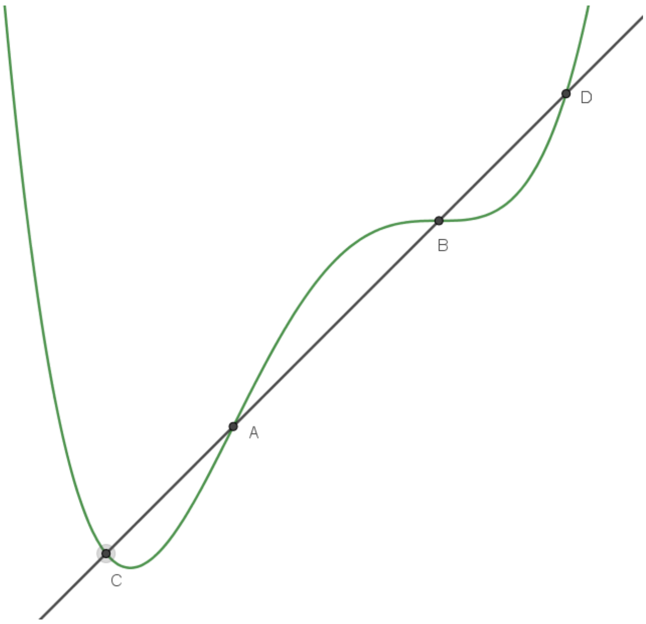
1. NÚMERO INSOSPECHADO

Dada la función $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x + 1$ sigue el procedimiento:

a) Calcula los puntos de inflexión A y B (salen dos)
b) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y B
c) Encuentra los otros puntos en los que la recta del apartado anterior corta a la función f. Los llamas C y D. De esta manera tendrás los puntos A, B, C y D como en la imagen.



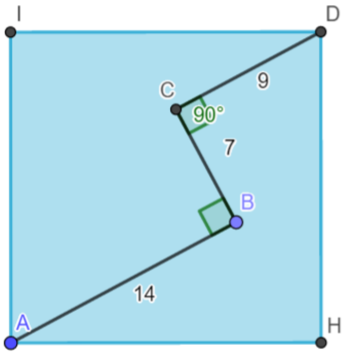
La gráfica no se corresponde con la función que he puesto. Es una gráfica cualquiera de un polinomio de 4º grado con dos puntos de inflexión.
La función f(x) que he puesto facilita los cálculos que hay que hacer.
En la generalización que os pido con GeoGebra saldrán funciones como la del dibujo.

d) Calcula lo que mide CA, AB y BD (no uses aproximaciones decimales) ¿Observas algo?
e) ¿Cuánto vale $\frac{AB}{CA}$? ¿te suena? Si no, busca qué es. ¿Y $\frac{AB}{BD}$
f) ¿Y esto pasa siempre?
Usando Geogebra lo puedes comprobar. Crea una construcción con GeoGebra en la que haya un polinomio de 4º grado con deslizadores en los coeficientes, ($f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+g$), de manera que así se podrá ir variando y comprobando si funciona.

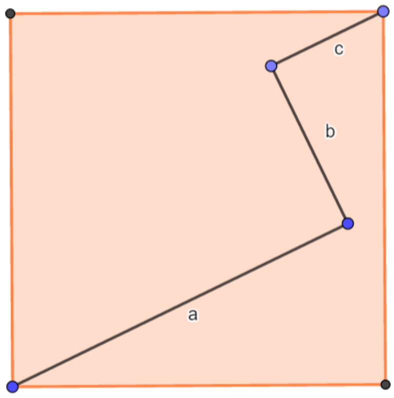
Ayudas:
—PuntoInflexión(polinomio) te da los puntos de inflexión
—TextoIrracional(número) pone la expresión algebraica del número

2: Área del cuadrado

1. Halla el área del cuadrado:



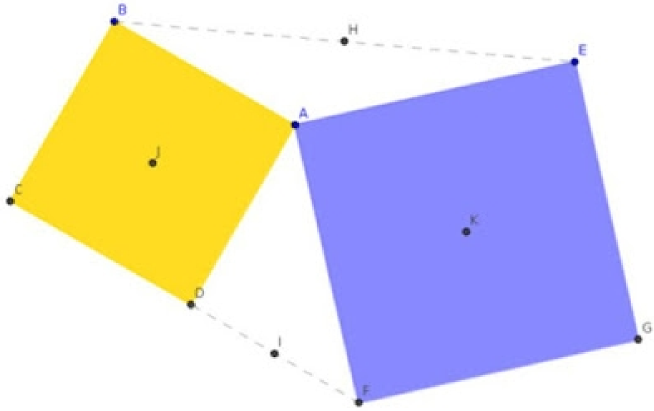
2. Una de las características de las matemáticas, es la búsqueda de la generalización. Así que te propongo que encuentres una fórmula que permita calcular el área del cuadrado conociendo las longitudes de los segmentos, perpendiculares entre ellos, a, b y c.



