Complexe getallen

Karel Appeltans

10 december 2020

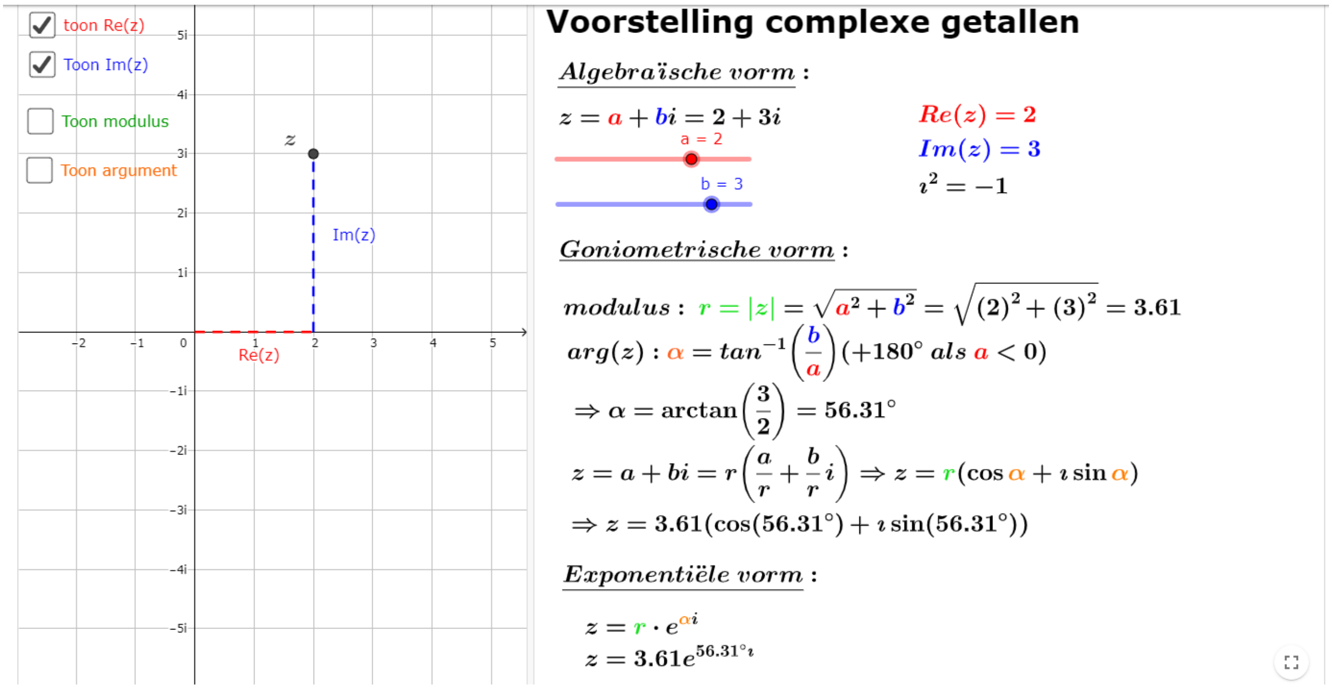
1 Inleiding

In 1545(!) publiceerde Cardano (Italiaans wiskundige) het wiskundeboek 'Ars Magna'. Onder andere volgend vraagstuk werd besproken: Zoek twee getallen waarvan de som 10 is en het product 40. Kan jij ze vinden?

Meer over de oorsprong (en inleiding) van de complexe getallen in volgend filmpje http://www.dimensions-math.org/Dim_regarder_NL.htm (hoofdstuk 5)

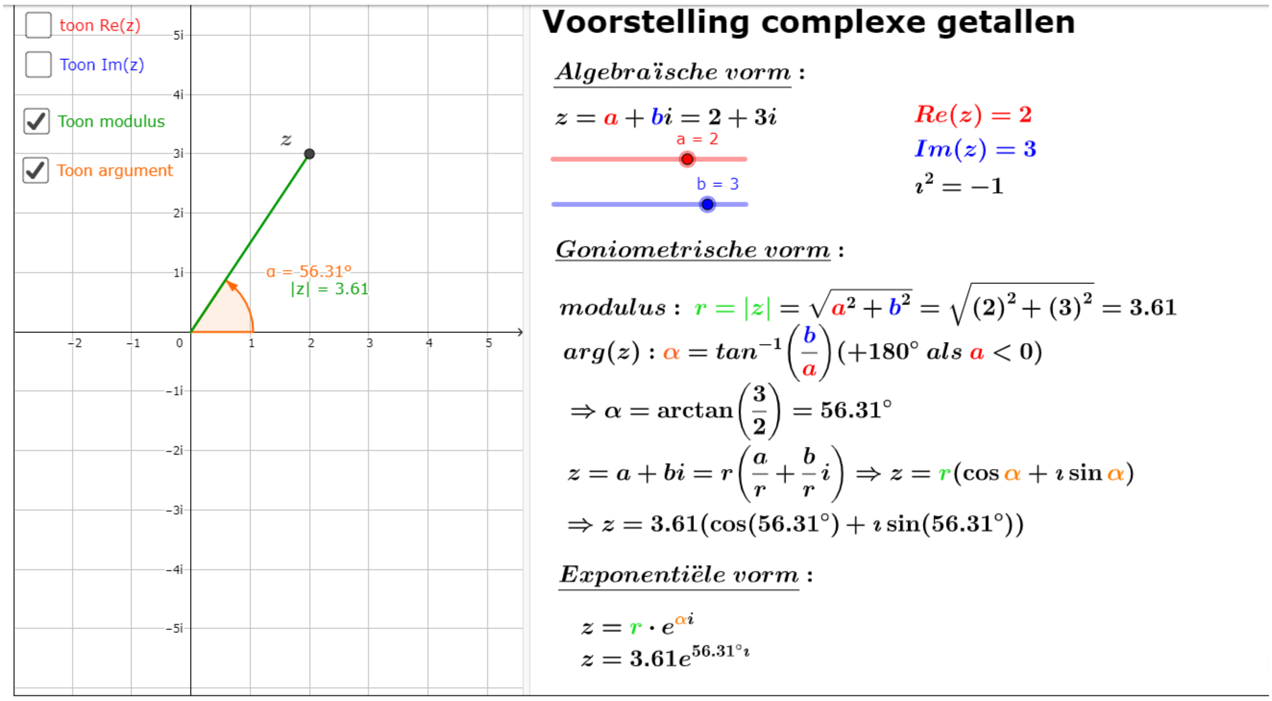
2 Voorstelling complex getal in Argandvlak

2.1 Algebraïsche vorm



Figuur 1: https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3

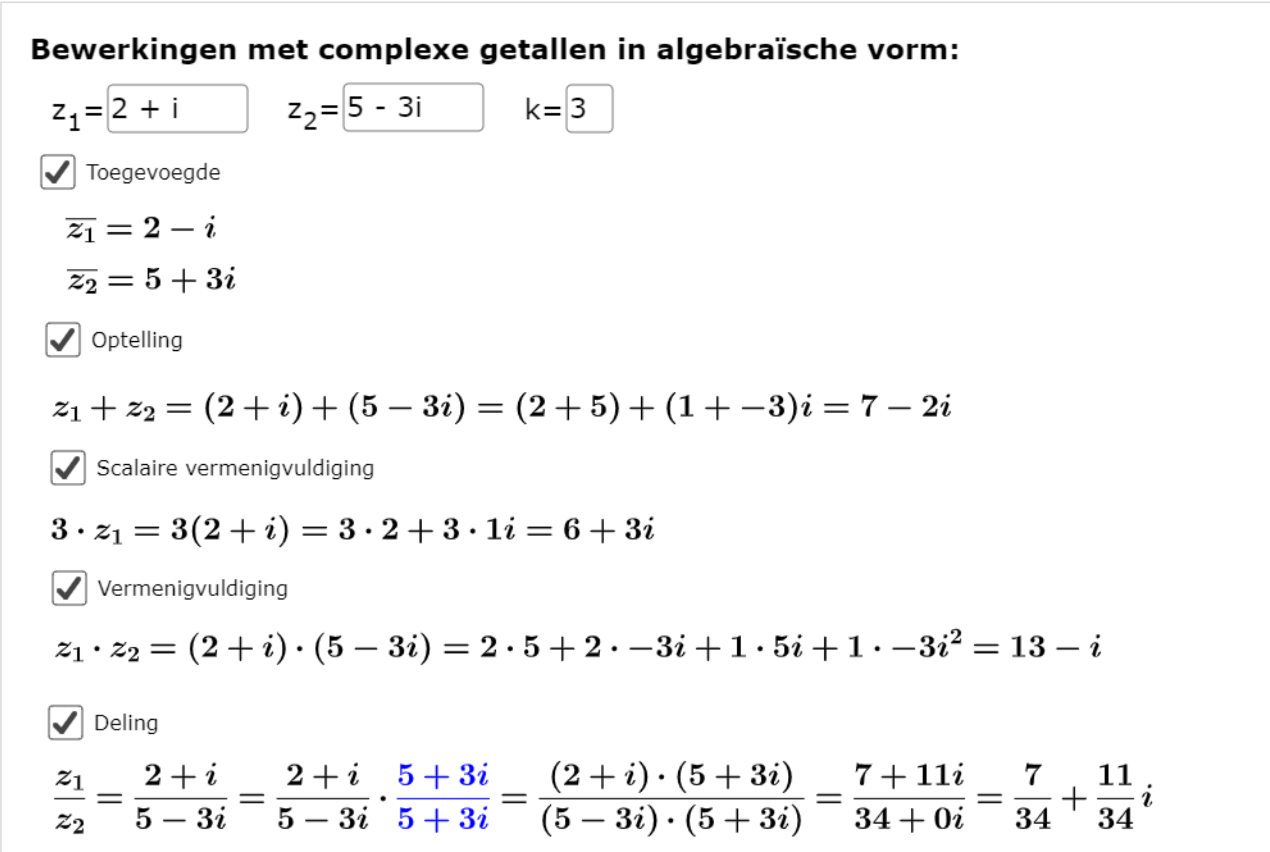
2.2 goniometrische en exponentiële vorm



Figuur 2: https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3

3 Bewerkingen

3.1 algebraïsche vorm



Figuur 3: https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3

3.2 goniometrische en exponentiële vorm

Bewerkingen met complexe getallen in gon/exp vorm:

$z_1 = 2 + 3i = \sqrt{13} \cdot e^{56.31°i}$

$z_2 = -1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{135°i}$

☑ Vermenigvuldiging

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{13}e^{56.31°i} \cdot \sqrt{2}e^{135°i} = (\sqrt{13} \cdot \sqrt{2})e^{(56.31°+135°)i} = \sqrt{26}e^{191.31°i} = -5 - i$$

☑ Machtsverheffing $n = 3$

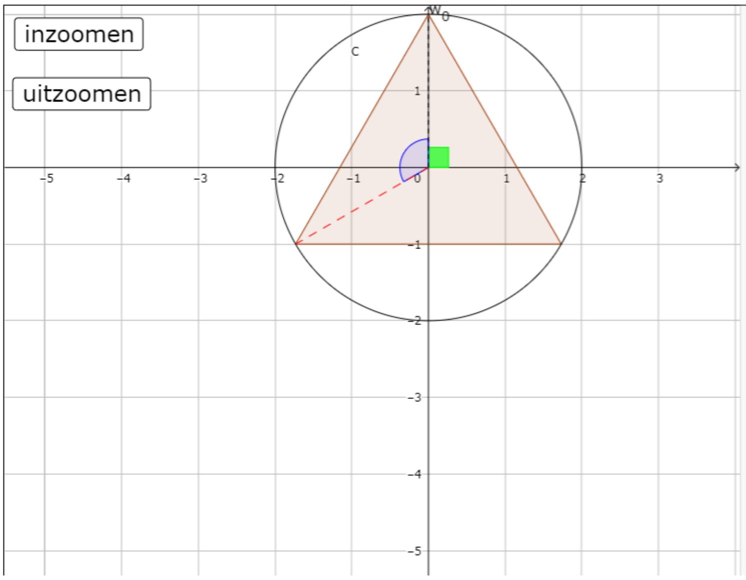
$$z_1^n = (2+3i)^3 = \left(\sqrt{13}e^{56.31°i}\right)^3 = \sqrt{13}^3 e^{3 \cdot 56.31°i} = 13\,\sqrt{13}e^{168.93°i} = -46 + 9\,i$$

☑ Deling

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{13}e^{56.31°i}}{\sqrt{2}e^{135°i}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}e^{(56.31°-135°)i} = \frac{1}{2}\,\sqrt{26}e^{-78.69°i} = \frac{1 - 5\,i}{2}$$

Figuur 4: https://www.geogebra.org/m/G8RuRdV3

3.3 worteltrekking



Worteltrekking uit een complex getal:

$z = 0 - 8i = 8e^{270°i}$

n = 3

Los op $w^3 = 0 - 8i$

Oplossingen:

$w = re^{\alpha i} \Rightarrow \left(re^{\alpha i}\right)^3 = 8e^{270°i}$

$\Leftrightarrow r^3 e^{3\alpha i} = 8e^{270°i}$

$r^3 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2 = 2$

$3\alpha = 270° + k360°\,, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = 90° + k120°\,, k = 0, 1...2$

$w_0 = \;\; 2 \;\; e^{90°i} = \;\; 0 + 2i$

$w_1 = \;\; 2 \;\; e^{210°i} = \;\; -1\,\sqrt{3} - 1i$

$w_2 = \;\; 2 \;\; e^{330°i} = \;\; \sqrt{3} - 1i$

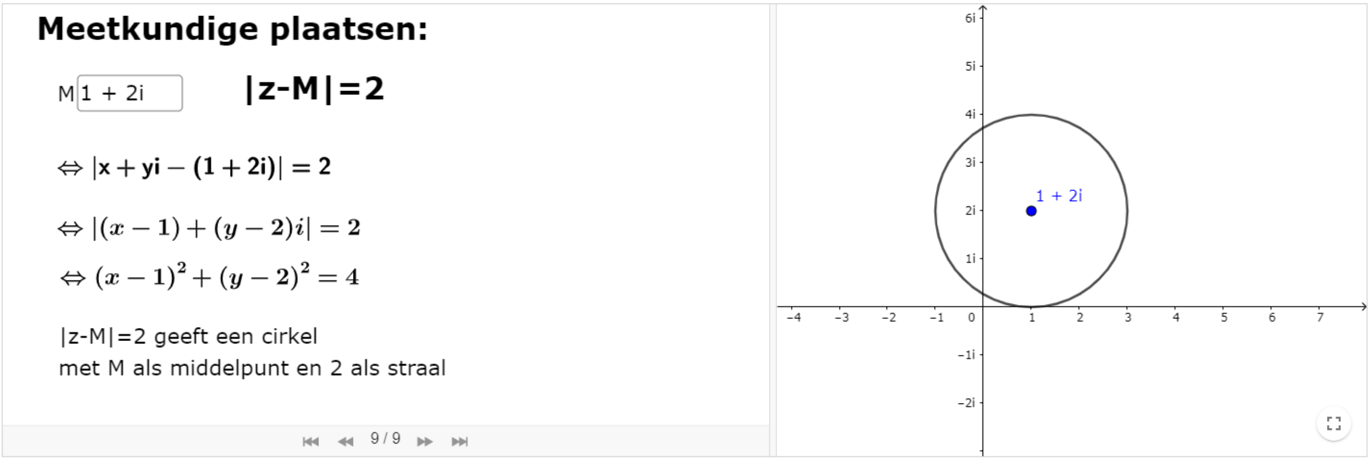
Figuur 5: https://www.geogebra.org/m/a9TNGhWs

4 Veeltermen over C

4.1 reële coëfficiënten

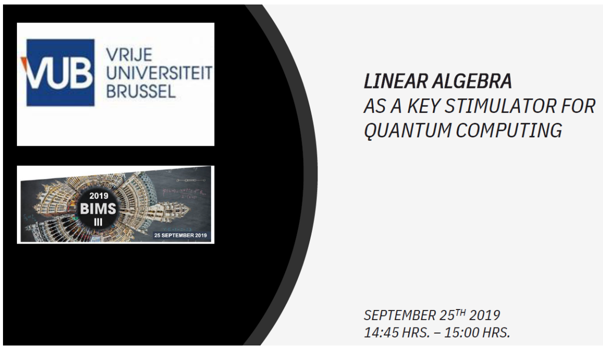
4.2 complexe coëfficiënten

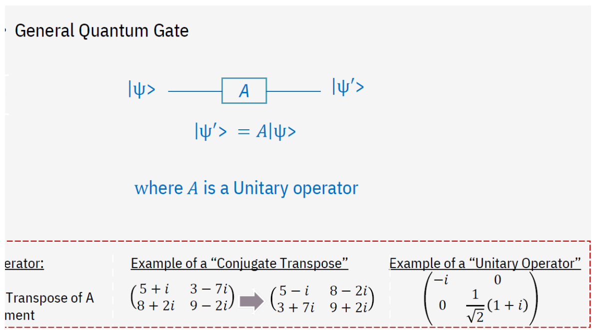
5 Meetkundige plaatsen



Figuur 6: https://www.geogebra.org/m/cprfsqvu

6 Complexe getallen vandaag





7 Extra Oefeningen

1. De complexe getallen z_1,z_2 en z_3 voldoen aan de vergelijking $\frac{2}{z_1} = \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$ Bepaal z_1 als $z_2 = 2 + 3i$ en $z_3 = 3 - 2i$
2. De veelterm $x^3 + 10x^2 + 35x + 44$ heeft als wortel $-3 + \sqrt{2}i$. Bepaal de andere wortels.
3. Bepaal A^{-1} als $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$
4. Schrijf $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8 + \left(\frac{\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$ in de vorm $a + bi$
5. Als $z \neq 0$ een complex getal is dan geldt
   (a) als $Re(z) = 0 \Rightarrow Im(z^2) = 0$
   (b) als $Re(z^2) = 0 \Rightarrow Im(z^2) = 0$
   (c) als $Re(z) = 0 \Rightarrow Re(z^2) = 0$
   (d) geen van voorgaande beweringen is juist