Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Δέσποινα Πόταρη

Αναφορές που χρησιμοποιήθηκαν

- Elia, I. & Spyrou, P. (2006). How students conceive function: A triarchic conceptual-semiotic model of the understanding of a complex construct. The Montana Mathematics Enthousiast, 3(2), 256-272.
- Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function- A case study. Educational Studies in Mathematics, 53, 229-254.
- Verikios, P., Farmaki, V. (2006). Introducing algebraic thinking to 13 year-old students: The case of the inequality. Proc. of PME 30, Prague, Czech Republic, V, 321-328.
- Tall. D. (1997). Functions and Calculus. In A.J. Bishop et al. (eds.) International Handbook of Mathematics Education , 289-325.
- Κείσογλου & Σπύρου, Η συνάρτηση ως διαμεσολαβημένη εκτίμηση. Μία διδακτική αξιοποίηση της έννοιας.

Επιστημολογική – ιστορική διάσταση της έννοιας

- Πρώιμες μορφές συναρτησιακών συσχετισμών υπάρχουν στην αρχαιότητα αλλά όχι η ύπαρξη ενός ορισμού
- Από τα τέλη του 17ου αιώνα δημιουργείται ο Απειροστικός Λογισμός (η μελέτη της κίνησης) και εμφανίζονται ορισμοί της συνάρτησης (Bernoulli, Euler, Cauchy)
- Οι παραπάνω ορισμοί βλέπουν συμμετρικά εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή, την έννοια της χρονικότητας από τη μεταβλητή
- Από την αρχή της εμφάνισης της έννοιας η συνάρτηση συνδέεται με τη γραφική της παράσταση

- Ο Dirichlet (1837) “Η μεταβλητή ψ είναι συνάρτηση της μεταβλητής χ η οποία ορίζεται στο διάστημα α <χ<β αν σε κάθε τιμή της μεταβλητής χ από αυτό το διάστημα αντιστοιχεί μια μόνη τιμή της μεταβλητής ψ ανεξάρτητα από τη μορφή της αντιστοιχίας»
  - Διατηρείται ο όρος μεταβλητή αλλά έχει τη θέση νοητής επιλογής ενός πραγματικού αριθμού
  - Εμπεριέχει το συσχετισμό της μορφής πολλά – ένα

- Η συνάρτηση είναι μια ειδική σχέση που προσφέρεται στους υπολογισμούς
  - εκτιμούμε ένα μέγεθος ψ το οποίο ανάγεται στην εκτίμηση ενός μεγέθους χ μέσω μιας σχέσης. Το χ μας είναι άμεσα προσπελάσιμο
  - Μια μέτρηση ενός μεγέθους έχει πάντα μια τιμή
  - η συνάρτηση είναι ένα εργαλείο

- Σύγχρονος ορισμός της συνάρτησης δίνεται από τον Hausdorff (1914) ο οποίος δίνει τον ορισμό του διατεταγμένου ζεύγους
- Η συνάρτηση ως τυπική μαθηματική έννοια ολοκληρώθηκε σχετικώς πρόσφατα.

Διδακτική διάσταση της έννοιας

- Δυσκολίες των μαθητών σχετικά με την έννοια της συνάρτησης
  - Ορισμός – γραφική παράσταση, μεταβλητή, συντεταγμένες
  - Δομική αντιμετώπιση (ως αντικείμενο) – Λειτουργική αντιμετώπιση (ως διαδικασία)
  - Αντικείμενο: ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών
  - Διαδικασία: Μέθοδος για να μεταφέρομαι από ένα σύστημα σε ένα άλλο (π.χ να βρω την τιμή)

- Ο συμβολισμός της συνάρτησης προκαλεί δυσκολίες
  - f(x) αναπαριστά το όνομα της συνάρτησης και την τιμή της συνάρτησης
  - Η ερμηνεία εξαρτάται από το πλαίσιο άρα αυτό προκαλεί δυσκολίες
- Η έννοια της συνάρτησης περιλαμβάνει διάφορες εννοιακές εικόνες (concept images) (procept (process – concept), symbol)

