

Referenční plochy používané v kartografii

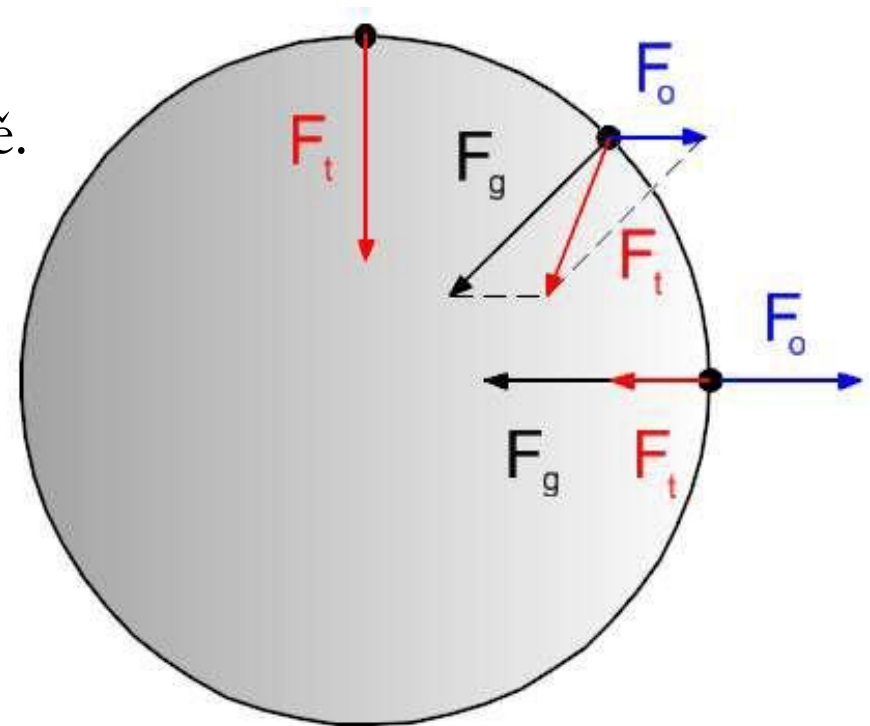
Tvar Země nepravidelný, členitý, nelze matematicky popsat. Formován zemskou tíží (výslednice odstředivé a gravitační síly). Pro účely kartografie se Země nahrazuje **referenční plochou**.

Vlastnosti referenční plochy:

- Její tvar a velikost jsou podobné tvaru Země.
- Matematicky snadno definovatelná.
- Nahrazuje Zemi jako celek nebo lokálně.

Přehled referenčních ploch:

- Geoid
- Elipsoid
- Koule
- Rovina



Referenční rovina



- Tečná rovině ve zvoleném bodě, azimutální zobrazení.
- Použití pro malá území (20 x 20 km).
- Nulová křivost, neuvažujeme zakřivení Země.
- Mapy velkých měřítek: státní mapové dílo.
- Nelze použít pro mapy malých a středních měřítek, velké zkreslení

Přímá zobrazení: elipsoid -> rovina

Dvojitá zobrazení: elipsoid -> koule -> rovina

Cílovou plochou je rovina = rovina mapy.

Referenční koule

poloměr R , lze volit různými způsoby.

Vlastnosti

- Konstantní křivost.
- Snadnější výpočty.
- Použití pro mapy malých a středních měřítek (nikoliv pro státní mapové dílo).

Lze jí nahrazovat elipsoid:

lokálně (území 300 x 300 km)

Přesné výpočty na malém území (lze zanedbat rozdíly).

Globálně - využití v geografické kartografii.

Kartografické zkreslení při nahrazení geoidu koulí je 100x větší než při nahrazení geoidu elipsoidem!



Souřadnicové systémy na kouli

- Zeměpisné souřadnice (ϕ , λ).
- Kartografické souřadnice (š, d).
- Prostorové souřadnice (x, y, z).

Zeměpisné souřadnice na kouli

Zeměpisná šířka: ϕ

Úhel mezi normálou (prochází středem) v bodě a rovinou rovníku.

Zeměpisná délka: λ

Úhel mezi rovinou místního poledníku a rovinou základního poledníku.

Východní polokoule: $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$, západní polokoule: $\langle 0^\circ, -180^\circ \rangle$

Sférické souřadnice

$$|OM_1| = d$$

$$x = d \cdot \cos \lambda \quad d = R \cdot \cos \phi$$

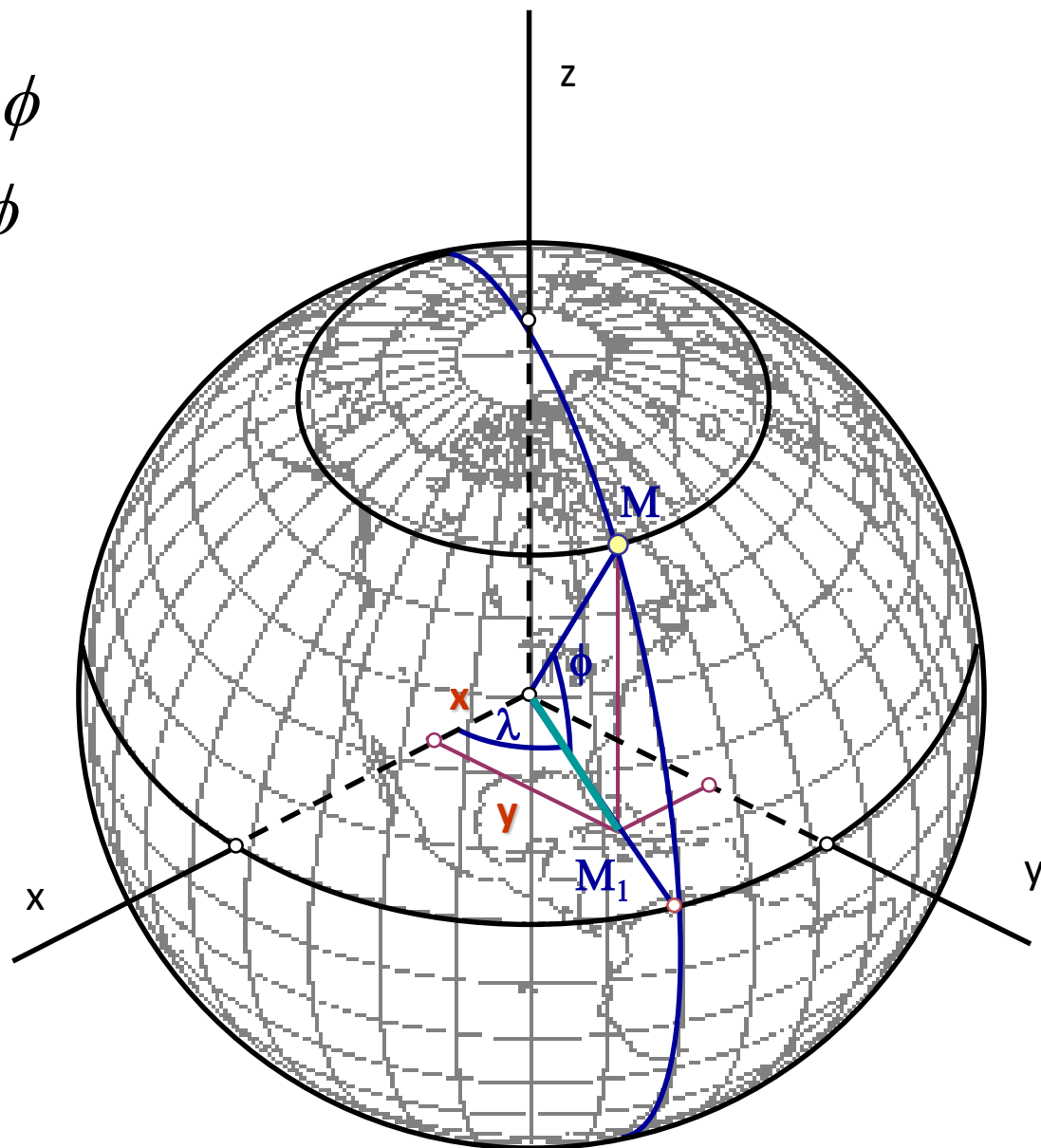
$$y = d \cdot \sin \lambda \quad z = R \cdot \sin \phi$$

$$x = R \cdot \cos \phi \cdot \cos \lambda$$

$$y = R \cdot \cos \phi \cdot \sin \lambda$$

$$z = R \cdot \sin \phi;$$

$$\lambda \in \langle 0, 2\pi \rangle; \quad \phi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$



První kvadratická forma sféry $S(\phi, \lambda)$

$$S(\phi, \lambda) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ R \cdot \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ R \cdot \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R \cdot \sin \phi \cdot \cos \lambda \\ -R \cdot \sin \phi \cdot \sin \lambda \\ R \cdot \cos \phi \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -R \cdot \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ R \cdot \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{g_{ij}(\phi, \lambda)\}^2 = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \phi \end{pmatrix}$$

Plocha je regulární v bodě, právě tehdy, když je první kvadratická forma regulární.

Druhá kvadratická forma sféry $S(\phi, \lambda)$

$$S(\phi, \lambda) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ R \cdot \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ R \cdot \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R \cdot \sin \phi \cdot \cos \lambda \\ -R \cdot \sin \phi \cdot \sin \lambda \\ R \cdot \cos \phi \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -R \cdot \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ R \cdot \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

m = jednotkový vektor normály sféry

$$m = \frac{S(\phi, \lambda)}{R}; \quad h_{11} = -\frac{\partial m}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial S}{\partial \phi}; \quad h_{12} = -\frac{\partial m}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial S}{\partial \lambda}; \quad h_{22} = -\frac{\partial m}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial S}{\partial \lambda}$$

$$\{h_{ij}(\phi, \lambda)\}^2 = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -R \cos^2 \phi \end{pmatrix}$$

Gaussova a střední křivost sféry $S(\phi, \lambda)$

$$\{g_{ij}(\phi, \lambda)\}^2 = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \phi \end{pmatrix} \quad \{h_{ij}(\phi, \lambda)\}^2 = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -R \cos^2 \phi \end{pmatrix}$$

Gaussova křivost G , střední křivost H

$$G = \frac{\det \{h_{ij}(\phi, \lambda)\}^2}{\det \{g_{ij}(\phi, \lambda)\}^2} = \frac{R^2 \cos^2 \phi}{R^4 \cos^2 \phi} = \frac{1}{R^2}$$

$$H = \frac{g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12} + g_{11}h_{22}}{2 \cdot \det \{g_{ij}(\phi, \lambda)\}^2} = \frac{-2R^3 \cos^2 \phi}{2R^4 \cos^2 \phi} = -\frac{1}{R}$$

Hlavní křivosti sféry $S(\phi, \lambda)$

Hlavní směry (křivosti) jsou vlastní vektory (čísla) [Shape operátoru](#) Sp .

Sp – sym. lineární zobrazení tečného prostoru, derivace Gaussova obrazu plochy ve směru tečného vektoru a .

$$Sp(a) = -D_a m$$

$$Sp = \left(\{g_{ij}(\phi, \lambda)\}^2 \right)^{-1} \cdot \{h_{ij}(\phi, \lambda)\}^2 = \begin{pmatrix} R^{-2} & 0 \\ 0 & R^{-2} \cos^2 \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -R \cos^2 \phi \end{pmatrix}$$

$$Sp = \begin{pmatrix} \frac{-1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R} \end{pmatrix}$$

$$G = \det(Sp). \quad H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(Sp).$$

Elipsoid

▣ tříosý elipsoid

Definován trojicí poloos a , b , c . Nejpřesnější aproximace geoidu. Střed totožný s geocentrem Země.

Obtížné výpočty, nepoužívá se v praxi.

▣ rotační elipsoid

Tzv. dvouosý elipsoid, vzniká rotací elipsy kolem vedlejší poloosy. Poledníky elipsy, rovnoběžky kružnice.

a) Zemský elipsoid (aproximace geoidu)

Střed ZE totožný s hmotným středem země (geocentrem).

Malá poloosa ZE totožná s osou rotace.

b) Referenční elipsoid (aproximace části geoidu)

Střed RE není totožný se středem Země.

Na vybraném území aproximuje lépe než ZE.

