Bepaalde integraal

www.karelappeltans.be

July 25, 2021

1 Inleiding

"Oppervlakte" berekenen tussen de grafiek van een functie en een gedeelte van de x-as.

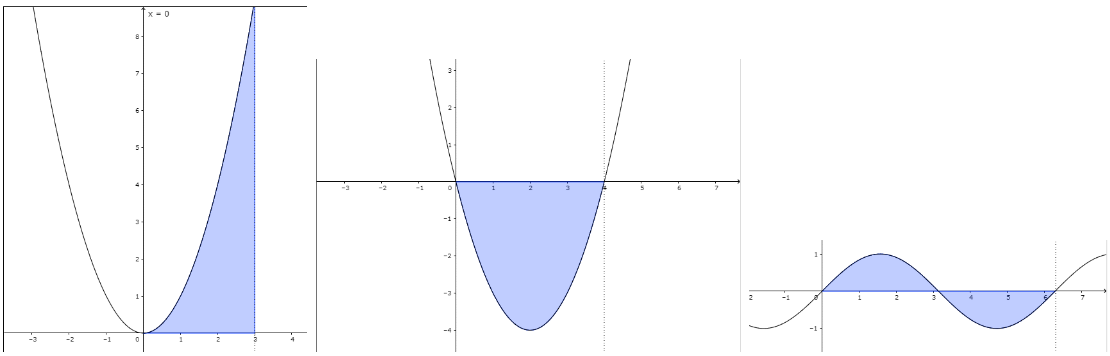


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/CwjpD27v

2 Bepaalde integraal als Riemannsom