Η συνάρτηση ως μεταβολή

- Αναπαραστάσεις
  - (Οπτικο-χωρική) – Έννοια της μεταβολής
    - Παρατήρηση - Πειραματισμός
    - Απόσταση – ταχύτητα σε σχέση με το χρόνο
    - Επίλυση προβλήματος
  - Αριθμητική (Ποσοτικοποίηση)
    - Εκτίμηση – Προσέγγιση
    - Αριθμητικές τιμές
    - Αριθμητικές λύσεις εξισώσεων

Νοητικές διαδικασίες σχετικά με τη συνάρτηση

- Συμβολική
  - Υπολογισμοί
  - Αλγεβρικά σύμβολα
  - Συμβολική επίλυση εξισώσεων
- Γραφική
  - Οπτικοποίηση –ερμηνεία
  - Γραφικές παραστάσεις
  - Γραφική επίλυση εξισώσεων
- Τυπική
  - Ορισμός – συμπεράσματα
  - Συνολοθεωρητικός ορισμός
  - Θεώρημα ενδιαμέσου τιμής, αντίστροφης συνάρτησης

Αντιλήψεις μαθητών για τη συνάρτηση

- Εικόνες συναρτήσεων «κανονικές» «αύξουσες» δεν αναγνωρίζουν ως συναρτήσεις μη οικείες γραφικές παραστάσεις
- Πόσες διαφορετικές συναρτήσεις μπορείτε να σχεδιάσετε ώστε να διέρχονται από δύο σημεία; Κυρίως σχεδιάζουν μόνο ευθεία
- Η ψ = 4 θεωρείται ότι δεν είναι συνάρτηση
- Η συνάρτηση έχει μόνο ένα τύπο
- Η συνάρτηση έχει «συνεχείς» ιδιότητες (π.χ η συνάρτηση του τέταρτου του κύκλου δεν αναγνωρίζεται ως συνάρτηση γιατί συνεχίζεται και φτιάχνει ένα κύκλο

Παράδειγμα απάντησης μιας μαθήτριας 16 χρονών αναφορικά με την έννοια της συνάρτησης

- «Δώσε ένα παράδειγμα συνάρτησης τέτοιο ώστε για κάθε πραγματικούς αριθμούς x, y στο πεδίο ορισμού στης f ισχύει η παρακάτω εξίσωση $f(x+y) = f(x) + f(y)$»
  - Ξεκινά η μαθήτρια ψάχνοντας για συγκεκριμένες τιμές των x, y.
  - Στη συνέχεια κατανοεί ότι το πρόβλημα ζητά να δώσει ένα τύπο συνάρτησης
  - Δίνει ως παράδειγμα $f(x)= x^2 -2x +3$ και $f(x)= x^2 +5$

- Στη συνέχεια πειραματίζεται με γραμμικές συναρτήσεις, βρίσκει την $f(x) = 2x$
- Η ερευνήτρια της ζητά άλλες συναρτήσεις
- Καταλήγει στην $f(x) = 0$
- Στη συζήτηση εμφανίζεται το τι είναι συνάρτηση
  - Σύμβολο: Δυσκολεύεται να δει το σύμβολο f ως την ίδια συνάρτηση που ορίζεται από την εξίσωση
  - Διαδικασία: Η συνάρτηση είναι ένας τύπος που μας οδηγεί στο να σχεδιάσουμε μια παραβολή ή κάτι τέτοιο
  - Έννοια: Αλλά η συνάρτηση είναι μόνο ένας τύπος;

Ανάλυση της σκέψης της

- Ερμηνεία της λέξης «παράδειγμα»
  - Θέλει κάτι συγκεκριμένο αρχικά (ψάχνει για αριθμούς που να ικανοποιούν τη σχέση π.χ 3 και 5)
  - Διαβάζει τη σχέση f(3+5) = f(3) + f(5) χωρίς κατανόηση (μόνο συμβολικά)
  - Βλέπει f(3) ως μια «ρίζα της συνάρτησης»

- Συνδέσεις που έγιναν μέσα από την λέξη «εξίσωση»
  - Βλέπει ένα πρόβλημα να είναι εξίσωση ενώ περιέχει το σύμβολο f
  - Αναγνωρίζει ως διαφορετικές συναρτήσεις την f(x) και f(y), φτιάχνει τη σχέση

    $f(x+y) = (x^2 - 2x + 3) + (x^2 + 5)$
  - Θεωρεί ότι ο τύπος μιας συνάρτησης είναι εξίσωση (ολιστική αντιμετώπιση του τύπου)

Συνδέσεις που γίνονται από τα σύμβολα f, f(x) και f(y)

- Το σύμβολο f συμβολίζει την αρχή μιας σκέψης ή ενός προβλήματος
- Το σύμβολο f συμβολίζει την αρχή του τύπου μιας συνάρτησης
- Το σύμβολο f παριστάνει μια συνάρτηση
- Το σύμβολο δεν έχει περιεχόμενο
- Ο τύπος μιας συνάρτησης αποτελείται από δύο μέρη (αριστερό – δεξιό) αποσπασματική κατανόηση του τύπου μιας συνάρτησης

- f(x), f(y), f(x+y), f(b) είναι διαφορετικοί τύποι
  - f(y)= x^2 +5 μπορεί να γίνει f(b)= x^2 +5 (τα y, b) δεν έχουν κάποια σχέση με τη μεταβλητή
  - Το b δεν σημαίνει τίποτα αν δεν έχουμε γραφική παράσταση
  - Το σύμβολο y συνδέεται με την τεταγμένη ενός σημείου πιθανόν ενός σημείου στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

Συνδέσεις που έγιναν αναφορικά με τη συναρτησιακή εξίσωση

- Το αριστερό τμήμα διαφέρει από το δεξιό
- Σκέφτεται την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού
- Εικονικές ομοιότητες του συμβολισμού
- Το κύριο σημείο είναι η εξίσωση και όχι η συνάρτηση.

Αλλαγές στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης

- Ανακάλυψη ότι το σύμβολο f(y) συνδέεται με το y
  - Πειραματισμός με την τιμή 1 και μετά με το z μετακίνηση από το y στο f(z).
  - Παραμένει να βλέπει τη μεταβλητή ως «θέση»
  - Προσπάθεια να δει ότι f(x) και f(y) αναπαριστούν τιμές της ίδιας συνάρτησης αλλά τα βλέπει ως ανεξάρτητες συναρτήσεις

- Κατανόηση ότι το f(x) είναι μια τιμή της συνάρτησης όταν η μεταβλητή έχει την τιμή x (σε αντιπαράθεση με άλλες συμβολικές αναπαραστάσεις (συνάρτηση g, h))

Τι μας λένε οι παραπάνω διαπιστώσεις για τη διδασκαλία της συνάρτησης

- Οι εικόνες που έχουν οι μαθητές είναι περιορισμένες άρα χρειάζεται ένας εμπλουτισμός εικόνων των μαθητών που συσχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης
- Υπάρχει ανάγκη σύνδεσης των διαφόρων αναπαραστάσεων (ο υπολογιστής ένα χρήσιμο εργαλείο)-Δημιουργία δυναμικών εικόνων
- Ευέλικτη χρήση συμβόλων (η αλλαγή της μεταβλητής συνήθως δημιουργεί για τους μαθητές ένα καινούριο πρόβλημα)

- Φαίνεται φυσικό η έννοια της συνάρτησης να συνδέεται με τη γραφική της αναπαράσταση αλλά οι έρευνες δείχνουν ότι οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν ουσιαστικά τέτοιες αναπαραστάσεις όταν λύνουν προβλήματα.

Παραδείγματα εφαρμογών της έννοιας της συνάρτησης

- Προσπάθεια διδασκαλίας των εξισώσεων και ανισώσεων στο Γυμνάσιο μέσα από συναρτησιακές καταστάσεις (Βερύκιος – Φαρμάκη)

  Π.χ « Όταν χρησιμοποιούμε ταξί πληρώνουμε σημαία 0.80 ευρώ και 0.30 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που κάνουμε

  1) Από τι εξαρτάται το κόστος μιας διαδρομής;
  2) Αν x είναι ο αριθμός των χιλιομέτρων που κάνουμε σε μια διαδρομή και y ο αριθμός που εκφράζει το ποσό σε ευρώ που πληρώνουμε γι' αυτή τη διαδρομή, να εκφράσεις το y ως συνάρτηση του x

3) Συμπλήρωσε τον πίνακα (διαδρομή –κόστος (3 χιλ, 5 χιλ, 8 χιλ.)

4) Κατασκεύασε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

5) Ο Γιώργος και ο φίλος του Κώστας παίρνουν ταξί από την Ομόνοια ο καθένας για το σπίτι του. Ο Γιώργος για τη διαδρομή που κάνει πληρώνει 3,5 ευρώ. Πόσα χιλιόμετρα απέχει το σπίτι του Γιώργου από την Ομόνοια;

6) Ο Κώστας έχει 5 ευρώ. Φθάνοντας στο σπίτι του πληρώνει και παίρνει και ρέστα. Πόσα χιλιόμετρα μπορεί να απέχει το σπίτι του Κώστα από την Ομόνοια;

Παρατηρήσεις σχετικά με το τελευταίο ερώτημα και την έννοια της ανίσωσης

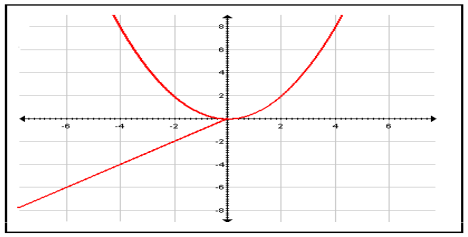
- Το πλαίσιο του προβλήματος καθοριστικό για να εντοπιστεί η εννοιολογική διαφορά ανάμεσα στην εξίσωση και την ανίσωση
- Η ανίσωση έχει πολλές λύσεις ενώ η εξίσωση περιορισμένο αριθμό λύσεων
- Η ομοιότητα στην αλγεβρική επίλυση εξίσωσης και ανίσωσης δημιουργεί παρανοήσεις. (αλλαγές προσήμου χωρίς κατανόηση, διαίρεση με αρνητικό αριθμό χωρίς αλλαγή φοράς)
- Η συναρτησιακή αντιμετώπιση διευκολύνει την κατανόηση

Η συνάρτηση μέσα στην επίλυση προβλήματος

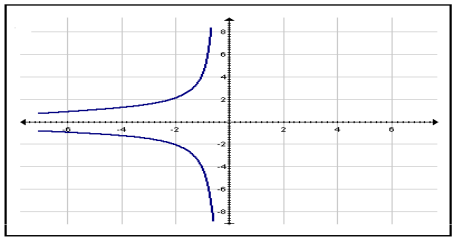
- Έρευνα των Gagatsis, A., Elia, I., Panaoura A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (2006).
  - Διαστάσεις της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης:
    - Επίλυση προβλήματος συνάρτησης
    - Ορθός ορισμός
    - Παραδείγματα συνάρτησης
    - Μετάφραση από μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη και αναγνώριση συναρτήσεων μέσα από γραφικές παραστάσεις

  Σχέσεις ανάμεσα στην επίλυση προβλήματος και τις άλλες τρεις ικανότητες

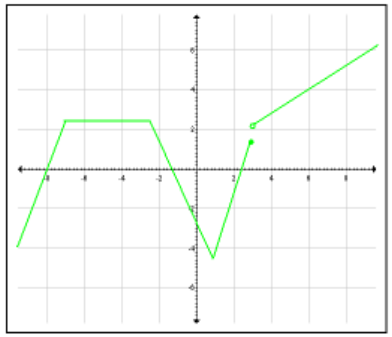
α)



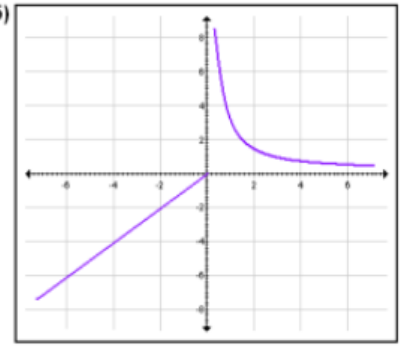
β)