První a druhá základní forma rotačního elipsoidu



Oblate spheroid

$$x(u, v) = a \cos(u) \sin(v)$$

$$y(u, v) = a \sin(u) \sin(v)$$

$$z(u, v) = c \cos(v)$$

Computed by Wolfram|Alpha

Gaussian curvature

$$K(u, v) = \frac{4c^2}{(a^2 + (a - c)(a + c)\cos(2v) + c^2)^2}$$

Coefficients of the first fundamental form

$$E(u, v) = a^2 \sin^2(v)$$

$$F(u, v) = 0$$

$$G(u, v) = \frac{1}{2} (a^2 + (a - c)(a + c)\cos(2v) + c^2)$$

Coefficients of the second fundamental form

$$e(u, v) = \frac{\sqrt{2} a c \sin^2(v)}{\sqrt{a^2 + (a - c)(a + c)\cos(2v) + c^2}}$$

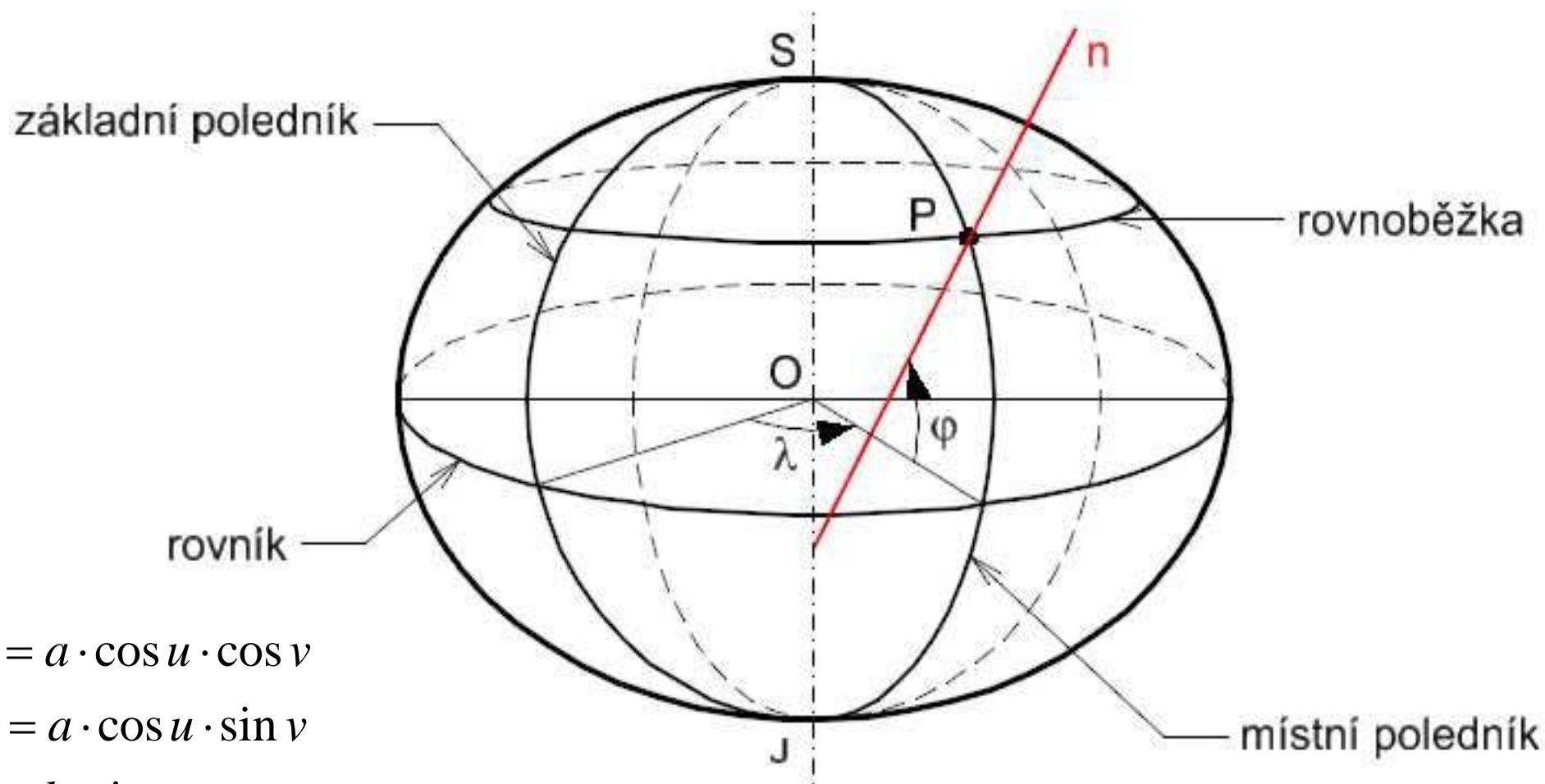
$$f(u, v) = 0$$

$$g(u, v) = \frac{\sqrt{2} a c}{\sqrt{a^2 + (a - c)(a + c)\cos(2v) + c^2}}$$

Nejznámější elipsoidy

Elipsoid	a [m]	b[m]	Typ
Besselův	6377397,1550	6356078,9633	RE
Hayfordův	6378388,0000	6356911,9461	RE
Krasovského	6378245,0000	6356863,0188	RE
WGS 84	6378137,0000	6356752,3142	ZE
Clarkův (1880)	6378249,1450	6356514,8696	RE
GRS 80	6378137,0000	6356752.3141	ZE
NAD 1927	6378206,4000	6356583,8000	RE
IAG 1967	6378160,0000	6356774,5160	ZE

Znázornění zeměpisných souřadnic



$$x = a \cdot \cos u \cdot \cos v$$

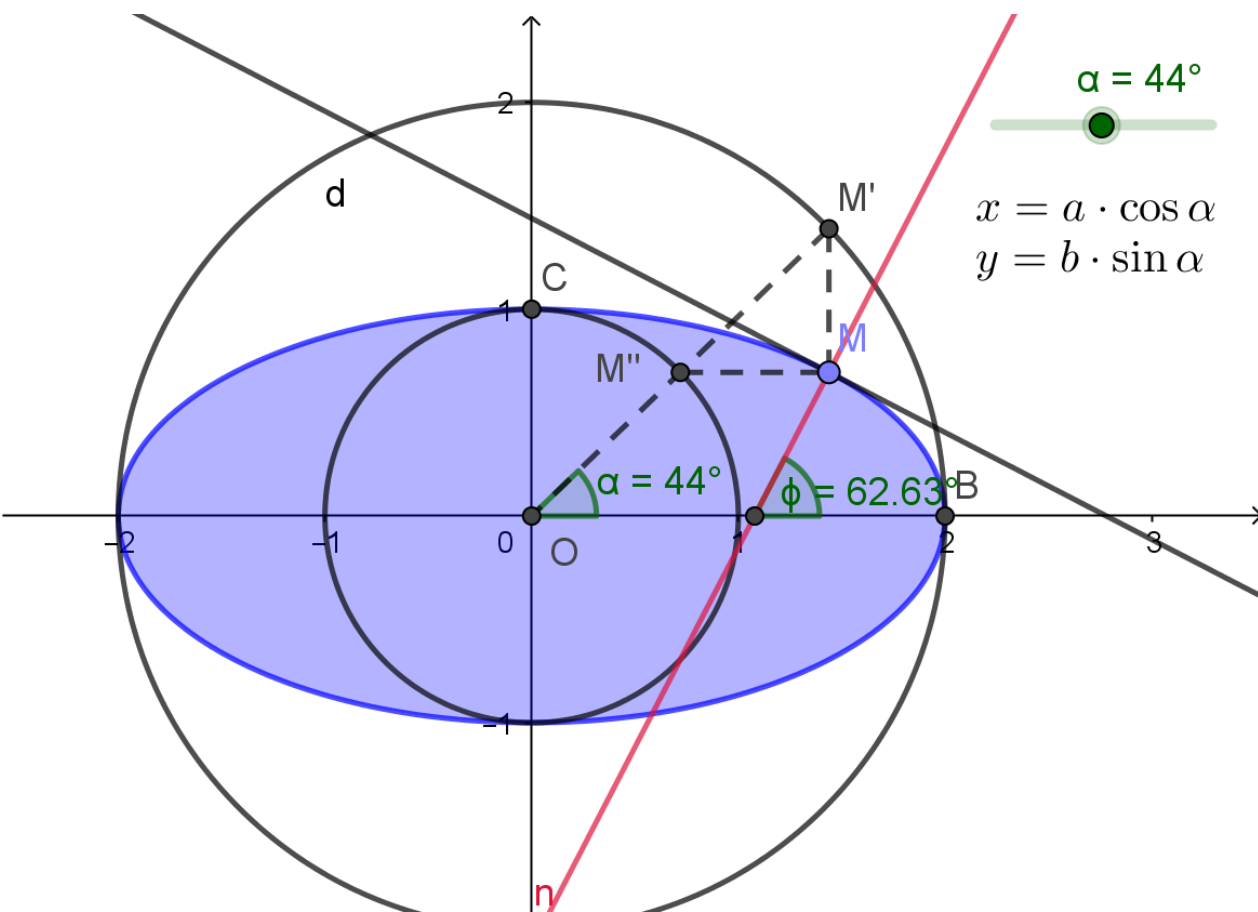
$$y = a \cdot \cos u \cdot \sin v$$

$$z = b \cdot \sin u;$$

$$v \in \langle -\pi, \pi \rangle; \quad u \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

Parametrizace elipsoidu

- zeměpisné souřadnice (ϕ, λ) .
- zeměpisná šířka ϕ **x** redukovaná šířka α .



Hodnota α pro parametrizaci

$$p(\alpha) = (a \cdot \cos \alpha, b \cdot \sin \alpha)$$

neurčuje zem. šířku v bodě M meridiánu.

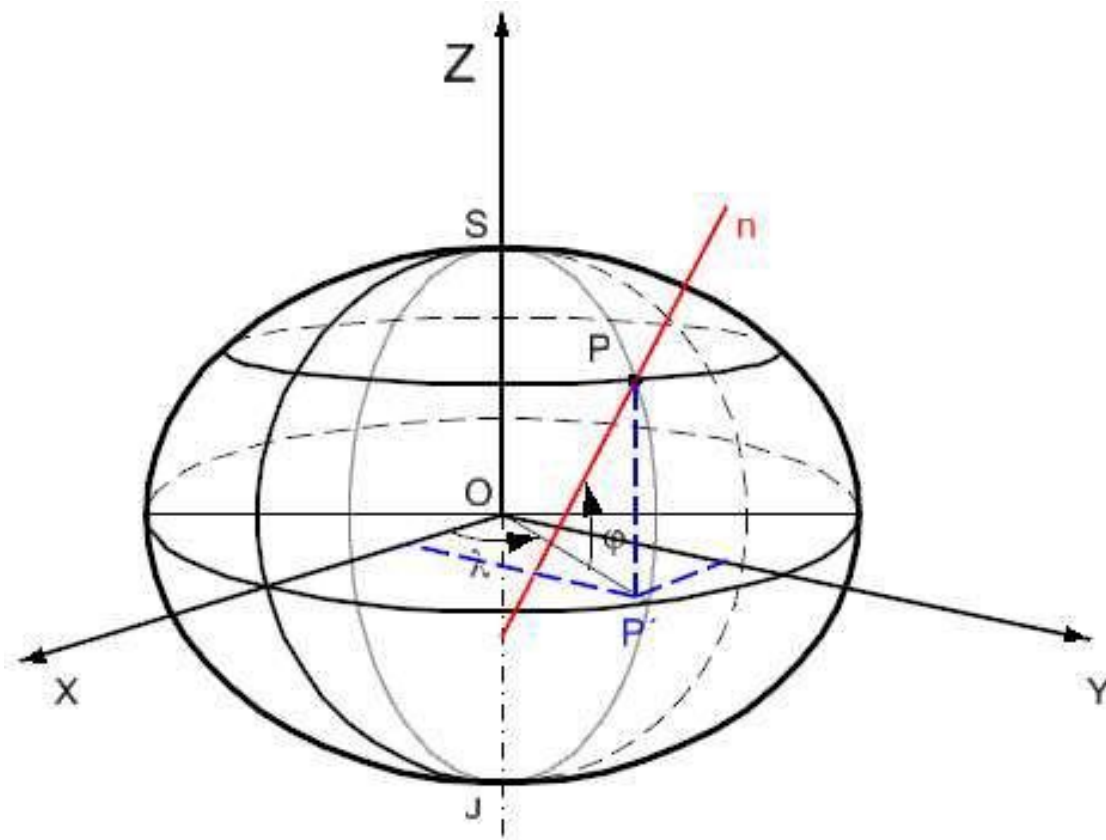
$$\tan \alpha = \sqrt{1 - e^2} \tan \phi$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad \text{1. geod. funkce}$$

