Teoría – Tema 9

Teoría - 19 - Punto simétrico a un plano

Punto simétrico de un punto respecto a una plano

Sea el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y el plano Π . Deseamos encontrar el punto $P'(x_2, y_2, z_2)$ simétrico a P respecto al plano Π .

La forma de proceder es la siguiente:

1. Obtener ecuación de la recta r que pasa por P y es perpendicular a Π (usando el vector normal del plano).

2. Calcular el punto M como intersección de la recta r con el plano Π . Este punto M se conoce como **proyección ortogonal del punto** P **sobre el plano** Π .

3. Y este punto M será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, de donde podremos obtener las coordenadas del punto P' .

Ejemplo 1 resuelto

Hallar el punto simétrico del punto $A(5,1,0)$ **respecto al plano** $\Pi: 3x-2y+z+1=0$ **.**

El vector normal al plano es $\vec{u_\Pi}=(3,-2,1)$.

Trazamos la recta que pasa por el punto $A(5,1,0)$ y es perpendicular al plano, usando el vector normal obtenido.

$$r:\left\{\begin{matrix} x=5+3\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=\alpha \end{matrix}\right\}$$

Y realizamos la intersección de la recta y el plano. La solución será la proyección ortogonal del punto A sobre el plano.

Para obtener la solución, sustituimos los valores en paramétricas de la recta sobre la ecuación del plano.

$$5(5+3\alpha)-2(1-2\alpha)+\alpha+1=0 \quad \rightarrow \quad \alpha=-1$$

Por lo que nuestro punto proyección ortogonal será:

$$M(2,3,-1)$$

Y este punto proyección ortogonal será el punto medio del segmento $\overline{AA'}$, donde $A'(x,y,z)$ es el punto simétrico que estamos buscando.

$$(2,3,-1)=(\frac{5+x}{2},\frac{1+y}{2},\frac{z}{2}) \quad \rightarrow \quad A'(x,y,z)=(-1,5,-2)$$