2.1 Riemannsom

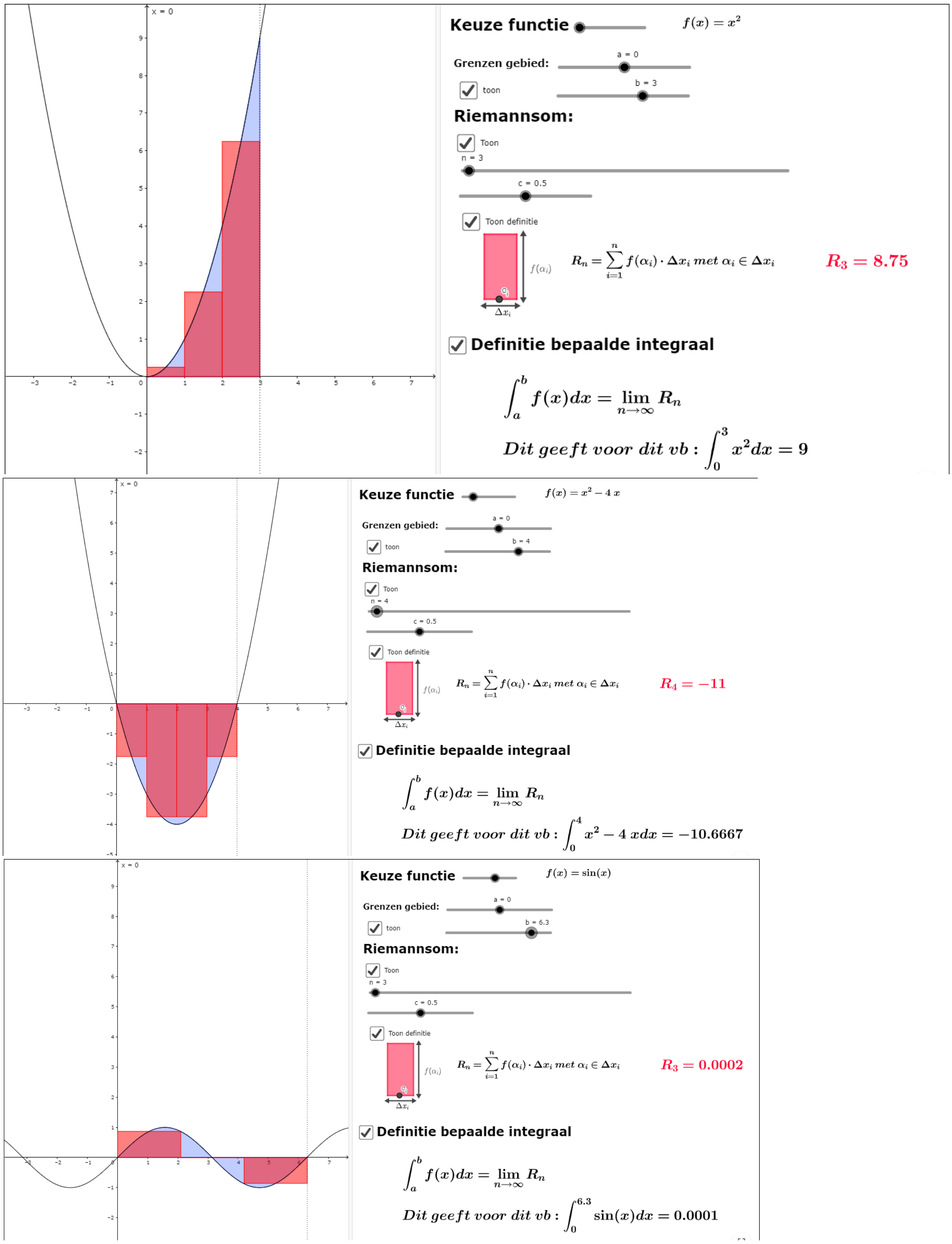


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/CwjpD27v

2.2 Onder- en bovensommen

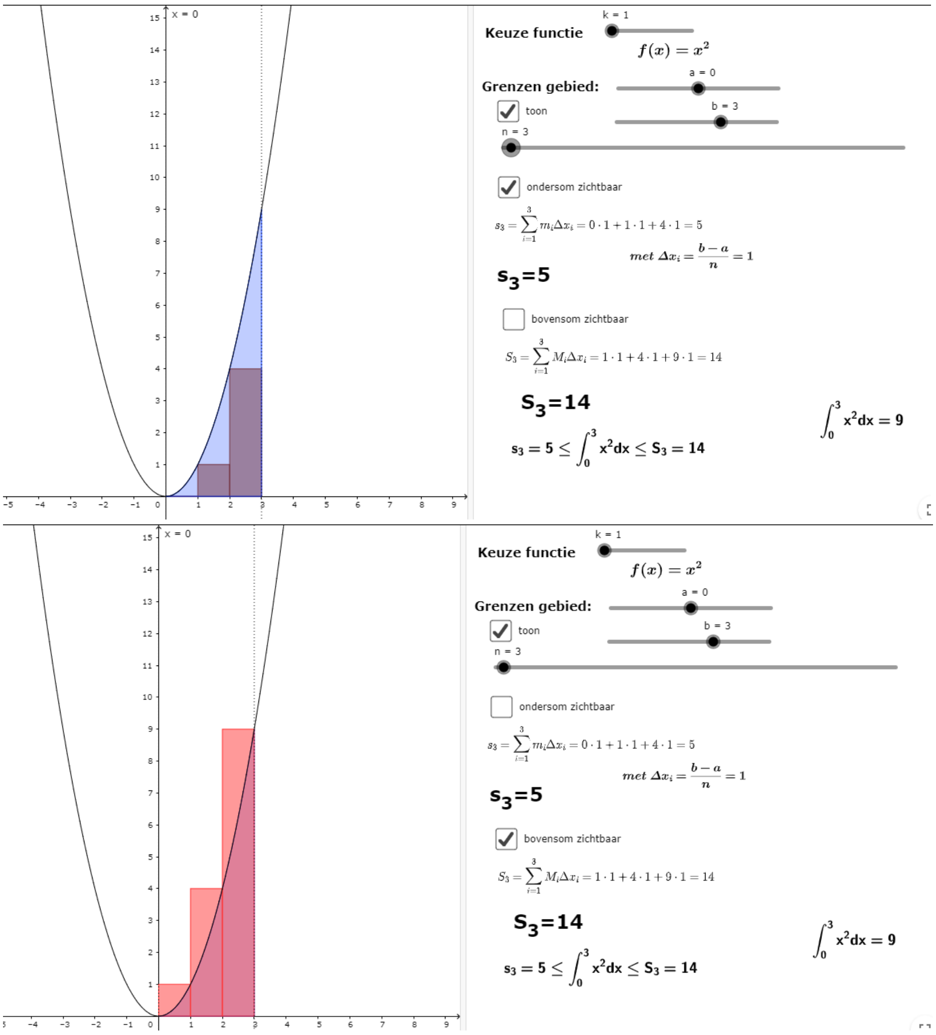


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/CwjpD27v

3 Bepaalde integraal als som van georiënteerde oppervlakte