$$N(\phi) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}},$$

Parametrizace elipsoidu zem. šířkou ϕ a délkou λ



$$X = (N(\phi) + h) \cos \phi \cos \lambda$$

$$Y = (N(\phi) + h) \cos \phi \sin \lambda$$

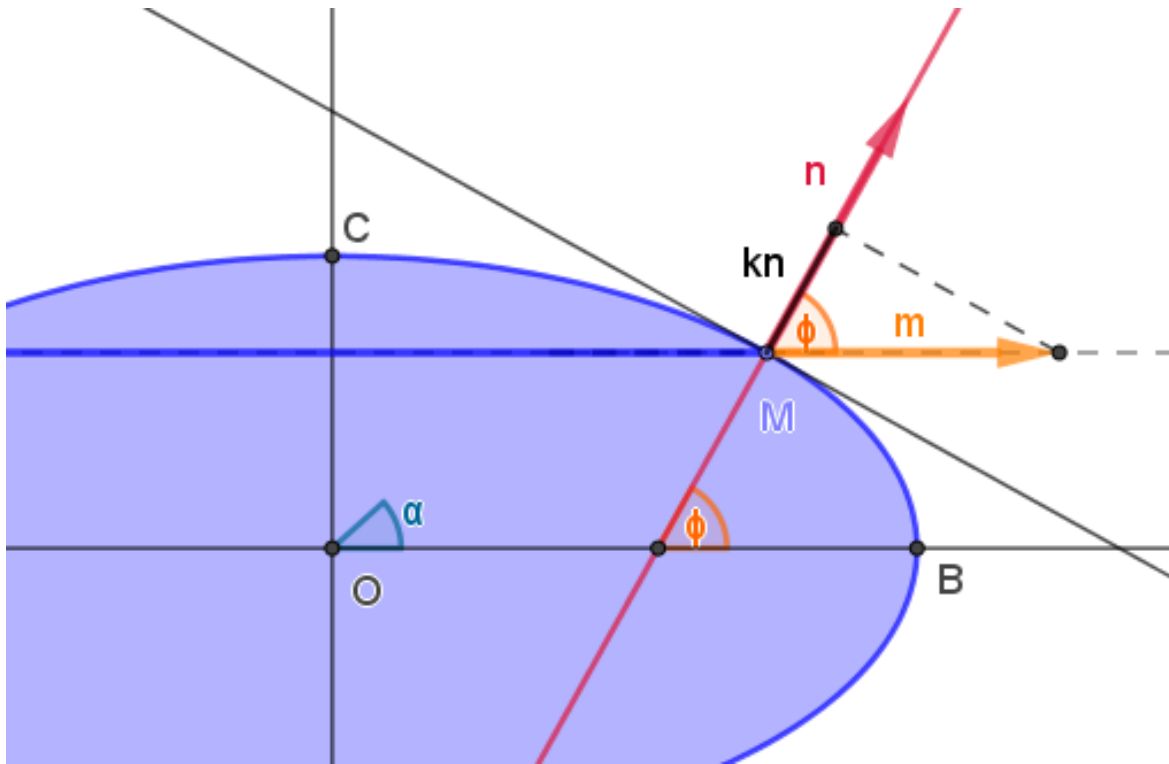
$$Z = \left(\frac{b^2}{a^2} N(\phi) + h \right) \sin \phi$$

$$N(\phi) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}},$$

h – výška nad referenčním elipsoidem

$N(\phi)$ - poloměr křivosti normálového řezu ve směru rovnoběžky zem. šířky ϕ .

Parametrizace elipsoidu zem. šířkou ϕ a délkou λ



$$x = N(\phi) \cdot \cos \phi \cdot \cos \lambda$$

$$y = N(\phi) \cdot \cos \phi \cdot \sin \lambda$$

$$z = \frac{b^2}{a^2} N(\phi) \cdot \sin \phi;$$

$$N(\phi) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}},$$

$$|m| = k = \frac{1}{N(\phi) \cdot \cos \phi}$$

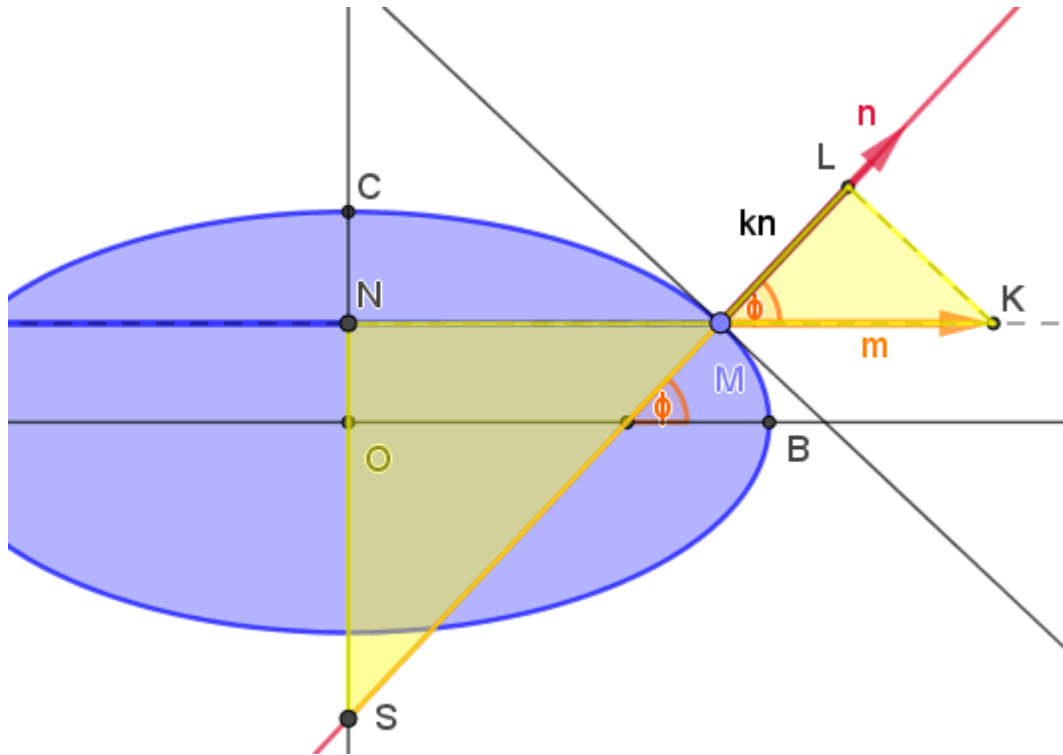
$$kn = k \cos \phi = \frac{1}{N(\phi)}$$

m – vektor hlavní normály rovnoběžky $|m| = k$

n – normálový vektor plochy

$N(\phi)$ – poloměr křivosti normálového řezu ve směru rovnoběžky zem. šířky ϕ .

Příčný poloměr křivosti $N(\phi)$



$$kn = k \cos \phi = \frac{1}{N(\phi)}$$

$$\Delta KLM \approx \Delta SNM$$

$$\frac{k_n}{x} = \frac{k}{|MS|}$$

$$\frac{k \cos \phi}{N(\phi) \cos \phi} = \frac{k}{|MS|}$$

$$N(\phi) = |MS|$$

m – vektor hlavní normály rovnoběžky $|m| = k$

n – normálový vektor elipsoidu

$N(\phi)$ – poloměr křivosti normálového řezu ve směru rovnoběžky zem. šířky ϕ

Normály sestrojené podél rovnoběžky vytvoří normálovou kuželovou plochu s vrcholem S délka površky SM je poloměr křivosti příčného řezu $N(\phi)$

Střední poloměr křivosti

$$R = \sqrt{MN}$$

R závisí pouze na ϕ .

Hodnoty R jsou tabelovány pro různé elipsoidy.

V matematické kartografii používán pro výpočet poloměru referenční koule z elipsoidu, tzv. **náhradní koule**.

Pro území ČR a $\phi = 49^\circ 30'$ a Krasovského elipsoid: $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}$
 $R_m = 6\,381\,561,267\text{m}$

$M(\phi)$ – křivost meridiánu, $N(\phi)$ – normálová křivost ve směru rovnoběžky

$$N(\phi) = \frac{a}{W};$$

$$M(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{W^3}$$

$$R(\phi) = \sqrt{M(\phi)N(\phi)} = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{W^2}$$

Náhrada referenčního elipsoidu koulí

Náhrada elipsoidu koulí na malém území

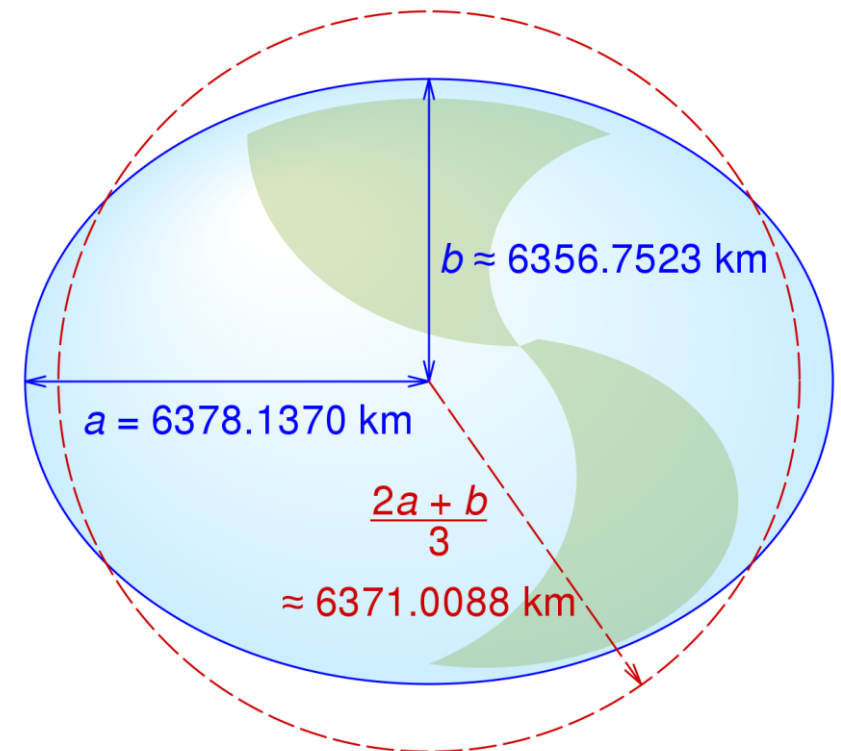
$$R = a$$

$$R = b$$

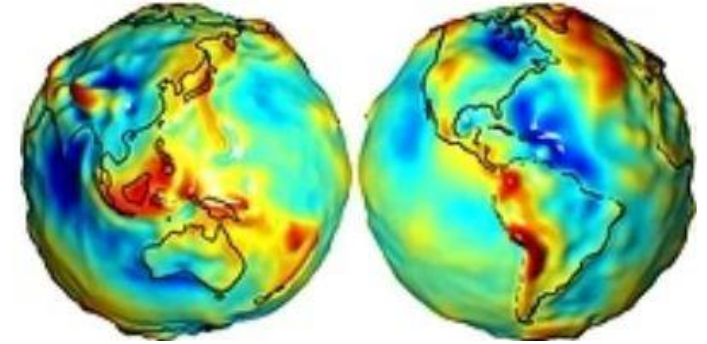
$$R = \text{střední poloměr křivosti, tj } R = \sqrt{MN}$$

Náhrada elipsoidu koulí globálně

- Stejný objem jako elipsoid
- Stejný povrch jako elipsoid
- Aritmetický průměrem poloos



Geoid



tzv. hladinová plocha – v každém bodě kolmá na směr zemské tíže

Nejpřesnější aproximace zemského povrchu.

Matematicky nedefinovatelná plocha, v kartografii se nepoužívá (neexistuje exaktní matematický převod na jiné referenční plochy).

Vlastnosti:

- ❑ Prochází zvoleným nulovým výškovým bodem.
- ❑ Nepravidelný tvar (konvexní/konkávní), zvlněný, ovlivněn rozložením hmot.
- ❑ Průběh geoidu kontinuálně upřesňován: geodetická a astronomická měření.

V současné době je průběh geoidu znám s přesností v řádech 0,1 – 1m. (neustále se zpřesňuje).

