

UN PROBLEMA DE MATEMÁTICA-FICCIÓN EN TRES ACTOS

(José Antonio Mora Sánchez. CEP d'Alacant)

Las calculadoras ofrecen la posibilidad de modificar la óptica desde la que se abordan ciertos problemas matemáticos. En este problema se estudia una situación que podría corresponder a funciones exponenciales y ecuaciones logarítmicas que los estudiantes pueden abordar en un principio con herramientas matemáticas más sencillas: cálculo de porcentajes y operaciones para entrar a considerar ideas intuitivas de tasa de crecimiento.

Acto Primero. EL PLANETA ALFA EN PELIGRO'

Alfa es un lejano planeta habitado por una civilización avanzada que se está viendo invadido por una alga mortal. En estos momentos el alga ocupa el 50% del planeta y cada día que pasa aumenta un 10% respecto de lo que había el día anterior.

Los científicos de Alfa buscan desesperadamente un pesticida que acabe con la plaga. ¿Cuánto tiempo tienen para encontrarlo?

Si se considera que la herramienta a utilizar es la función exponencial, hemos de esperar varios cursos, ya que:

$$50 \cdot 1,1^x = 100; \quad 1,1^x = 2; \quad x = \log 2 / \log 1,1 = 7,2725$$

problema concluido: si los científicos tardan 8 días en encontrar la solución, no conseguirán salvar el planeta.

En el primer ciclo de Secundaria Obligatoria la resolución de este problema no será tan rápida, pero podemos estar seguros de provocar aprendizajes interesantes. En un principio es de esperar que muchos estudiantes intenten aplicar una estrategia aditiva: pasar del 50% al 60%, después al 70% y así hasta el 100%, aquí habrá que hacer hincapié en el aumento del 10% respecto del día anterior.

1. Este problema ha sido elaborado para el programa "Matemáticas: experimentación de materiales para utilización de calculadoras en las clases de matemáticas" del CEP d'Alacant y para el que Texas Instruments ha aportado las calculadoras científicas escolares GALAXY 40.

Los primeros datos provienen del cálculo de porcentajes, algo muy sencillo si se dispone de calculadora:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ día } 50 \quad (+) \quad 10 \% \quad (=) \quad 55 \\ 2 \text{ día } 55 \quad (+) \quad 10 \% \quad (=) \quad 60,5 \\ 3 \text{ día } 60,5 \quad (+) \quad 10 \% \quad (=) \quad 66,55 \end{array}$$

Es interesante pararse a reflexionar sobre el efecto de sumar el 10%. En principio el cálculo del 10% consiste en multiplicar por 10 y dividir por 100 y podemos resumir estas operaciones multiplicando por 0,1.

$$10\% \text{ de } 50 \text{ se calcula } 50 \quad (\times) \quad 0,1 \quad (=)$$

$$\text{Si queremos incrementar } 50 \text{ en un } 10\%, \text{ la operación será } 50 \quad (\times) \quad 1,1 \quad (=)$$

Igualmente, una disminución del 17% se obtiene multiplicando por 0,83. No digo que haya que suprimir la tecla de $\%$ de las calculadoras ya que al principio puede ser de gran ayuda pero llegado un momento es muy importante remitir el porcentaje al campo de las operaciones conocidas. De esta manera no se introduce el porcentaje como una operación nueva, sino que se conecta con los conocimientos aritméticos previos y tiene la ventaja añadida de enlazar los porcentajes con los decimales y las fracciones, lo que redundará en la consolidación de las estructuras conceptuales de números y operaciones.

El porcentaje de planeta ocupado por las algas será:

$$\begin{array}{cccccccccc} & \times 1,1 & & \times 1,1 & & \times 1,1 & & \times 1,1 & & \times 1,1 & & \times 1,1 & & \times 1,1 \\ 50 & \rightarrow & 55 & \rightarrow & 60,5 & \rightarrow & 66,6 & \rightarrow & 73,2 & \rightarrow & 80,5 & \rightarrow & 88,6 & \rightarrow & 97,4 & \rightarrow & 107,2 \\ \text{día} & & 1^\circ & & 2^\circ & & 3^\circ & & 4^\circ & & 5^\circ & & 6^\circ & & 7^\circ & & 8^\circ \end{array}$$

En calculadoras que admiten operadores, estas operaciones se hacen de forma sencilla, no hay más que introducir $(\times) \quad 1,1 \quad (OP)$ y la calculadora se encargará de realizar los productos cada vez que introduzcamos una cantidad y hagamos actuar al operador. En el trabajo con calculadora siempre resulta interesante proponer que realicen la tarea propuesta utilizando la menor cantidad posible de teclas, es un buen trabajo de búsqueda de la estrategia y de traducción de nuestras ideas al lenguaje de la calculadora de la manera más eficiente.

Es hora de retornar al planeta Alfa para comunicar a los científicos de que sólo disponen de **algo más de siete días** para encontrar el herbicida.

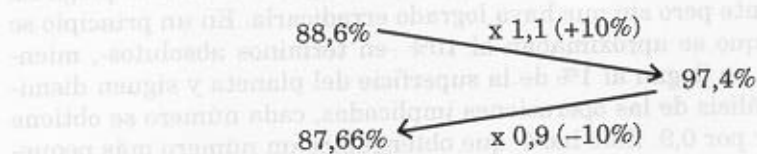
Acto Segundo. ¡ESTAMOS SALVADOS!

Los científicos encontraron el herbicida cuando acababa el séptimo día. En ese momento las algas habían ocupado el 97,4% del planeta. El producto descubierto les libera diariamente de algas el 10% de la superficie ocupada al finalizar el día anterior.

¿Cuánto tiempo pasará hasta conseguir que sólo el 50% del planeta esté ocupado por las algas?