γ)



δ)



Ερωτήματα στους μαθητές (Β και Γ Λυκείου)

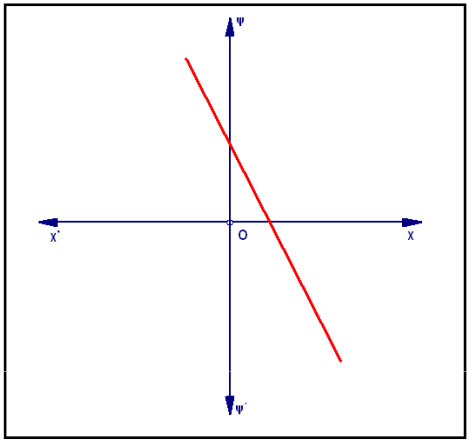
1. Τι είναι συνάρτηση; Δώσε ένα παράδειγμα
2. Να εξετάσεις ποιες από τις παρακάτω καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων

3. Να αντιστοιχίσεις τις αλγεβρικές εκφράσεις της στήλης Α στις λεκτικές εκφράσεις της στήλης Β:

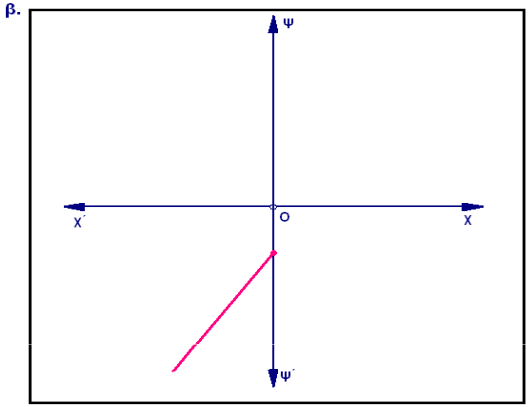
ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. $xy \leq 0$	1) 1ο – 3ο τεταρτημόριο
β. $xy = 0$	2) 1ο – 2ο τεταρτημόριο
γ. $xy>0$	3) άξονας x΄x ή άξονας y΄y
δ. $xy<0, x>0$	4) ημιάξονας Ox ή ημιάξονας Oy
	5) 2ο – 4ο τεταρτημόριο
	6) 2ο – 4ο τεταρτημόριο και οι άξονες x΄x, y΄y
	7) 2ο τεταρτημόριο
	8) 4ο τεταρτημόριο

4. Να επιλέξεις τον αλγεβρικό τύπο της συνάρτησης που αντιστοιχεί στην κάθε γραφική παράσταση:

α.



β.



i) $y + 3x = 0$ iii) $y + 2 = 3x$

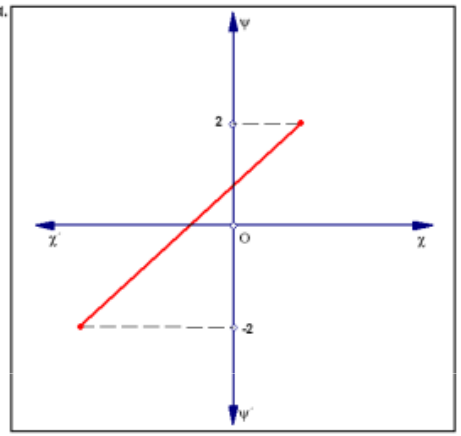
ii) $y = -3x-2$ iv) $y + 3x = 2$

i) $y = -3x, x>0$ iii) $y+3x = -1, x \geq 0$

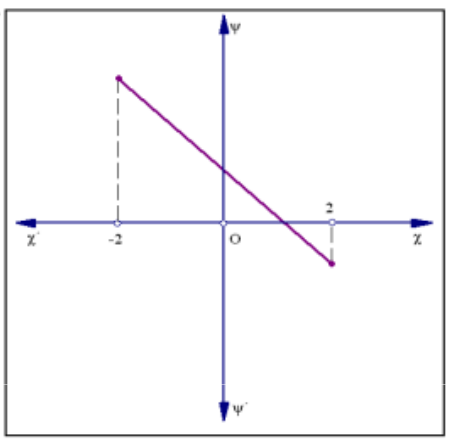
ii) $y-3x = 1, x<0$ iv) $y - 3x = -1, x \leq 0$