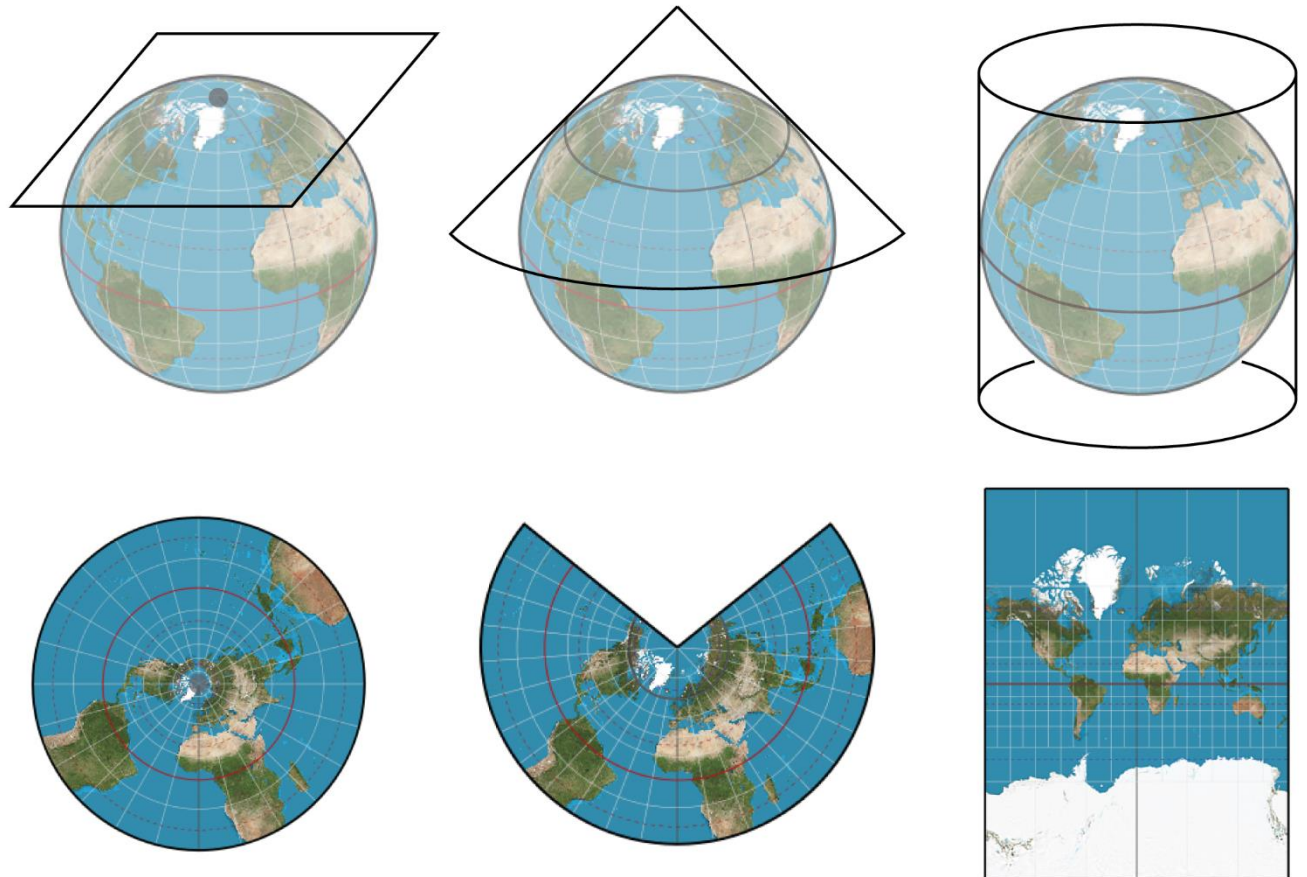
Zobrazovací plocha

Plocha rozvinutelná do roviny – kuželová, válcová, rovina

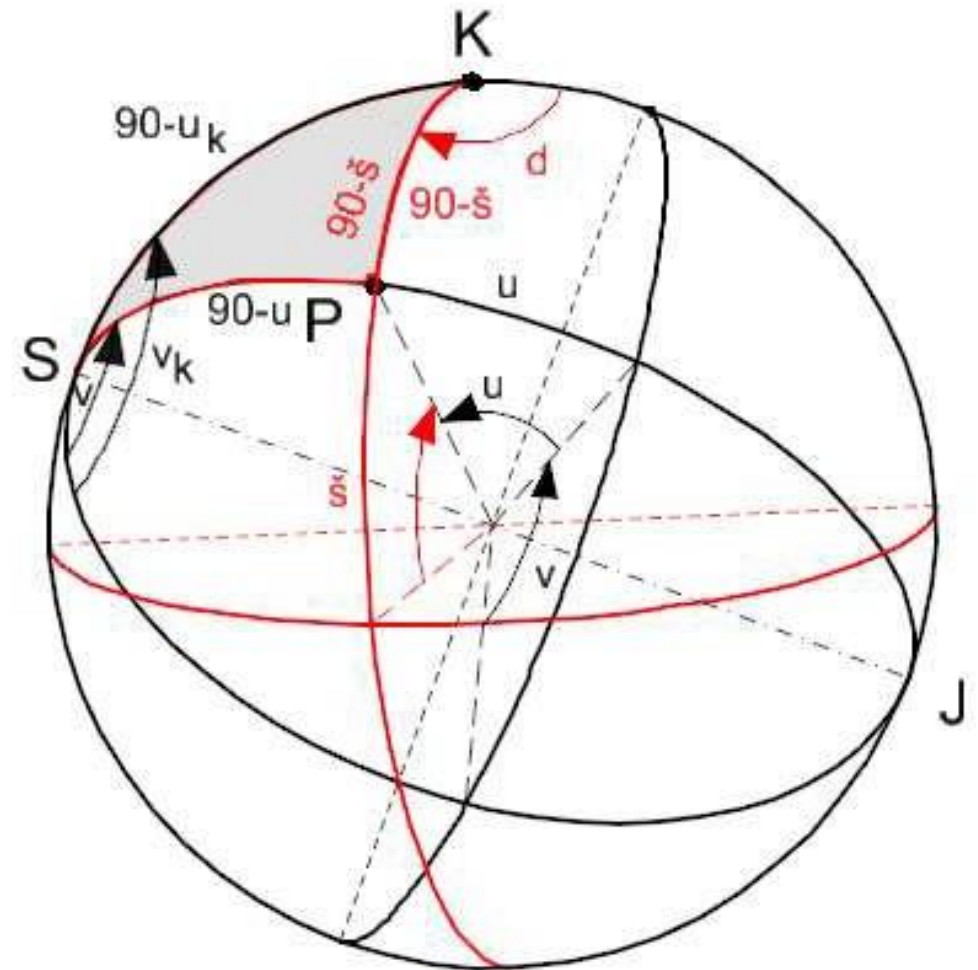
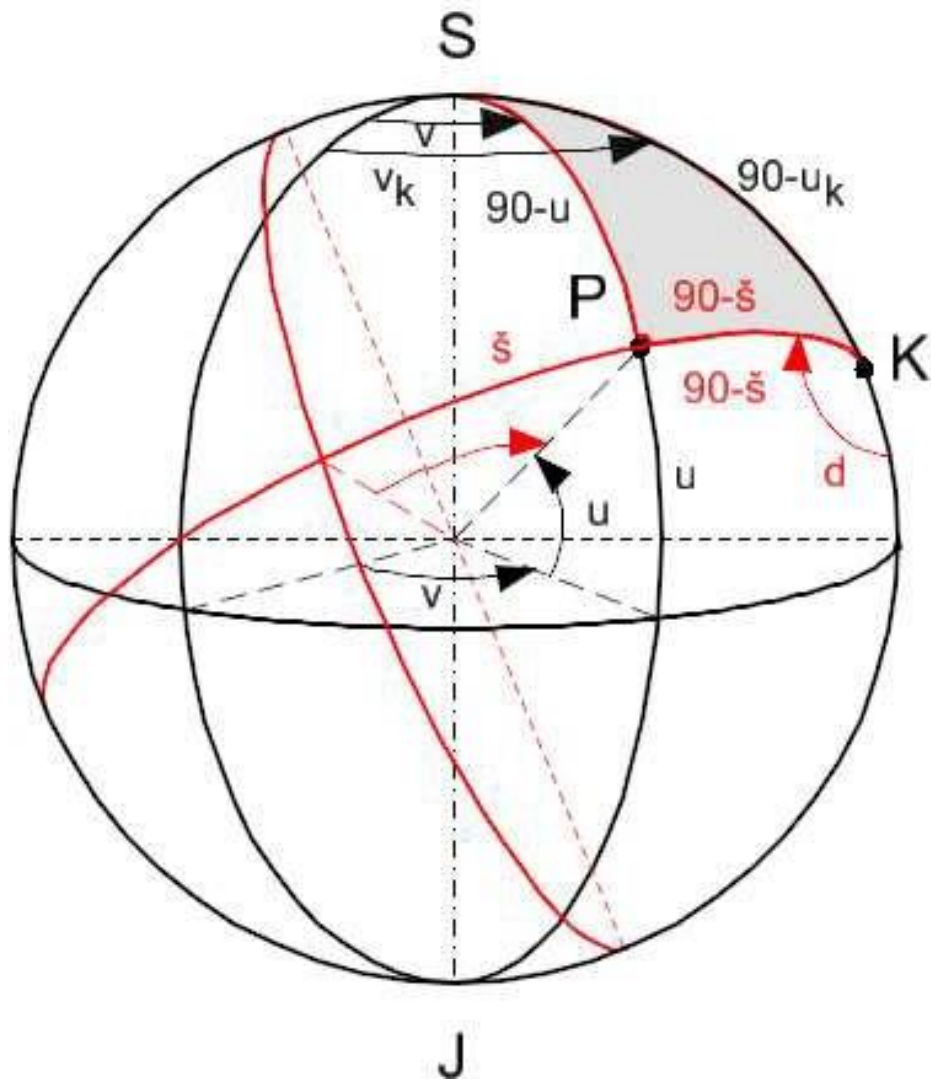
Lze zobrazovat na více než jednu plochu (polykónická zobrazení).

