FALLAHUGSUN FYRIR BYRJENDUR: námsvefur í stærðfræði

Útgáfa 1.0

Ingólfur Gíslason og Valgarð Már Jakobsson

2013

Styrkt af mennta- og menningarmálaráðuneytinu

Efni

Yfirlit

Vefurinn *Fallahugsun fyrir byrjendur* (http://fallahugsun.skjabjort.is) er kennsluvefur um breytistærðir, hnitakerfi, föll og fallahugsun með forritinu GeoGebra. GeoGebra er kvikt stærðfræðiforrit (e. dynamic mathematics software) þar sem nemendur geta höndlað, unnið með og skynjað framsetningar á stærðfræðilegum hlutum. Í því er hægt að sjá og vinna með algebrulega, rúmfræðilega og tölulega framsetning á sama fyrirbæri samtímis. Forritið er frjálst, ókeypis og keyrir á öllum tölvum og stýrikerfum sem geta keyrt Javaskrár. Einnig eru til útgáfur af forritinu fyrir iPad og Chrome. Ekki þarf annað en nýlegan vafra til þess að geta skoðað og unnið gagnvirk verkefni vefsins, og ef til vill getur það hentað sumum, en það er í raun ætlast til þess að nemendur vinni líka í forritinu sjálfu.

Um breytistærðir, föll og framsetningar

Kennsluvefurinn er um breytistærðir, föll og fallahugsun fyrir byrjendur, til dæmis nemendur á fyrsta ári í framhaldsskóla. Breytistærðir og föll eru öflug hugtök sem notuð eru til að leysa vandamál og ná vísindalegum tökum á ótal fyrirbærum í heiminum. En þessi hugtök leyna á sér. Þau eru óhlutbundin (abstrakt) og vísa því ekki til neinna tiltekinna áþreifanlegra hluta, en geta nýst til þess að lýsa öllu sem hægt er að lýsa með reglum og lögmálum. Ein af ástæðunum fyrir afli þeirra er að þeim tilheyra *reiknikerfi* sem gerir okkur kleift að *umbreyta framsetningum*. Mjög einfalt (en uppspunnið) dæmi um þetta væri:

> Hugsum okkur að með því að setja saman upplýsingar byggðar á reynslu og/eða fræðilegum rökstuðningi fáist jafna um einhverja stærð sem skiptir máli: $289x = 283798$. Fyrir manneskju er erfitt að ná utan um hvað þetta þýðir. En með reikningi má komast að því að þessi jafna segir ekkert annað en að $x = 982$, sem getur sagt manni töluvert, þessi jafna er meira *upplýsandi* en hin þótt hún segi nákvæmlega það sama.

Á sama hátt eru til reiknikerfi um föll, þar sem hægt er að framkvæma ýmsar aðgerðir til þess að fá upplýsingar um föll sem hægt er að skilja, þótt það sem vitað var í upphafi um þau hafi haft litla merkingu. En til þess að hægt sé að skilja þessar upplýsingar þarf að tengja þessar stærðfræðilegu *táknrænu* framsetningar við eitthvað annað sem við skiljum eða skynjum betur, eins og myndir, til dæmis í hnitakerfi. Með öðrum orðum verðum við að geta þýtt *milli framsetningarhátta*, sérstaklega milli formlegra stærðfræðilegra tákna og óformlegra mynda, hugmynda, myndlíkinga, sagna, eða annarra fyrirbæra sem við skiljum.

Hefðbundin kennsla á það til að kynna föll almennt og ýmsar tegundir þeirra áður en nemendur hafa upplifað neina þörf fyrir hugtakið og þeir hafa oft litla reynslu til að tengja við. Oftast er lítil áhersla lögð á þýðingar milli framsetningarhátta eða aðrar leiðir til þess að skapa merkingu með stærðfræðilegum táknum og hugtökum. Gagnstætt þessu er hugmyndin sem þetta námsefni byggir á:

> Með því að nemendur fást við verkefni þar sem þeir skoða og búa til föll í samhengi við hluti sem þeir þekkja, geta þeir skynjað stærðfræðileg fallavensl sem þeir svo ígrunda og þróa og orða hugsun sína um í samræðum við aðra nemendur og kennara. Með því að tengja saman það sem þeir *gera* við hluti og hvaða *áhrif* aðgerðir þeirra hafa fá þeir *stærðfræðilega reynslu*.

Grunnsetningar sem efnið byggir á eru eftirfarandi:

- Stærðfræðilegar athafnir og stærðfræðileg vinna og hugsun felast meðal annars í að skynja og tjá sama fyrirbærið í ólíkum framsetningum og að geta *þýtt á milli framsetningarhátta*. Til dæmis að geta þýtt stærðfræðilegt táknmál yfir í mynd í hnitakerfi og öfugt. (Þetta er að „þýða milli framsetningarhátta".)

- Nám í stærðfræði getur farið fram gegnum sköpun merkingarbærra hluta í samvinnu við aðra, í þessu tilviki með því að vinna gagnvirkt með, breyta og búa til kvik GeoGebru-skjöl.

Auk þessa er mikilvægt að nemendur læri að umbreyta stærðfræðilegu táknmáli *innan sama framsetningarháttar*. Til dæmis að geta reiknað frá stæðu eins og $(x+2)^2 - 4$ yfir í aðra jafngilda stæðu, eins og $x^2 + 4x$, en þessi vefur snýr ekki að því nema að litlum hluta. Bæði er það vegna þess að fyrrnefndu atriðin eru mikilvægari fyrir myndun merkingar, og vegna þess að áherslur skólakerfisins hafa löngum verið bundnar nánast eingöngu við slíkar umbreytingar innan sömu framsetningar, sem mætti kalla einfaldlega *reikning*.

Um vefinn

Á vefnum *Fallahugsun fyrir byrjendur* (http://fallahugsun.skjabjort.is) er að finna:

- gagnvirk verkefni
- verkefnalýsingar (nemendur búa sjálfir til tölvulíkön).

Efnið er einkum hugsað fyrir ferli þar sem:

(a) Nemendur vinna *í pörum* við verkefni í GeoGebru þar sem myndast grundvöllur fyrir samræður milli nemenda og stærðfræðilega samvinnu.
(b) Nemendur skrifa um það sem þeir voru að gera, ígrunda reynsluna af tölvuvinnunni.

(c) Nemendur ræða saman undir stjórn kennara. Kennarinn dregur fram mikilvægustu atriðin, beinir athygli nemenda að stærðfræðilegum þemum, og gerir umræðuna stærðfræðilega.

Markmiðið með efninu er að gera nemendur færa um að búa sjálfir til kvik, gagnvirk líkön af fyrirbærum sem fela í sér línulegar breytingar og hreyfingar, rúmfræðilegar breytingar og hringhreyfingar. Þeir gera með því að notfæra sér breytistærðir ásamt hnitakerfisframsetningu fallavensla. Þeir munu að loknu náminu geta sett saman hliðranir, stríkkanir og hringhreyfingar, og útskýrt hvernig þær virka.

Samræður

Það að læra stærðfræði felst að miklu leyti í því að gera stærðfræðilega orðræðu að sinni, það er að segja að geta átt stærðfræðileg samskipti ekki bara við aðra heldur líka við sjálfan sig (Guðný Helga Gunnarsdóttir og Þórunn Blöndal, 2011).

Kappræður, safntal og leitandi tal

Neil Mercer (2000) setur fram þrjár tegundir samræðna í skólastofum, sem hér verða nefndar *þras*, að *jáa* og *leitandi tal*.

Þegar fólk ***þrasar*** (e. disputational talk, kappræður) þá vill það ekki sjá hlutina frá sjónarhorni hinna. Það ítrekar eingöngu sína eigin skoðun án þess að taka tillit til þess sem aðrir leggja fram.

- Svarið er 17.
- Nei það er 14.
- Ég held að það sé 17.
- Ég held að það sé 14.

Þegar fólk ***jáar*** (e. cumulative talk, safntal) byggja viðmælendur gagnrýnislaust á hvers annars framlagi, bæta við upplýsingum og skapa saman þekkingu og skilning.

- Svarið er 17.
- (skrifar: 17) En næsta?
- Þar er það 14.
(Og svo framvegis)

Í ***leitandi tali*** (e. exploratory talk, könnunartal) reyna viðmælendur að skilja framlög annarra á gagnrýninn og uppbyggjandi hátt. Upplýsingar eru lagðar fram til sameiginlegrar íhugunar. Tillögur og gagntillögur eru settar fram, en í öllum tilvikum eru **settar fram ástæður** og **stungið upp á öðrum möguleikum**. Reynt er að ná samkomulagi sem veitir grunn að árangri og framvindu.

- Svarið er 16, vegna þess að froskurinn fer tvö skref á dag.
- En hvað ef ... síðasta daginn kemst hann alla leið upp, og rennur ekki aftur niður?
- Ó þá þurfum við að telja upp á nýtt... er þetta þá 15?
(Og svo framvegis)

Önnur leið til að taka saman megin einkenni á afstöðu í þessum samræðuháttum er: í leitandi tali eru **sett á bið** bæði sjálfvirk ógagnrýnin „já“ (eins og í jáun) og sjálfvarnar „nei“ (eins og í þrasi). Í staðinn fer fram samtal þar sem mismunur er ræddur opinskátt og ástæður gefnar og metnar.

Það má ræða þessar tegundir samræðu við nemendur og leggja áherslu á að bestur árangur í samvinnu sem miðar að námi fæst þegar leitandi tal er ríkjandi.

Að huga að bættum stærðfræðilegum samræðum og hugsun

Hvernig á að meta samræður? Hvað er til vitnis um að þær séu góðar? Hér eru nokkur atriði sem eru til staðar í góðum stærðfræðilegum samræðum, og eru nákvæmari heldur en greiningin á þremur tegundum samræðu hér að ofan:

- Nemendur fylgja fyrstu orðum sínum eftir, segja aðra setningu (að eigin frumkvæði eða eftir umleitun kennara eða annars nemanda) til að útskýra hugsun sína og tengja við fyrstu setninguna.
- Nemendur tala um hugsun hvers annars (ekki bara sína eigin).
- Vinna nemenda felur í sér endurskoðun, sér í lagi endurskoðaðar útskýringar og röksemdir.
- Nemendur nota *stærðfræðilegt* tungumál í skýringum sínum og samræðum. Kennarar verða að vera virkir hérna í því að benda á ónákvæmni og margræðni í hversdagslegu máli.
- Allir nemendur fá athygli, ekki bara þeir sem hafa sig í frammi.
- Orðræða kennarans snýst um hugsun nemenda frekar en „hvað á að gera næst“ eða því að „halda aga“.

Mikilvægt er að kennari sé í góðum tengslum við nemendur, og meðal annars er mikilvægt að hann spyrji nemendur spurninga eins og:

- Heldurðu að þú getir lært að verða góð í stærðfræði með því að læra meiri stærðfræði, með því að vinna vel að því að skilja verkefnin eða helDurðu að þú getir ekki breytt því hve góð þú ert í stærðfræði?

Þessi viðmið um góða samræðu- og hugsunarhætti í stærðfræði eru fengin að láni og þýdd af vefsíðunni http://serpmedia.org/5x8card/.

Á næstu síðu eru fleiri ráð sem hægt er að gefa um tilgang og eðli samræðna um stærðfræði.

Að tala saman um stærðfræði

Til hvers að tala um stærðfræði?

Margir halda að ekki sé mikið um að tala í stærðfræði. Annaðhvort er svarið rétt eða rangt, er það ekki?

En það er fleira fólgið í að læra stærðfræði en að fá svör. Þú þarft samræðu til þess að læra:

- hvað orð og tákn þýða,
- hvernig hugmyndir tengjast milli efnisþátta,
- hvers vegna tilteknar aðferðir virka,
- hvers vegna eitthvað er rangt,
- hvernig þú getur leyst verkefni á betri hátt.

Kennarar og leiðbeinendur segja oft að þeir skilji stærðfræðina betur þegar þeir fara að kenna hana. Á sama hátt muntu komast að því að eftir því sem að þú ferð að útskýra hugsun þína ferðu að skilja hana betur.

Eftir því sem þú ferð að skilja stærðfræðina verður auðveldara að muna hana og þegar þú gleymir einhverju muntu geta fundið út úr því sjálfur.

Nokkur atriði til að forðast

● Ekki flýta sér

Mikilvægara er að bæta við skilning sinn heldur en að „klára“ verkefni.

● Ekki vera farþegi

Ekki láta einhvern í hópnum þínum „taka yfir“.

Fylgdu þessum grunnreglum og:

- þér fer að finnast stærðfræði skemmtilegri,
- þú ferð að læra meira af öðrum,
- þú kemst að því að margir deila reynslu þinni af erfiðleikum í stærðfræði,
- þú kemst að því að þú getur líka hjálpað öðrum.

Nokkur atriði til að fylgja

● Tölum einn í einu

Gefið öllum tækifæri til að tala. Skiptist á að setja fram hugmyndir, útskýringar og athugasemdir. Leyfið fólki að ljúka máli sínu.

● Deilum hugmyndum og hlustum á hvert annað

Ef þú skilur ekki það sem einhver hefur sagt, spyrjið þá „hvers vegna“ þangað til þú skilur. Biðjið þá um að gefa dæmi, teikna skýringarmynd eða skrifa niður útskýringuna.

● Fylgjumst með því að hlustað sé á okkur

Ef þú varst að segja eitthvað og ert ekki viss um að aðrir hafi skilið þig, biddu þá um að segja með sínum eigin orðum það sem þú varst að segja.

● Byggjum ofan á

Reyndu að segja eitthvað sem byggir ofan á það sem síðast var sagt.

● Látum reyna á það sem sagt er

Ef þú ert ósammála því sem einhver segir, skoraðu á hann að útskýra. Settu svo fram þitt álit.

● Virðum skoðanir hvers annars

Ekki hlæja að framlagi annarra (nema það eigi að vera fyndið).

● Njótum mistaka

Ekki hafa áhyggjur af því að gera villur. Ef þú gerir ekki vitleysur, þá lærirðu ekki neitt. Stundum getur verið áhugavert að gera viljandi vitleysur til að kanna hvort aðrir eru að hlusta.

● Deilum ábyrgð

Ef kennarinn biður um viðbrögð hópsins, á hver sem er innan hans að geta sagt frá.

● Reynum að komast að sameiginlegum niðurstöðum í lokin

Tekið úr Swan (2005)

Mikilvæg „tæknileg smáatriði“

Margir kennarar reka sig á óvæntar fyrirstöður þegar þeir hefja notkun tölvuforrita í kennslu. Eitt af því sem gera þarf fyrst, er að kanna hvort tölvurnar sem á að nota séu búnar nauðsynlegum hugbúnaði og séu nettengdar.

Java

Til að keyra GeoGebru þarf tölvan að vera með Java uppsett. Ef svo er ekki, þarf að hala því niður og setja það upp. Það á að vera einfalt, en ef kerfisstjóri skólans hefur þann háttinn á, gæti hann hafa lokað fyrir það, og þá getur verið ómögulegt fyrir notendur að gera það.

Niðurhal

Ef tölvurnar eru ekki með GeoGebru uppsett í upphafi þarf að hala því niður. Það er gert á http://www.geogebra.org/ en ef margir nemendur gera það í einu getur það tekið nokkurn tíma vegna þess að bandvídd á neti skólans er takmörkuð.

Einfaldar tölvuaðgerðir og nemendur

Gagnstætt því sem margir halda þá eru nemendur á 21. öld ekki endilega mjög færir í því að nota tölvuforrit. Þeir geta verið mjög flinkir í að nota tiltekin forrit eða vefsíður en eru stundum ekki með það á hreinu hvernig maður vistar skjöl. Það getur líka farið eftir því umhverfi sem þeir vinna í: eru þeir með eigin fartölvur, fartölvur frá skólanum, eða í tölvuveri. Þeir þurfa að geta vistað skjölin sín á vísum stað þar sem þeir hafa aðgang að þeim, helst alltaf.

Atriði tengd stærðfræðilegu ritmáli

Gömul forritaraspeki hljóðar svo: „Tölvur gera eingöngu það sem þeim er sagt að gera, en ekki það sem maður vill að þær geri.“ Í tölvuforritun skipta ýmis smáatriði miklu máli og ein semíkomma á röngum stað gerir forrit óvirkt. GeoGebra nálgast það að vera forritunarumhverfi þar sem tölva gerir það sem henni er sagt að gera, en forritunarmálið er útgáfa af (hluta af) venjulegu ritmáli stærðfræðinnar. Ritmál stærðfræðinnar er ólíkt venjulegu hversdagslegu máli að mörgu leyti, en sumar af þeim venjum verða notendum svo tamar að þeir gleyma þeim. Eitt af því er að í stærðfræði er gerður greinarmunur á litlum og stórum bókstöfum sem tákna breytur. Þannig eru A og a ekki sama breytistærðin (þótt þær *gætu* tekið sama gildi.) Og almennt þarf að hafa í huga, og ítreka, að GeoGebra túlkar það sem er slegið inn stranglega samkvæmt skilgreiningum. Það er ekki það sama að rita „A(2,0)“ og „A=(2,0)“. Hið fyrra er merkingarlaust, en hið síðara skilgreininir punkt A í með hnitið (2,0).

Atriði tengd notkun GeoGebru

Þegar velja á einhvern hlut á skjánum til að færa hann til eða breyta skilgreiningu, þarf að vera „stillt á örina“. Þá þarf að smella á örvatáknið (efst vinstra megin) ef stillt er á eitthvað annað fyrir, til dæmis vegna síðustu aðgerðar sem notandi framkvæmdi. Prófið til dæmis að setja inn punkt. Ef þið viljið nú færa punktinn dugar ekki að smella á hann til að grípa hann og færa, nema að hafa smellt á örina í millitíðinni. Að öðru leyti skal bent á heimasíðu GeoGebra á Íslandi, þar sem er að finna kennslubók í notkun forritsins, á https://skrif.hi.is/geogebra/. Það er ekki nauðsynlegt að lesa þá bók til að nota kennsluefnið á http://fallahugsun.skjabjort.is en ef spurningar, forvitni eða þörf vaknar er hægt að leita til hennar.

Atriði tengd notkun GeoGebruskjalana á vefnum

Litlu GeoGebru-skjölin sem eru hluti af námsvefnum eru „viðkvæm“ að því leyti að það er oft auðvelt að gera eitthvað sem fær þau til að hætta að virka í bili. Ef það gerist er nóg að endurhlaða viðkomandi síðu. Engin leið er til að skemma þau til frambúðar!

Vinnulag: tillaga að grind

Grundvallarsýnin sem þetta efni byggir á er nám sem samræða. Verkefnin eru samin með það fyrir augum að nemendur tali sín á milli tveir og tveir, að þeir eigi í samræðu við kennara, að þeir eigi í samræðu sem hópur og að þeir eigi sína innri samræðu sem einstaklingar, þegar þeir skrifa einstaklingslausnir.

Ein hugmynd að vinnulagi, sem ætti að falla að flestum verkefnunum er hér sýnd með skema. Það ber ekki að skilja það svo að þetta sé eina leiðin til að nota verkefnin, eða að skemað beri ekki að laga að aðstæðum og nemendum hverju sinni, heldur er þetta sett fram sem stuðningur.

I	Kennari kynnir GeoGebru-verkefnið (með skjávarpa). Nemendur fylgjast með. Stundum fylgir hérna einföld spurning (en ekki endilega auðsvarað) sem nemendur eiga að reyna að svara út frá innsæi. Á eftir er svo spurningin könnuð nánar.
II	Nemendur vinna 2 og 2 saman. Tala um og skrifa mismunandi lýsingar á því hvað er að gerast í GeoGebra-skjalinu.
III	Umræða hópsins. Kennari hlustar á nemendur segja frá því hvernig þeir skildu og hugsuðu verkefnið. Punktar skrifaðir á töfluna. Kennari getur kynnt hugtök og rithátt.
IV	Nemendur vinna aftur 2 og 2 saman. Þeir eiga að breyta og bæta GeoGebra-skjalið á einhvern hátt samkvæmt verkefnalýsingu.

V	Nemendur skrifa niðurstöðu tímans með stærðfræðireglu.
VI	Hver og einn skrifar fyrir sig: > hvað fékk ég út úr þessum tíma? > hvað get ég gert núna sem ég gat ekki fyrir tímann?

Mikilvægt getur verið að útskýra og kynna vinnulag fyrirfram fyrir nemendum. Einnig er mikilvægt að taka skýrt fram hvaða afurðum nemendur eiga að skila, og hvernig. Það er til dæmis hægt að biðja nemendur að skila því sem kemur út úr liðum IV og V, með því að senda kennara GeoGebruskjal í tölvupósti, eða gegnum eitthvert rafrænt kerfi, en einnig að skila skriflega, hver fyrir sig, sinni úrvinnslu á lið VI (eða að þeir geri það fyrir sig, og safni í möppu sem verði skoðuð í lokin).

Flestir nemendur munu þurfa tíma og rými til þess að læra að vinna saman og tala saman. Fyrir verkefni sem eru unnin í pörum getur verið mikilvægt að eiga samræðu við nemendur þar sem eftirfarandi kemur fram:

> **Báðir nemendur bera ábyrgð. Gefið ástæður fyrir ykkar uppástungum og innleggjum. Fáið ástæður fyrir því sem hinn segir. Reynið alltaf að segja „hvers vegna“.**

Ábendingar um verkefnin

Hér á eftir fara mis-ítarlegir kaflar um hvern hluta námsefnisins.

Punktar á talnalínu

Markmið þessara verkefna er tengja aðgerðir eins og samlagningu og margföldun við myndrænar framsetningar þessara aðgerða:

- sem aðgerða á punkti á einni talnalínu,
- sem tengsla milli punkta á tveimur samsíða talnalínum,
- sem tengsla milli punkta á tveimur hornréttum talnalínum (hnitakerfi).

Fyrst er nemendum sýnd vefsíðan á skjávarpa og farið yfir hvað þeir eiga að gera. Þeir eru beðnir að opna síðuna í sínum tölvum. Nemendur eru í pörum, 2 með eina tölvu. Þeir eiga að átta sig á framsetningarleiðum fyrir hliðrun, stríkkun og speglun talna og þýða á milli þeirra.

Punktar og hnit í hnitakerfi

Markmið þessara verkefna er

- að rifja upp fyrir nemendum tengslin milli táknrænnar framsetningar á punktum og hvernig þeir eru teiknaðir í hnitakerfi,
- að kynna fyrir nemendum hvernig sama fyrirbæri birtist í mismunandi framsetningum (stærðfræðilegt táknmál, hnitakerfi, hversdagslegt mál),
- að kynna fyrir nemendum GeoGebruverkfærið rennistiku til þess að stjórna gildi breytistærða og hvernig hægt er að búa til punkta í hnitakerfi sem eru háðir gildi þessara breytistærða,
- að nemendum læri að nota breytistærðir og fallavensl í GeoGebru til þess að búa til áhugaverðar kvikar myndir.

Í verkefninu *Punktar í inntaksreit og í hnitakerfi* eru nemendur kynntir fyrir verkfærum GeoGebru, **inntaksreit** og **línustriki milli tveggja punkta** auk þess sem þeir eiga að finna út hvernig hægt er að skilgreina samsíða línur.