5. Σε ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί η αλγεβρική έκφραση $y=-2x+1$, $-2\leq x\leq 2$;

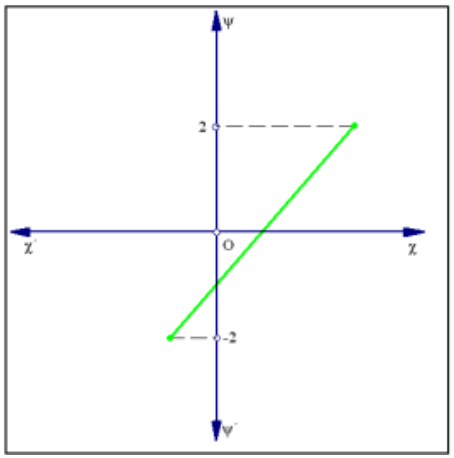
α.



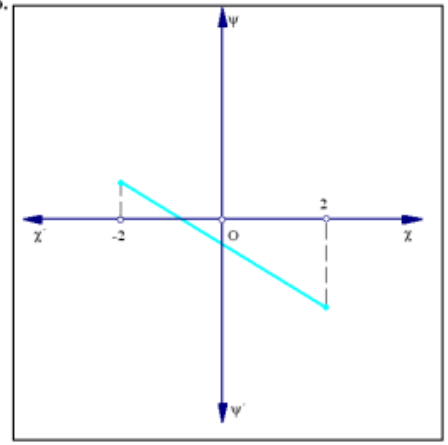
β.



γ.



δ.



6. Βυτιοφόρο με 17.000 lt βενζίνη ανεφοδιάζει πρατήριο βενζίνης που διαθέτει δεξαμενή χωρητικότητας 15.000 lt.

Τη στιγμή της παράδοσης, η δεξαμενή περιέχει 1.000 lt βενζίνης και το βυτιοφόρο αρχίζει να τη γεμίζει με σταθερή παροχή 400 lt ανά λεπτό (γραμμική σχέση).

- α. Να σχεδιάσεις τη γραφική παράσταση που εκφράζει τον όγκο V1 της βενζίνης της δεξαμενής ως συνάρτηση του χρόνου t.
- β. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσεις τη γραφική παράσταση του όγκου V2 της βενζίνης στο βυτιοφόρο ως συνάρτηση του χρόνου t.
- γ. Να βρεις σε πόσο χρόνο θα γεμίσει η δεξαμενή. Πόση βενζίνη περιέχει τότε το βυτιοφόρο;
- δ. Να εκτιμήσεις μετά από πόσο χρόνο η δεξαμενή και το βυτιοφόρο θα περιέχουν τον ίδιο όγκο βενζίνης. Πόση βενζίνη περιέχεται τότε στη δεξαμενή και στο βυτιοφόρο;

Συμπεράσματα

- **Η επίλυση προβλήματος βρίσκεται στον πυρήνα της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης, ενισχύοντας έτσι, την άποψη των Stanic και Kilpatrick (1988), ότι μια κατάσταση προβλήματος είναι κεντρική στη μάθηση των μαθηματικών.**

- Η ανάπτυξη της κατανόησης της συνάρτησης παρέχεται μέσω δύο τουλάχιστον διαφορετικών ιεραρχικά διατεταγμένων επιπέδων:

- Το πιο υψηλό επίπεδο θα μπορούσε να είναι η επιτυχής επίλυση προβλήματος

- Ένα χαμηλότερο επίπεδο θα μπορούσε να περιλάβει μια σύνθεση των διαφορετικών ικανοτήτων που αναφέρονται στις τρεις άλλες διαστάσεις της κατανόησης της συνάρτησης:
- την παροχή ενός ορθού ορισμού,
- την παροχή ενός σωστού παραδείγματος συνάρτησης και
- την ευέλικτη χρήση των διαφόρων αναπαραστάσεων της έννοιας