El planteamiento de esta parte del problema es el que entraña mayor dificultad conceptual para los estudiantes porque habrá que romper algunos esquemas que hasta ahora funcionaban pero aquí se revelan insuficientes.

En la época de auge de la plaga del 6° al 7° día un aumento del 10% sobre 88,6 hace que pasemos del 88,6% del planeta al 97,4. Si ahora se reduce un 10% parece lógico esperar que del 97,4% pasemos al 88,6% ya que no hacemos más que reducir lo que antes había aumentado. Al realizar los cálculos algo no funciona: en lugar de esta última cantidad, pasamos a otra inferior: 87,66%. Esquemáticamente tenemos:



Esta idea se ve confirmada al considerar un espacio mayor de tiempo: la plaga ha tardado 7 días en pasar del 50% al 97,4%. Veamos cuanto tarda en remitir con el uso del pesticida:

	$\times 0,9$	$\times 0,9$	$\times 0,9$	$\times 0,9$	$\times 0,9$	$\times 0,9$	$\times 0,9$							
97,4	\rightarrow	87,7	\rightarrow	78,9	\rightarrow	71,0	\rightarrow	63,9	\rightarrow	57,5	\rightarrow	51,7	\rightarrow	46,6
día		1°		2°		3°		4°		5°		6°		7°

El proceso que a razón del 10% diario tardaba 7 días en extenderse, ahora se completa en algo más de seis para reducir la misma cantidad que había aumentado.

Las dificultades provienen del uso de los porcentajes, se aumenta o disminuye un mismo porcentaje (el 10%) pero sobre bases distintas, en un caso era 88,6 y en el otro 97,4, por eso los incrementos absolutos eran distintos. Si queremos pasar de 97,4 a 88,6 debemos realizar la operación inversa: si antes hemos multiplicado por 1,1, ahora debemos dividir por 1,1. Como $1/1,1 = 0,90909090$ en realidad debemos hacer una disminución del 9,0909%. Aquí se vuelve a poner de manifiesto la importancia de remitir el aprendizaje de los porcentajes al terreno de las operaciones conocidas.

Acto Tercero. ALFA. UN PLANETA LIBRE DE ALGAS.

Los científicos están preocupados porque el herbicida se ha revelado dañino para algunas de las especies del planeta Alfa y quieren dejar de fabricarlo cuanto antes. ¿Cuándo conseguirán eliminar por completo la plaga de algas?

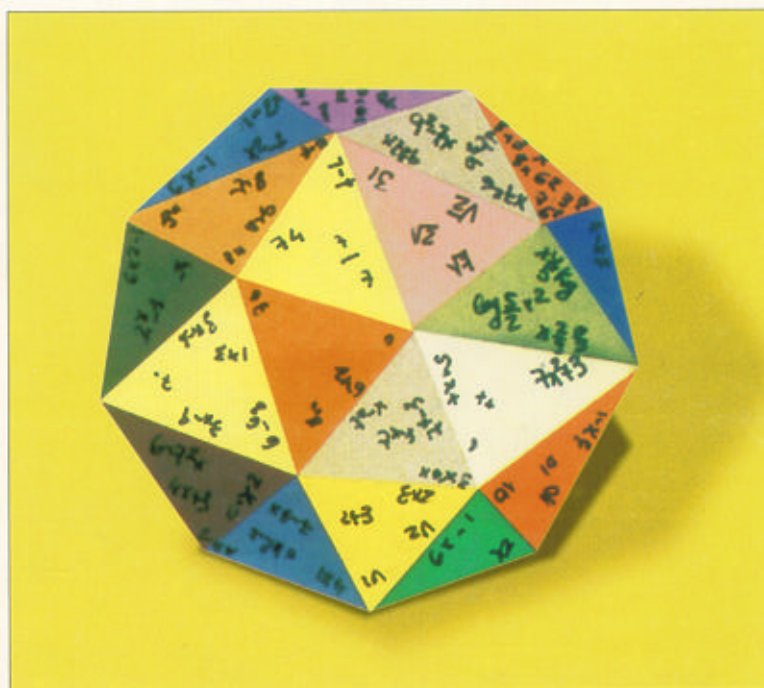
Para ver la evolución de la superficie ocupada por las algas no es suficiente con los datos obtenidos hasta el momento, habrá que obtener algunos más:

	1	2	3	4	5	6
97,4%	87,7%	78,9%	71,0%	63,9%	57,5%	51,8%
7	8	9	10	11	12	13
46,6%	41,9%	37,8%	34,0%	30,6%	27,5%	24,8%
14	15	16	17	18	19	20
22,3%	20,1%	18,2%	16,2%	14,6%	13,1%	11,8%
21	22	23	24	25	26	27
10,7%	9,6%	8,6%	7,8%	7,0%	6,3%	5,7%

Al analizar estos datos numéricos vemos que en menos de un mes la plaga ha remitido espectacularmente pero sin que haya logrado erradicarla. En un principio se conseguían reducciones que se aproximaban al 10% -en términos absolutos-, mientras que los últimos días no llegan al 1% de la superficie del planeta y siguen disminuyendo. Si vamos al análisis de las operaciones implicadas, cada número se obtiene de multiplicar el anterior por 0,9. Esto hará que obtengamos un número más pequeño pero sin llegar a cero. La gráfica que relaciona la superficie ocupada con el tiempo transcurrido apoya estos argumentos.

En cuanto a los científicos del planeta Alfa, parece que tendrán que seguir investigando con nuevos productos contra las algas porque el que han conseguido aún siendo de gran ayuda, no es la solución definitiva.

IV OLIMPIÁDA MATEMÁTICA NACIONAL ESPAÑOLA



FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS