ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA INTERPRETANDO SU COMPORTAMIENTO AL VARIAR SUS PARAMETROS

JUAN ALFONSO OAXACA LUNA, MARÍA DEL CARMEN VALDERRAMA BRAVO

Introducción

Uno de los conceptos centrales en el aprendizaje de las matemáticas es el de función. Después de los conocimientos de aritmética y álgebra, la construcción del concepto de función es la base para que posteriormente el alumno pueda comprender otros conceptos matemáticos. La importancia que se le da al tema de funciones no es nueva. Leonardo Euler (siglo XVIII) organizo una de sus obras alrededor de este tema. Desde entonces, se descubrió que las funciones son un pilar de las matemáticas que permite su desarrollo de una manera más integral y profunda. Lo que se puede decir que es nuevo en el tema de funciones es su presentación de manera que se pueda apreciar inmediatamente la vinculación con otras ramas científicas. Las nuevas teorías del aprendizaje han influido notablemente en los nuevos acercamientos con las posibles representaciones en papel, pizarrón, computadora y software matemático ya que son esenciales para la construcción de los conceptos matemáticos.

Las nuevas teorías y la experimentación en educación matemática han puesto de manifiesto la importancia para realizar tareas de conversión de una representación a otra del concepto matemático en cuestión. Una de las dificultades que presenta el alumno es la de interpretar mentalmente el significado de la expresión algebraica a su representación gráfica y aún más difícil si se pide obtener la expresión algebraica a través de su representación gráfica

En esta investigación se enfatizo esencialmente en forma las diferentes representaciones de las funciones y sus correspondientes conversiones de una representación a otra. Para logarlo fue necesario desarrollar en el estudiante la habilidad de la visualización matemática ya que esta tiene que ver con el entendimiento de un enunciado y la puesta en marcha de una actividad. Una de las características de esta visualización es el vínculo entre representaciones para la búsqueda de la solución de un problema de la vida real. Por ejemplo se quiere fabricar un recipiente en forma cilíndrica y nos interesa ponerle marcas para saber el volumen del líquido que puede contener. Suponemos que tenemos un recipiente con base circular y lo estamos llenando con un líquido que sale de un tubo de 5 cm de radio a una velocidad de 2 cm/min, la altura del recipiente es H = 20 cm. ¿Como varía el volumen del líquido en función de su altura?, ¿Cómo varia la altura en función del volumen? etc., y así por el estilo podemos retoma ejemplos cotidianos para construir su tabulación o tabla, gráfica y finalmente el modelo matemático.

La propuesta de enseñanza tiene un acercamiento relativo a la matemática en contexto; además, los aspectos teóricos integrados en la propuesta hacen posible la construcción del concepto de función en forma sólida, de manera que el estudiante podrá desenvolverse con mejores acercamientos a las nociones matemáticas relacionadas con la definición de función. Consideramos que es importante esta línea de investigación dado que a través de ella se promoverá al estudiante de concepciones dinámicas de fenómenos y de los modelos matemáticos asociados a esos fenómenos. Esta posibilidad de interacción dinámica con los ejemplos promoverá en el estudiante la construcción de imágenes mentales dinámicas que posiblemente lo ayudarán a entender mejor un concepto de función.

La modelación depende del comportamiento de los datos, los cuales son llevados a diferentes representaciones, donde la simultaneidad de la medida de cambio y su comportamiento es intrínseca a la gráfica. El comportamiento tendencial de las funciones es intrínseco a la gráfica y genera un conjunto de situaciones que abarca cierto contenido del Cálculo, enmarcado en situaciones globales de variación. Las graficas de las funciones son representaciones privilegiadas de estas situaciones, sin embargo, las representaciones en la perspectiva del comportamiento tendencial de la función también conllevan relaciones analíticas

Marco teórico

Función cuadrática

Definición

Una función cuadrática es aquella que puede escribirse de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

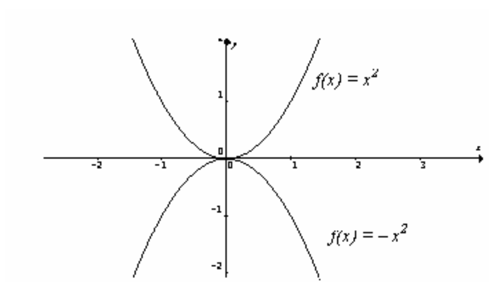
Donde **a**, **b** y **c** son números reales cualesquiera y **a** distinto de cero.

Si representamos "todos" los puntos (x, f(x)) de una función cuadrática, obtenemos siempre una curva llamada ***parábola***.

Como ejemplo, ahí tienes la representación gráfica de dos funciones cuadráticas sencillas:

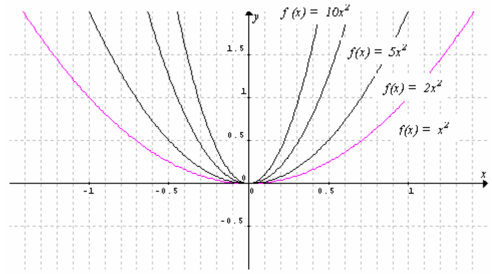
$f(x) = x^2$

$f(x) = -x^2$



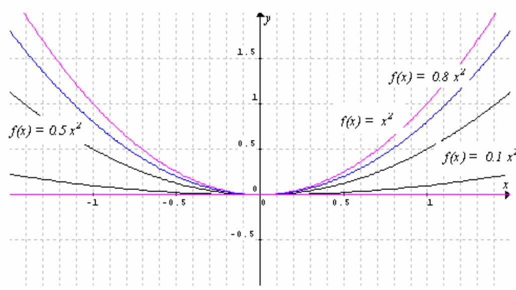
Si al término cuadrático se le asocia un coeficiente "A" donde este es mayor que uno, podemos observar que a medida que este crece el comportamiento de la función es comprimirse positivamente hacia el eje de las ordenadas "y".

f(x) = Ax^2 si A>1



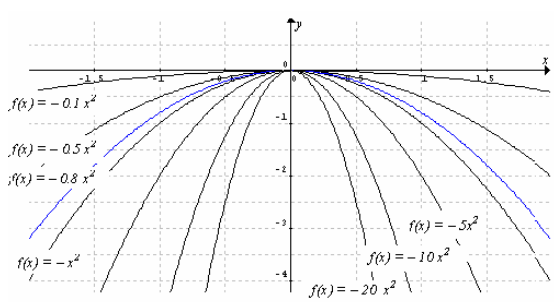
Si ahora al término cuadrático se le asocia un coeficiente "A" donde este es mayor que cero pero menor que uno, podemos observar que a medida que este se hace más pequeño el comportamiento de la función se expande hacia el eje de las absisas "x".

f(x) = Ax^2 si $0 < A < 1$



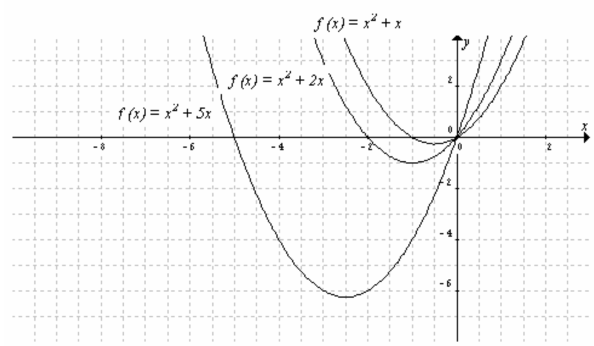
Si al término cuadrático se le asocia un coeficiente "A" donde este es menor que cero, podemos observar que a medida que este se hace mas pequeño el comportamiento de la función se comprime negativamente hacia el eje de las ordenadas negativo "– y".

f(x) = Ax^2 si $A < 0$

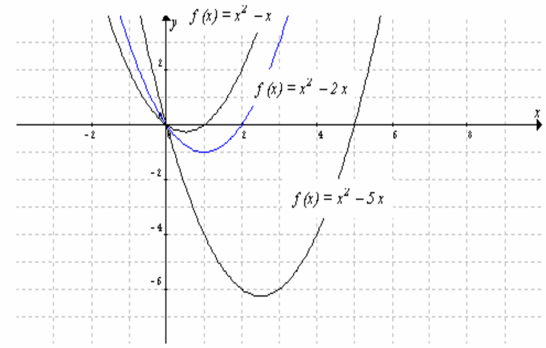


Hasta ahora hemos observado como es el comportamiento de la función cuadrática con un término cuadrático, pero que ocurre si además posee un termino lineal, ahora su forma será: $f(x) = Ax^2 + Bx$, si el coeficiente del término cuadrático A>0 la parábola es cóncava hacia arriba y posee un mínimo, pero si A< 0, entonces la parábola es cóncava hacia abajo y posee un máximo, pero observemos como se comporta la función al agregar el término lineal.

Cuando B > 0

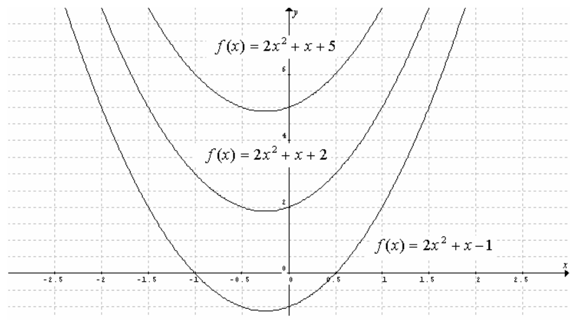


Cuando B < 0



De las gráficas se observa que cuando B > 0, el desplazamiento de las parábolas es a la izquierda, y cuando el valor de B < 0 el desplazamiento es a la derecha, en ambas situaciones a medida que el valor absoluto de B aumenta la ordenada del vértice de la parábola se hace más negativa. En los dos casos las parábolas coinciden en el origen.

Ahora se analizara el comportamiento de la función cuadrática cuando el término independiente se ve modificado, manteniendo constantes los valores de *A* y *B*, por lo que la forma de la función es: $f(x) = Ax^2 + Bx,+C$.



En la gráfica se observa que el desplazamiento de las parábolas es vertical, es decir la ordenada del vértice se hace más positiva si $C > 0$ y es más negativa si $C < 0$; conservando las características del efecto que proporciona el término cuadrático y el término lineal

Intersección de la parábola con los ejes

Toda función cuadrática $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, representa una parábola tal que:

Su forma depende exclusivamente del coeficiente **a** de x^2.

Los coeficientes **b** y **c** trasladan la parábola a izquierda, derecha, arriba o abajo.

Si $\mathbf{a > 0}$, las ramas van hacia arriba y si $\mathbf{a < 0}$, hacia abajo.

Cuanto más grande sea el valor absoluto de **a**, más cerrada es la parábola.

Existe un único punto de corte con el eje "y", que es el **(0,c)**

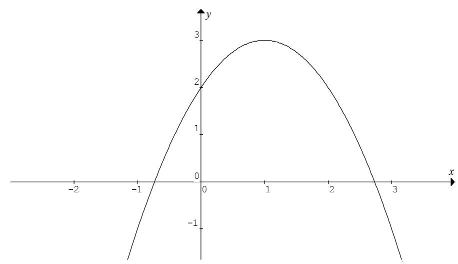
Los cortes con el eje "x" se obtienen resolviendo la ecuación $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, pudiendo ocurrir que lo corte en dos puntos, en uno o en ninguno.

Intersección con el eje "y": Como todos los puntos de este eje tienen la abscisa x=0, el punto de corte de la parábola con el eje "y" tendrá de coordenadas **(0,c)**

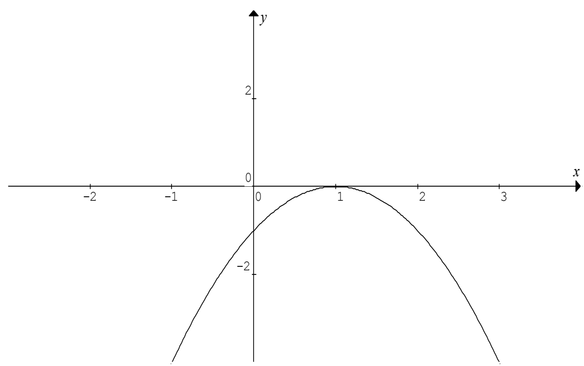
Intersección con el eje "x": Como todos los puntos del eje "x" tienen la ordenada y= 0, para ver estos puntos de corte se resuelve la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$.

Dependiendo del valor del **discriminante (D)** de la ecuación, se pueden presentar tres situaciones distintas:

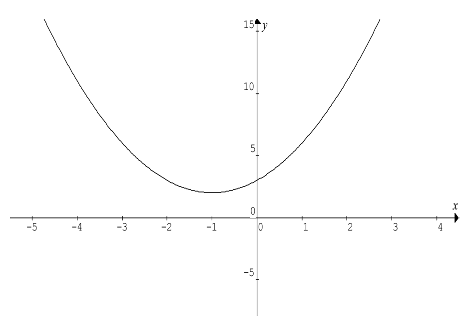
Si **D > 0**, donde **D** = $b^2 - 4ac$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas y **la parábola cortará al eje "x" en dos puntos**.



Si **D = 0**, donde **D** = $b^2 - 4ac$, la ecuación tiene una solución real y, por tanto, **la parábola cortará al eje "x" en un punto** (que será el vértice).



Si **D < 0**, donde **D** = $b^2 - 4ac$, la ecuación no tiene soluciones reales y no corta al eje x, Por lo que la parábola puede abrir hacia arriba o hacia abajo, pero sobre el eje "x" o por abajo del eje "x", según sea el caso



Ceros de la función cuadrática

También llamados "raíces", representa los valores de "x" cuya imagen tiene valor cero, (x,0). Al ser cuadrática sólo se obtiene, como máximo dos valores, denominados x_1 y x_2.

Estos valores (raíces) pueden utilizarse para expresar la función cuadrática en forma de producto de factores: $f_{(x)} = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$

Para calcular los ceros de la función cuadrática Se aplica la fórmula general ya conocida.

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como una de las características de la parábola es que esta es simétrica con respecto al eje focal, entonces la abscisa del vértice corresponderá al punto medio entre ambos valores de la abscisa, esto es:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Sustituyendo valores

$$x_m = \frac{\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}{2}$$

Simplificando

$$x_m = \frac{-2b}{4a}$$

$$x_m = \frac{-b}{2a}$$

Sustituyendo este valor en la función original

$y = ax^2 + bx + c$

$$y_m = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

Desarrollando

$$y_m = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

Simplificando

$$y_m = \frac{ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c}{4a^2}$$

$$y_m = \frac{-ab^2 + 4a^2c}{4a^2}$$

$$y_m = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Entonces las coordenadas del vértice son:

$V(x_m, y_m)$ que les corresponde $\mathrm{V}\left(\frac{\text{- b}}{\text{2a}}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

El cual se localizara como un punto máximo cuando la parábola abre hacia abajo, es decir cuando el coeficiente del término cuadrático sea negativo y cuando este sea positivo la parábola abre hacia arriba y le corresponde un mínimo.

Graficar una función de segundo grado

Para graficar una función cuadrática se debe tener por lo menos tres puntos, "las raíces" y el vértice.

Grafiquemos $f_{(x)} = x^2 + 5x - 6$

La ordenada al origen es - 6, por lo tanto sabemos que el punto (0, - 6) pertenece a la función.

Hallemos el vértice de la parábola:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{b}{2a} \Rightarrow v_x = -\frac{5}{2} \\ v_y &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} \Rightarrow v_y = -\frac{49}{4} \end{aligned}\right\}\text{vértice}: (-2{,}5; -12{,}25)$$

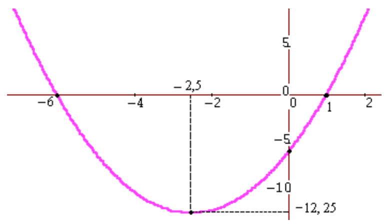
Ahora las raíces:

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituyendo valores

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - (4)(1)(6)}}{(2)(!)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+7}{2} \Rightarrow x_1 = 1, \text{ se obtiene el punto } (1,0) \\ x_2 = \dfrac{-5-7}{2} \Rightarrow x_2 = -6, \textit{se obtiene el punto}(-6,0) \end{cases}$$

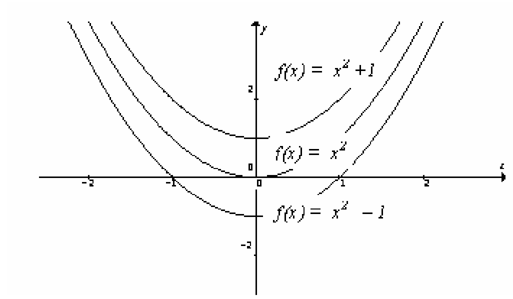
Con estos tres puntos podemos trazar la parábola:



Si queremos graficar la ecuación $y = x^2$ tiene como dominio todos los números reales y como rango el conjunto de los números reales positivos incluido el cero. El valor mínimo (en la imagen) de esta función será para x = 0, obteniendo el punto (0, 0), al que denominaremos vértice de la parábola.

Para $f_{(x)} = x^2$ tenemos que el: $\mathbf{D}_{f(x)}$: R mientras que el $\mathbf{R}_{f(x)}$: [0, + ∞) y el vértice (0, 0).

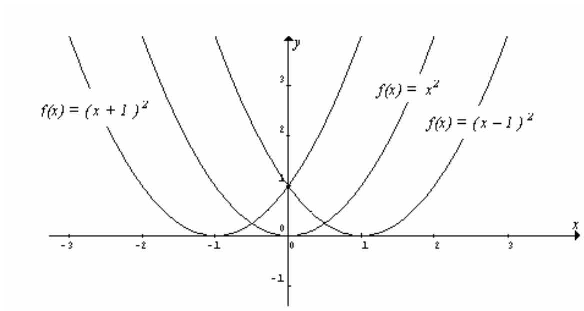
Si sumamos a la ecuación cuadrática (x^2) una unidad, o sea, "x^2 + 1", la imagen se desplaza "uno" hacia arriba, de manera que el intervalo queda definido desde [1, + ∞). Si restamos a la ecuación cuadrática (x^2) una unidad, o sea, "x^2 − 1" la imagen se desplaza "uno" hacia abajo, de manera que el intervalo queda definido desde [−1, + ∞). En ambos casos este intervalo es el rango de la función $\mathbf{R}_{f(x)}$



En si, el agregar una constante a la función $f(x) = x^2$ consiste en desplazarla a la gráfica de la función verticalmente de acuerdo al valor de la constante. Es decir, ahora la forma de la función será f(x) $x^2 \pm C$

Podemos preguntarnos ahora ¿qué sucedería si eleváramos un binomio (dos términos con letras y números) al cuadrado?. Por ejemplo $f(x) = (x + 1)^2$. Como no sumamos "ningún número al cuadrado" la función no se desplaza en el eje de las "y", por lo tanto la segunda coordenada del vértice sigue siendo cero. Con respecto a la primer coordenada, para x^2 era "0", ese valor lo obtendremos si $x = 1$, de esa manera la parábola se desplaza "uno" hacia la izquierda.

Otro ejemplo, $f(x) = (x - 1)^2$. Por la misma justificación, la parábola se desplaza "uno" a la derecha, esto es gráficamente tendremos:

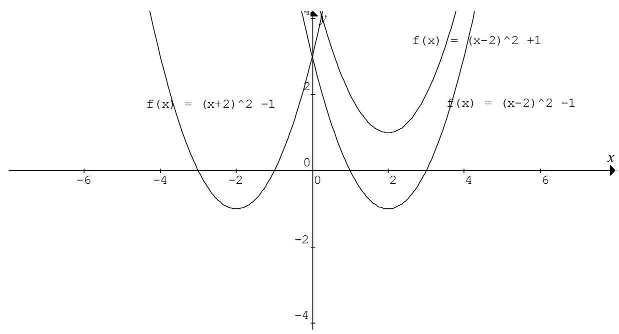


De lo anterior podemos concluir que si a una función cuadrática, a la variable independiente se le agrega o disminuye una constante, el valor de la constante indica un desplazamiento horizontal de la función pero en sentido opuesto, entonces la función tendrá la forma $f(x) = (x \pm C)^2$.

Por otra parte si a la función $f(x) = (x \pm C)^2$, le agregamos una nueva constante, entonces la función $f(x) = x^2$, tendrá un desplazamiento horizontal de acuerdo al valor de "C" y un desplazamiento vertical que depende del valor de "K", por lo que la nueva función será:

$f(x) = (x \pm C)^2 + K$

Su gráfica correspondiente es:



Conclusiones:

- Los profesores debemos ayudar a nuestros alumnos a desarrollar las formas de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético para que ellos puedan transitar en ambas formas..
- El profesor en el aula induce a los alumnos a conocer las formas de solución de la ecuación cuadrática, pero se olvida de instruirlos en sus representaciones

geométricas para obtener su ecuación a partir de su gráfica y aún más difícil obtener la ecuación a partir de su representación gráfica interpretando las características de cada parámetro.

- En este mismo sentido están diseñados los libros de texto, inclinándose por el pensamiento analítico- aritmético. o únicamente dan una introducción a sus representaciones de situaciones gráficas y continúan resolviendo los problemas en forma algorítmica provocando que el alumno memorice o mecanice los métodos.

Bibliografía

Albert A. y Farfan,, R.(1997), *Resolución gráfica de desigualdades*. Segunda edición, México: Grupo Editorial Ibero América

Cordero, F. (1998). *El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis del comportamiento tendencial de las funciones. Revista* Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.

Cordero, F. y Solis,M. (1999). *Comportamientos gráficos en la visualización de las ecuaciones diferenciales lineales*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.

Cordero, F. y Solis,M. (1997). Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo . Serie de cuadernos de didáctica, México. Grupo Editorial Ibero América.

Hill, F. (2002). Funciones en Contexto, México. Prentice Holl

Kerlinger, F. (1990), *Investigación del comportamiento*, México : Mc Graw Hill.

Martínez, M. (1999). Estudio de las relaciones que el estudiante hace para construir la gráfica de la derivada y la primitiva, efectos en la enseñanza en la transformación de funciones. Tesis de Maestría UAH, México

Schoaf, P. (1997), Álgebra un enfoque moderno, México, Reverte Ediciones S.A. de C.V.