Í verkefninu *Punktar og rennistikur* eru nemendur kynntir fyrir rennistikum og þar með því hvernig setja má inn kvikar breytistærðir og punkta í GeoGebru. Þeir tengja saman stærðfræðilegt táknmál um afstöðu punkta við myndræna framsetningu.

Í verkefnunum *Kvikur ferningur* og *Sprellikarl* beita nemendur rennistikum og þar með kvikum breytistærðum til þess að búa til áhugaverðar kvikar myndir þar sem þeir hafa nokkurt val um lokaafurðina.

Samhnik punkta

Hér verður lýst því hvernig kennslustund getur gengið fyrir sig og hvernig nemendur þróa svör sín. Til hliðsjónar verður skoðað verkefnið *Samhnik punkta 1* og litið til reynslu sem hefur fengist í kennslu. Hugmyndirnar að verkefninu voru meðal annars fengnar úr Falcade, Laborde & Mariotti (2007).

1. Nemendur sjá og skynja gegnum músarhreyfingu

Nemendum er sýnt skjal á skjávarpa. Þeir eru beðnir að opna samskonar skjal í sínum tölvum. Nemendur eru í pörum, 2 með eina tölvu. Þeir eiga að reyna að átta sig á því hvernig punktarnir eru háðir hvor öðrum, hvaða punktar eru fastir, frjálsir og háðir. Þeir komast fljótt að því að einn punktur er fastur (C), einn er hægt að hreyfa (A) en sá þriðji (B) er háður A.

Nemendur eiga að „segja það sem þeir sjá“.

Þegar nemendur reyna að segja hvernig B er háður A byrja þeir yfirleitt á að nota tungumál sem er „hversdagslegt“ eða „ónákvæmt“. Dæmi um það sem nemendur hafa sagt um þetta eru:

> „Hann er alltaf á milli.“
>
> „Blái fylgir rauða.“
>
> „Blái færist eins en hraðar.“
>
> „Ef ég skrifa nafnið mitt með honum þá gerir B það líka.“

Venslin milli punktanna eru *sýnileg* og það er hægt að tjá þau með hversdagslegu máli þó það sé ónákvæmt. Nemendur nota sitt *virka tungumál* (functional language). Þeir *hlutgera* (objectify) með því að benda og nota orð um stað og tímaröð. Einkenni á máli nemenda á þessu stigi er yfirleitt að það verður að *sjá* framsetningarnar til að skilja orðræðuna. Fræðileg stærðfræðileg orðræða (eins og stefnt er að) krefst þess að hægt sé að skilja nákvæmlega hvað um er að ræða, án þess að að styðjast við aðrar framsetningar en þá sem felst í rituðum eða töluðum orðum: myndir eiga ekki að vera nauðsynlegar (þó þær séu oftast hjálplegar). Slíkar framsetningar kallast *táknrænar* (symbolic). Það þýðir að engin nauðsynleg tengsl eru milli framsetningarinnar og fyrirbærisins. Punktaslóðin er **ekki** táknræn: hún er bein afurð forrits og hreyfinga notanda með músinni, og er þar með tengd við „fyrirbærið“ með beinum hætti. Slíkar framsetningar nefnast enactive *íkonískar* (iconic).

Nemendur þurfa að læra að sjá meira en er í „ótúlkaðri“ skynjun á fyrirbærum og að taka eftir einhverju sem þeir tóku ekki eftir áður. Hugtök stærðfræðinnar og táknkerfi hennar gera kleift að lýsa regluleika fyrirbæra af mikilli nákvæmni.

2. Kennari og nemendur vinna saman að því að umbreyta og túlka.

Kennarinn þarf að vera í samræðu við nemendur og hvetja þá til að vera nákvæmari. Þeir eiga svo að skrifa niður lýsingar sínar. Hér eru tvö dæmi gefin af skriflegum svörum nemenda:

> B) Hvernig er punktur B háður punkti A? Skrifið niður allt sem þið sjáið og reynið að vera eins nákvæm og þið getið. Punktur B hreyfist alveg eins og punktur A nema helmingi minna.

Punktur b er háður punkti a og því eltir b punkturinn a.
Línan sem kemur út frá punkti b er helmingi minni en sú lína sem kemur frá punkti a.
Allir punktar hittast á C punkti, hann gæti því verið O.

Þegar nemendur hafa sjálfir unnið saman í pörum og skrifað eitthvað niður fær kennarinn þá til þess að deila hugmyndum sínum með bekknum. Hér getur kennari skrifað uppástungur nemenda á töfluna, beðið þá að útskýra og spurt „en hvað ef“ spurninga, og með spurningum leitt í ljós veikleika eða ónákvæmni.

