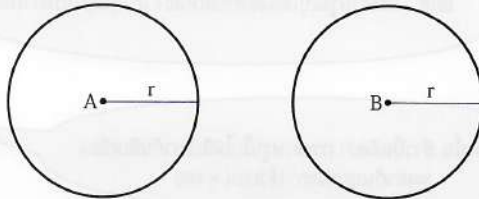
สมบัติสมมาตร : ถ้ารูป A  $\cong$  รูป B แล้วรูป B  $\cong$  รูป A

3. สมบัติถ่ายทอด : ถ้ารูปเรขาคณิต A เท่ากันทุกประการกับรูปเรขาคณิต B และรูปเรขาคณิต B เท่ากันทุกประการกับรูปเรขาคณิต C แล้วรูปเรขาคณิต A จะเท่ากันทุกประการกับรูปเรขาคณิต C

สมบัติถ่ายทอด : ถ้ารูป A  $\cong$  รูป B และรูป B  $\cong$  รูป C แล้วรูป A  $\cong$  รูป C

**ตัวอย่างที่ 2** รูปวงกลมสองวงที่มีรัศมียาวเท่ากัน จะเท่ากันทุกประการหรือไม่ จงอธิบาย

**วิธีทำ** กำหนดรูปวงกลมสองวงที่มีจุด A และจุด B เป็นจุดศูนย์กลางและมีรัศมียาวเท่ากัน เป็น r หน่วย ดังรูป



เนื่องจาก รูปวงกลม A และรูปวงกลม B มีรูปร่างเหมือนกันและมีรัศมียาวเท่ากัน เป็น r หน่วย

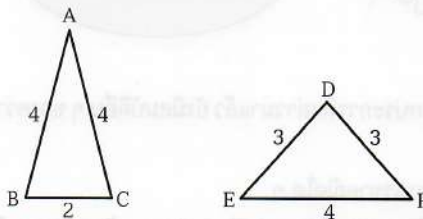
รูปวงกลม A และรูปวงกลม B จึงมีรูปร่างเหมือนกันและมีขนาดเท่ากัน

นั่นคือ รูปวงกลม A  $\cong$  รูปวงกลม B

ดังนั้น รูปวงกลมที่มีรัศมียาวเท่ากัน จะเท่ากันทุกประการ

**ตัวอย่างที่ 3** รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูปที่มีความยาวรอบรูปเท่ากัน จะเท่ากันทุกประการหรือไม่ จงอธิบาย

**วิธีทำ** กำหนด  $\triangle ABC$  และ  $\triangle DEF$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ให้แต่ละรูปมีความยาวของด้านตามที่กำหนดไว้ ดังรูป



จะเห็นว่า รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วทั้งสองรูป มีความยาวรอบรูป 10 หน่วย เท่ากัน แต่มีรูปร่างแตกต่างกัน

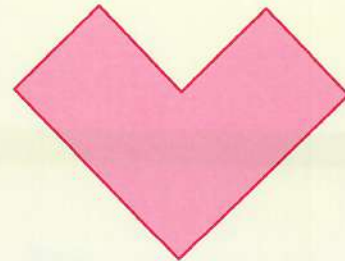
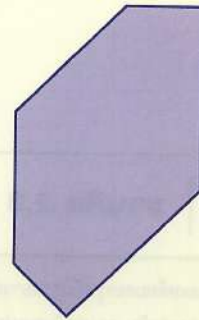
ดังนั้น รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปจึงไม่เท่ากันทุกประการ

นั่นคือ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูปที่มีความยาวรอบรูปเท่ากัน ไม่จำเป็นต้องเท่ากันทุกประการ



### ชวนคิด 2.2

1. จงใช้ส่วนของเส้นตรงสองเส้นแบ่งรูปทางขวามือออกเป็น 3 รูป ที่เท่ากันทุกประการ
2. จากรูปที่กำหนดให้ทางขวามือ
  - 1) จงใช้ส่วนของเส้นตรงหนึ่งเส้นแบ่งรูปที่กำหนดให้ออกเป็น 2 รูป ที่เท่ากันทุกประการ
  - 2) จงใช้ส่วนของเส้นตรงสองเส้นแบ่งรูปที่กำหนดให้ออกเป็น 3 รูป ที่เท่ากันทุกประการ
  - 3) จงใช้ส่วนของเส้นตรง แบ่งรูปที่กำหนดให้ออกเป็น 4 รูป ที่เท่ากันทุกประการ



## แบบฝึกหัด 2.1

2.1 อธิบาย



## ชวนคิด 2.3

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีฐานยาวเท่ากัน และส่วนสูงเท่ากัน จะเท่ากันทุกประการหรือไม่

ข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือไม่ จงอธิบาย

1. ถ้า  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$  และ  $\overline{CD} \cong \overline{EF}$  แล้ว  $\overline{AB} \cong \overline{EF}$
2. ถ้า  $\hat{A} \cong \hat{B}$  แล้ว  $\hat{B} \cong \hat{A}$
3. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปที่มีความยาวรอบรูปเท่ากัน จะเท่ากันทุกประการ
4. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน จะเท่ากันทุกประการ
5. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน จะเท่ากันทุกประการ
6. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน จะเท่ากันทุกประการ
7. รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่าสองรูปที่มีความยาวรอบรูปเท่ากัน จะเท่ากันทุกประการ
8. รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าสองรูปที่สร้างโดยใช้รัศมีของวงกลมเดียวกัน จะเท่ากันทุกประการ
9. รูปสี่เหลี่ยมสองรูปที่มีด้านยาวเท่ากันสี่คู่ จะเท่ากันทุกประการ
10. วงกลมสองวงที่มีเส้นรอบวงยาวเท่ากัน จะเท่ากันทุกประการ