Zobrazovací plocha ve vztahu k referenční ploše:

- Sečná
- Tečná



Zeměpisné a kartografické souřadnice



Pravoúhlé souřadnice v mapě (x,y)

Počátek souřadnicového systému

Zpravidla v průsečíku obrazů základního poledníku a rovníku. Azimutální i kuželové projekce je výhodnější zapisovat v polárních souřadnicích ρ , α .

Zobrazovací rovnice: $(\phi, \lambda) \rightarrow (\rho, \alpha)$.

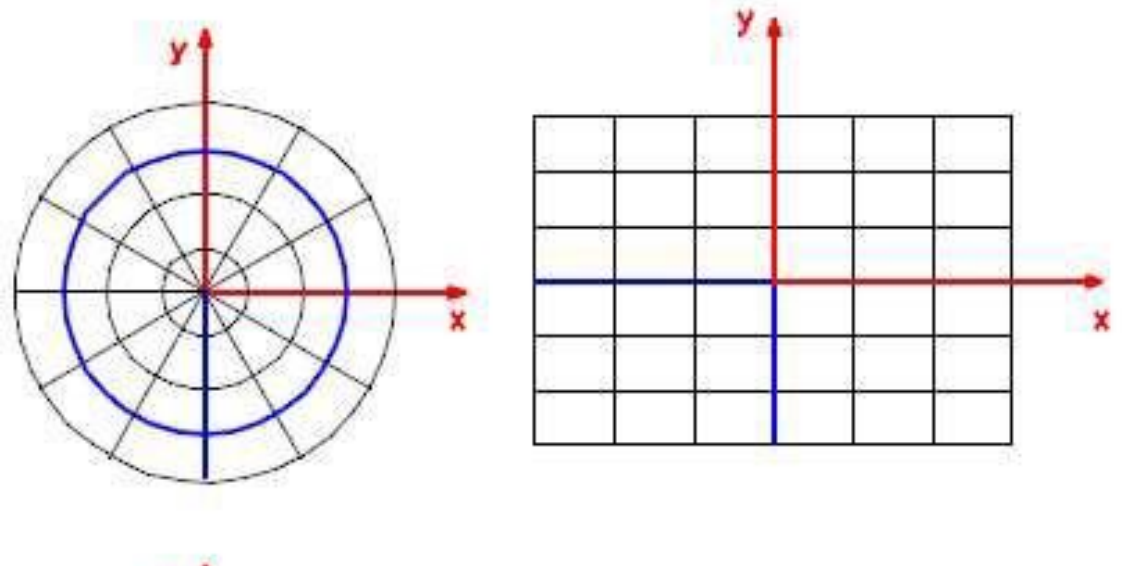
Příklad azimutálního zobrazení ekvidistantního v polednicích. Úhel pro jednoduchost předpokládáme v obloukové míře.

$$\rho = R \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right)$$

$$\alpha = \lambda$$

$$x = \rho \cos \alpha$$

$$y = \rho \sin \alpha$$



Adiční konstanty

Při zobrazování velkých územních celků počátek souřadnicového systému zpravidla uvnitř území.

Nevýhody:

- středová symetrie: souřadnice x , y kladné/záporné.
- Může docházet k chybné lokalizaci místa: zapomeneme mínus, jiný kvadrant.

$$\begin{aligned}x' &= x + \Delta x \\y' &= y + \Delta y\end{aligned}$$