Realiza una construcción en GeoGebra de este problema, que permita comprobar que la fórmula que has conseguido funciona.

Sugerencia: A la hora de construir, en vez de comenzar con el cuadrado, ve construyendo los segmentos y por último el cuadrado.

3. Teorema de Finsler-Hadwiger



De nuevo Geogebra nos va ayudar a resolver este asunto. En primer lugar vamos a ir a *Vista* y en la opción etiquetado, seleccionar la opción "Solo puntos nuevos" para que la pantalla no se llene de letras.

Con la herramienta *Polígono regular* dibuja un cuadrado. A continuación dibuja otro cuadrado con la misma herramienta de manera que tenga un vértice común con el cuadrado anterior.

Usando la herramienta *Punto medio o Centro* encuentra el centro de cada uno de los cuadrados y el punto medio de los segmentos que unen los vértices como indica la figura.

Con la herramienta *Polígono*, forma el cuadrilátero HKIJ.

Mueve los puntos B, A y E, y observa. ¿Puedes decir algo de ese cuadrilátero?

Con la herramienta *Área*, puedes medir la superficie de esos cuadriláteros.

¿Crees que en alguna posición los tres medirán lo mismo?

Si es que sí, encuéntrala y **explica** cómo habría que ponerlos. Si es que no, intenta dar una explicación.

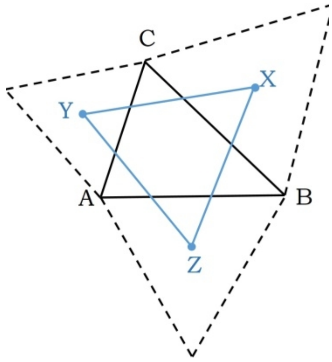
¿Y qué ocurre con el segmento CG?

Mira, observa, prueba… a ver si consigues encontrar alguna particularidad de ese segmento en relación a otros elementos de la construcción.

4. TEOREMA DE NAPOLEÓN

Hay un resultado que se conoce como teorema de Napoleón, que posiblemente no le descubriera él sino su amigo matemático italiano Lorenzo Mascheroni. El teorema dice:

Si sobre los tres lados de un triángulo cualquiera ABC se construyen tres triángulos equiláteros exteriores (respectivamente, interiores), los centros de estos tres triángulos equiláteros forman un nuevo triángulo XYZ, que es equilátero, al que se denomina triángulo exterior (respectivamente, interior) de Napoleón.

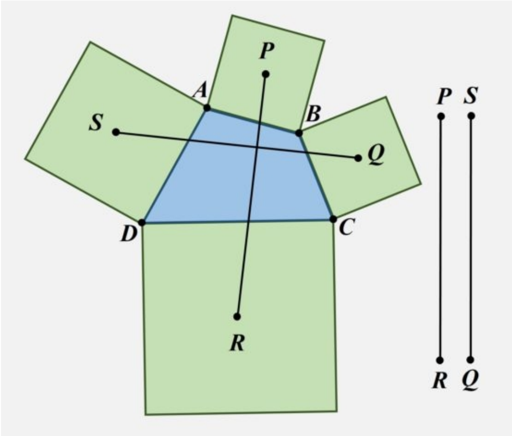


¿Ocurrirá lo mismo si en lugar de construir triángulos sobre los lados, se construyen otros polígonos regulares?
¿Habrá alguna relación entre puntos notables del triángulo original y del construido? Investiga con el baricentro o el circuncentro, por ejemplo

Una propuesta sobre a partir de este teorema en la revista *Suma*:
https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/s84-creogebra.pdf

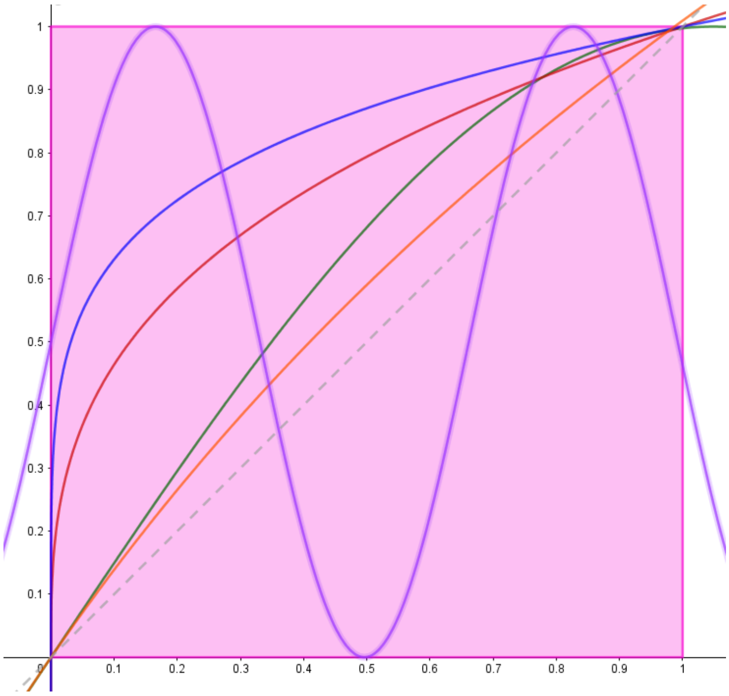
Vamos a aplicar estas mismas ideas artísticas a otro teorema, no menos curioso, el teorema de van Aubel. Este resultado fue publicado por el matemático holandés Henricus (Henri) Hubertus van Aubel (1830-1906) en el artículo de 1878, *Note concernant les centres de carrés construits sur les côtés d'un polygon quelconque* (algo así como «Nota sobre los centros de los cuadrados construidos en los lados de cualquier polígono»).

Teorema de van Aubel: Dado un cuadrilátero cualquiera ABCD, se construye un cuadrado sobre cada uno de los lados del mismo, AB, BC, CD y DA, y se consideran sus centros, P, Q, R y S, respectivamente. Entonces, los segmentos PR y SQ (salvo que P coincida con R, o S con Q) son perpendiculares y de la misma longitud.



5. Funciones de [0,1] en [0,1]

Vamos a desarrollar animaciones del color, buscando tres funciones, una para cada canal de color, (para el rojo, el verde y el azul), en lugar de los tres deslizadores que hemos usado en otras ocasiones.
Así pues, el reto va a consistir en realizar un estudio para encontrar las funciones que os gusten para colorear un cuadrado. Los valores de los canales RGB están entre 0 y 1, eso hace que las funciones no pueden salirse de un cuadrado de lado 1 (Dibújalo). Por ejemplo:



Aunque veais que se salen por la izquierda y la derecha, no lo hacen ni por encima ni por debajo del cuadrado. Eso es lo que han de cumplir.

La propuesta que te hago es la siguiente:

Busca funciones que pasen por (0,0) y (1, 1)
Busca funciones que pasen por (0,1) y (1, 0)
Busca funciones que pasen por (0, 0.5) y (1,0.5)

Para ello vas probando con distintos tipos: polinómicas, radicales, de proporcionalidad inversa, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, mezcla de varias…
Para ver el efecto del color, dale al cuadrado colores dinámicos con esas funciones. Previamente define un deslizador t que vaya de 0 a 1 y en los colores dinámicos pones f(t), g(t), h(t)... los nombres de las funciones que quieras utilizar. Anima el deslizador y verás el efecto de color sobre el cuadrado.

6. Ronda geométrica

Llegados a este desafío, volvamos a la parte creativa de Geogebra. Os voy a enseñar cómo repartir puntos sobre una circunferencia, cómo hacer que el programa dibuje cualquier polígono de manera aleatoria y lo mismo con circunferencias, cómo dar color dinámico a cada objeto y así crear una "ronda geométrica". Vamos a ello.

Paso 1: Crear puntos sobre una circunferencia.

—Dibujar una circunferencia de radio 1. Aunque lo podamos hacer con la herramienta circunferencia, en este caso es mejor escribir su ecuación en la barra de entrada: x^2+y^2=1. Si se ve pequeña en tu pantalla, ajusta el zoom para que te ocupe más pantalla.

—En Geogebra se puede programar una acción para que el programa la repita varias veces (las que se le diga). Esto en programación se llama un bucle. El comando que rige esta acción se llama Secuencia.

> Por ejemplo, si queremos crear 5 circunferencias concéntricas de radios entre 1 y 5, en lugar de crearlas una a una, podemos utilizar la orden:
> Secuencia(Circunferencia((0,0),k),k,1,5)
> GeoGebra entiende que tiene que repetir lo que diga la expresión (en este caso la expresión es Circunferencia((0,0),k)) haciendo que k varíe desde 1 a 5, es decir va a hacer una circunferencia de centro (0,0) y radio 1, luego otra del mismo centro y radio 2, otra de radio 3, otra de radio 4 y otra de radio 5. Si en lugar de 5 pones 10, dibujará 10.
>
> La sintaxis de este comando es:
>
> Secuencia(<Expresión>,<Variable>,<Valor inicial>, <Valor final>, <Incremento>)
>
> En <Expresión> se escribe lo que se quiere obtener: un punto, un polígono, una circunferencia…
> <Variable> es el nombre de la variable que vamos a utilizar para generar la secuencia. Se lo inventa uno. En general se utilizan letras, pero también pueden ser palabras.
> <Valor inicial> para que valor de la variable empieza a generar la expresión
> <Valor final> el valor de la variable en el que termina
> <Incremento> si no se dice nada va de 1 en 1, pero a veces puede interesar de 2 de 2 u otros pasos de incremento.

Lo que queremos es generar una serie de puntos sobre la circunferencia. Para poder cambiar fácilmente el número de puntos, vamos a crear un deslizador que hará de valor final en el comando Secuencia.

- Crea un deslizador *n*, que vaya de 1 hasta 33 (por ejemplo), con incremento 1

Vamos a utilizar coordenadas polares para escribir los puntos. Un punto en coordenadas cartesianas se escribe (2, 3). En polares, si se escribe (2;30º) entiende que es un punto que está a distancia 2 del origen de coordenadas y forma un ángulo de 30º grados con el semieje positivo de las X. Como queremos repartir los puntos sobre la circunferencia, si son 10 puntos cada uno estará a r*360/10 grados del semieje de las X, siendo r la posición del punto (el primero, el segundo, el tercero… así hasta el décimo). En este caso hemos dicho que vamos a generar n puntos, luego habrá que dividir por n. POr tanto la orden quedará:

Secuencia((1;r*360º/n),r,1,n)

Con esto ya están los presos dibujados. Al mover el deslizador n se crearán tantos puntos como indique. Verás que en la ventana algebraica se ha creado un elemento que se llama l1: eso es una lista de objetos, en este caso de los puntos.

—Vamos a crear segmentos, triángulos, cuadriláteros, etc., con vértices en esos puntos. En primer lugar hay que seleccionar los puntos de la lista. Se podrían elegir según un criterio (cada dos o tres…) pero GeoGebra lo puede hacer al azar y eso le da un punto de incertidumbre de lo que va a salir. La forma de elegir un elemento de una lista es:

ElementoAleatorio(<lista>)

Para crear un polígono se utiliza: Polígono(<Punto>, ..., <Punto>)

Si queremos que dibuje un triángulo habrá que dar 3 puntos, cada uno aleatorio. SI se quieren cuadriláteros, 4, etc. Al mover el deslizador *n*, cambiará el polígono. Si se activa la opción Rastro (botón derecho sobre el polígono) se irán quedando conforme cambie n. Pero serán todos del mismo color. Se le puede dar colores dinámicos y así cada uno será de un color distinto.

—Vamos a crear circunferencias. En este caso lo primero que hay que hacer es seleccionar un punto dentro del círculo, en polares. Luego necesitamos el módulo, que ha de ser un valor entre 0 y 1 y el ángulo, un valor entre 0º y 360º.

ang= AleatorioEntre(0,360) te dará el ángulo.

Para conseguir un número entre 0 y 1 habrá que hacer alguna operación más, pues GeoGebra calcula números aleatorios entre 2 dados, pero siempre da enteros como resultado. Así que habrá que buscar un número aleatorio entre 1 y 100, por ejemplo y el resultado dividirlo por 100:

mod= AleatorioEntre(1,100)/100.

Solo falta conseguir un radio, que sea más bien pequeño para que no llene todo el círculo, y que esté ligado al número de puntos, n, para que cuando cambie n, cambie la circunferencia.

radio=¿? (tarea para ti).

Con todos esos elementos la orden: Circunferencia((mod;ang),radio) dibujará una circunferencia que al cambiar n irá cambiando de posición y de tamaño. Asignar colores dinámicos, opacidad y activar el rastro hará que cuando muevas el deslizador se vayan quedando todos los círculos a la vista.

Queda un problema por solucionar: los círculos se salen del círculo de presos. ¿Cómo corregirlo? La zona exterior a la circunferencia original será: x^2+y^2>1. Si pones esa zona en una capa superior y le das un color con opacidad 1, los otros círculos que se salen ya no se verán.

Para limpiar la pantalla CRTL+F te la dejará en blanco.

Ahora ya solo se trata de ir probando, ajustando, modificando colores, tamaños, ocultar los elementos que no sean necesarios, poner distintas velocidades a los deslizadores, etc., para que se pueda conseguir un cuadro original y chulo. Cuando tengas alguno que te gusta, paras la animación y se puede capturar la imagen. Incluso puedes hacer *gifs* animados cuando tengas una animación con los parámetros a tu gusto.