Til dæmis ef nemandi segir

> „Punkturinn B er alltaf helmingi styttra en A frá C,“

er hægt að teikna annan punkt sem er í helmings fjarlægð frá C en ekki á sömu línunni. Til að leiða nemendur áfram getur kennari bent þeim á að svara spurningum um tiltekna punkta, til dæmis: ef A = (5,3) hver eru þá hnit B?

Kennari getur líka kynnt tiltekið táknmál, hugtök og hugmyndir. Í þessu verkefni er hægt að setja fram nákvæmar lýsingar eins og

> Punkturinn B er alltaf miðpunktur striks milli A og C,

En í samræmi við markmið um að nota hnit og breytistærðir er viðeigandi að kynna rithátt eins og

> Ef $A = (x, y)$ þá er $B = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$,

og í GeoGebru er hægt að skilgreina

> B = (0.5*x(A),0.5*x(B)). Hér táknar x(A) ofanvarp A á x-ás, það er að segja x-hnit A, og á sama hátt er y(A) ofanvarp A á y-ás.

Út frá þessu virðist tilvalið að ræða hvernig hægt er að gefa margföldun hnits og tölu merkingu, því nemendur hafa tilhneigingu til að taka það upp hjá sjálfum sér að túlka hana samkvæmt $a(x, y) = (ax, ay)$ sem er hefðbundin túlkun í vigurreikningi. Og hið sama gildir um samlagningu hnita: $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$.

3. Nemendur vinna úr því sem fram hefur komið, alhæfa og reyna að skrifa hvað þeir hafa lært.

Í framhaldi af þessari umræðu eiga nemendur svo að búa til sitt eigið vinnuskjal í forritinu sjálfu. Líklega þarf að hjálpa þeim með því að leiða þá alveg nákvæmlega gegnum gerð þess, þannig að punktarnir A, B og C komi fram. En þá eiga nemendur sjálfir að geta ályktað sig fram úr því hvernig þeir framleiða fleiri punkta á milli A og B (og hér mætti bæta við fleiri spurningum, búa til punkta milli B og C, eða með öðrum skilyrðum) og þeir eiga að reyna að orða það hvernig þeir geta búið til eins marga punkta og þeir vilja. Þetta er mikilvæg lokaskref því í því þurfa nemendur að alhæfa - sem er það sem stærðfræði gengur að miklu leyti út á. Ein útgáfa af slíkri alhæfingu væri:

> Til að búa til punkta á milli A og B = (0.5*x(A),0.5*y(A)) getum við búið til punkta af gerðinni (k*x(A), k*y(A)) þar sem k er tala á milli 0.5 og 1. Allir punktar þarna á milli eru af þessari gerð.

Að lokum ættu nemendur að skrifa þær reglur og aðferðir sem þeir hafa komist að með þessari verkefnavinnu. Þeir ættu að varðveita þessi svör sín í möppu. Og auðvitað að varðveita líka GeoGebruskjalið sitt sem ætti helst að innihalda skýringar í textareit.

Kvik líkön

Nemendur eiga í þessum hluta að kynnast því hvernig mælistærðir (hér aðallega rúmfræðilegra forma, eins og flatarmál og ummál) geta verið föll af af öðrum stærðum (eins og hliðarlengdum formanna). Þeir sjá beina, gagnvirka, tengingu milli hlutarins og mælistærðarinnar og hvernig hún er sett fram í hnitakerfi, með því að notaðar eru breytistærðir.

Í ljós kemur til dæmis að flatarmál fernings sem fall af hliðarlengd, flatarmál hrings sem fall af geisla, flatarmál jafnhliða rétthyrnds þríhyrnings sem fall af grunnlínu, og flatarmál rétthyrnings með fast ummál, eru allt fleygbogar. Þetta getur þannig sýnt hvernig fleygbogar eru „náttúrulegt“ fyrirbæri sem kemur upp þegar fengist er við flatarmál.

Kennsla: Hornaföll

Hornafallakaflinn miðar að því að nemendur geti sjálfir búið til kvik líkön af hringhreyfingum. Meginatriðið sem nemendur eiga að læra eru:

- Punkturinn $(\cos v\,, \sin v)$ er punktur á einingarhring með stefnuhorn v.
- Stilla má stöðu punktsins $P = (\cos(bv + c), \sin(bv + c))$ og hreyfingu hans á hringnum með því að stjórna breytunum b og c.
- Með því að tengja saman stríkkun, hliðrun og hornaföll er hægt að búa til hvaða hringhreyfingu sem er: $P = (x + a\cos(bv + c), y + b\sin(bv + c))$ er punktur á hringferli með miðju í (x, y) með geisla a sem hreyfist b sinnum hraðar en breytistærðin v og upphaflegt stefnuhorn er c.
- Hér er ekki mikið rætt um mælieiningar horna. Hægt er að nota gráður eða bogamál (radíana).

Meira um föll og breytistærðir

Um fallahugtakið er hægt að hugsa frá mismunandi hliðum, og nemendur ættu að kynnast þeim öllum:

- Sem vörpun: Fall sem tiltekin gerð af venslum milli staka í tveimur mengjum. (Þetta er „statískt" sjónarhorn, sérhvert stak í formengi er venslað nákvæmlega einu staki í bakmengi. Þetta er sjónarhorn er að baki flestum skilgreiningum sem sjá má í kennslubókum.)

- Sem kvik vensl milli breytistærða: Við hugsum okkur að ein stærð „breytist" (óháð breyta) og að þar með „breytist" önnur stærð (háð breyta, fallgildi). Mjög algengt er að hugsa á þennan hátt í ýmsum vísindum (og hversdagslega) um það hvernig ein stærð er háð annarri.

- Sem hlutur: Við hugsum um hvert fall sem ákveðinn hlut sem við getum lýst (með stærðfræðilegum hugtökum) og reiknað með (sett saman við önnur föll með einhverjum aðgerðum, svo sem samlagningu, samskeytingu, deildun, heildun og svo framvegis.)

Til að útskýra þetta getum við tekið dæmi um raunfall sem margir hafa kynnst í skóla, $f(x) = x^2$. Ef við viljum vera stærðfræðileg verðum við að segja frá því hvaða formengi og bakmengi við höfum í huga, og venja er að taka það stærsta mögulega, sem þýðir að bæði formengið og bakmengið er mengi allra rauntalna, stundum táknað með $\mathbb{R}$.

- Sem vensl milli staka „tengir" fallið tölur saman, og það er hægt að telja upp vensl milli talna, eins og $0 \to 0$, $1 \to 1$, $-1 \to 1$, $2 \to 4$, $3.7 \to 13.69$ og svo framvegis. En það er ekki hægt að telja þau öll, því þau eru óteljanlega mörg. Einnig er hægt að sýna venslin með tvenndum, (0,0), (1,1), (-1,1), (2,4), (3.4, 13.69) og svo framvegis. (Fall má skilgreina sem mengi af tvenndum, svo framarlega að engar tvær ólíkar tvenndir hafi sama stak í fyrra sæti.)

- Sem kvik vensl milli breytistærða hugsum við x sem óháða stærð sem breytist, og hugsum okkur að háða stærðin, x^2, breytist með. Ef x „hækkar" úr 2 upp í 3 þá hækkar x^2 úr 4 í 9. Ef x hækkar úr 2 í 2.01, þá hækkar x^2 úr 4 í 4.0401.

- Sem hlutur lýsir „fallstæðan" $f(x) = x^2$ því hvernig reikna má út hvaða stak í bakmenginu er venslað við gefið stak í formenginu. Með stærðfræðilegum hugtökum og aðferðum má líka draga ýmsar ályktanir um fallið. Til dæmis er það „samhverft" um y-ás, það er „vaxandi" fyrir jákvæðar tölur, „snertill" við feril fallsins í almennum punkti (a, a^2) hefur „hallatölu" sem er jöfn $2a$ og flatarmálið sem afmarkast af ferli fallsins, ásum rétthyrnda hnitakerfisins og lóðréttri línu gegnum a er a^3. Það sem er þó ef til vill stærra atriði í þessu samhengi er að hugsa um fallið sem eitt stak í mengi „margliða“ eða „samfelldra falla“ eða allra raunfalla og hvernig það er hluti af því kerfi.

Algengustu framsetningarhættir á svona föllum eru:

- Fallstæða: $f(x) = x^2$, sem segir „hvernig reikna á út“.
- Gildistafla: einhver stök eru pöruð saman:

x	x^2
0	0
-0.5	0.25
10	100
1000	1000000

Í þessu námsefni er áherslan á kvik vensl milli breytistærða og á að tengja myndræna framsetningu á kvikum fyrirbærum (færanlegir punktar á talnalínu eða í hnitakerfi, eða flatarmyndir eins og rétthyrningar, hringir, og fleira) við framsetningu með stærðfræðitáknum.

Heimildir

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(3), 317–333.

Guðný Helga Gunnarsdóttir & Þórunn Blöndal (2011). Að hugsa saman í stærðfræði: Samtöl sem aðferð til náms. In *Ráðstefnurit netlu - menntakvika 2011.* Menntavísindasvið Háskóla Íslands.

Mercer, N. (2000). *Words and minds: How we use language to think together*. London; New York: Routledge.

Swan, M. (2005). *Improving learning in mathematics: Challenges and strategies.* Sheffield: Teaching and Learning Division, Department for Education and Skills Standards Unit.