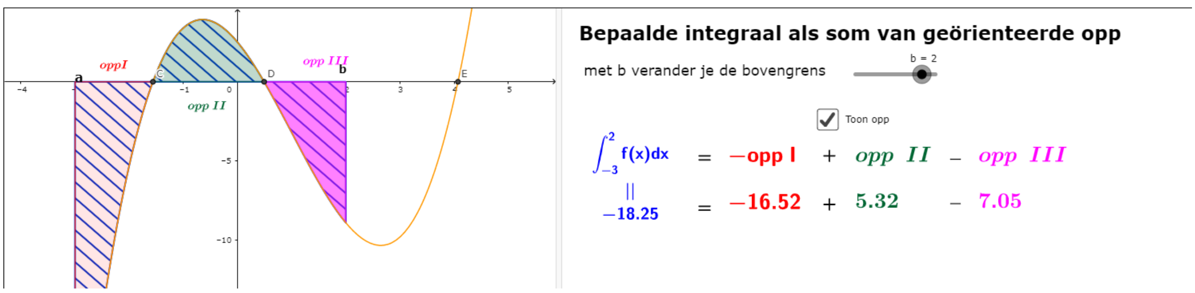


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/CwjpD27v

4 Rekenregel

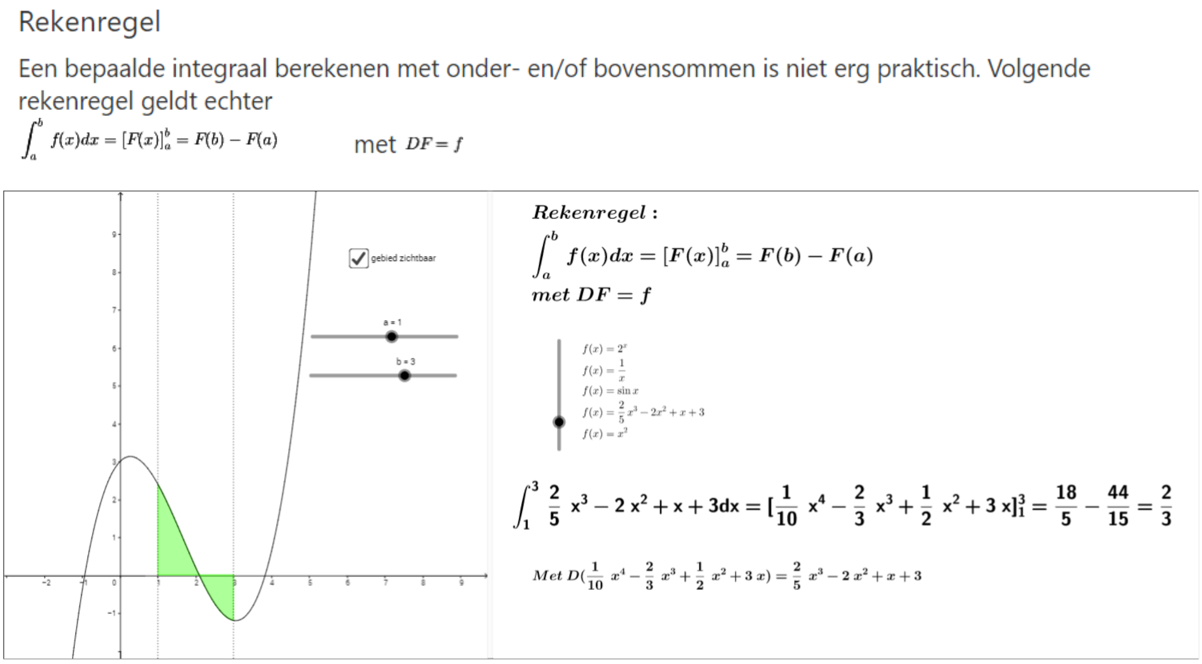


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/k3jNteMx

5 Bewijs rekenregel

5.1 Integraalfunctie

5.1.1 Begripsvorming

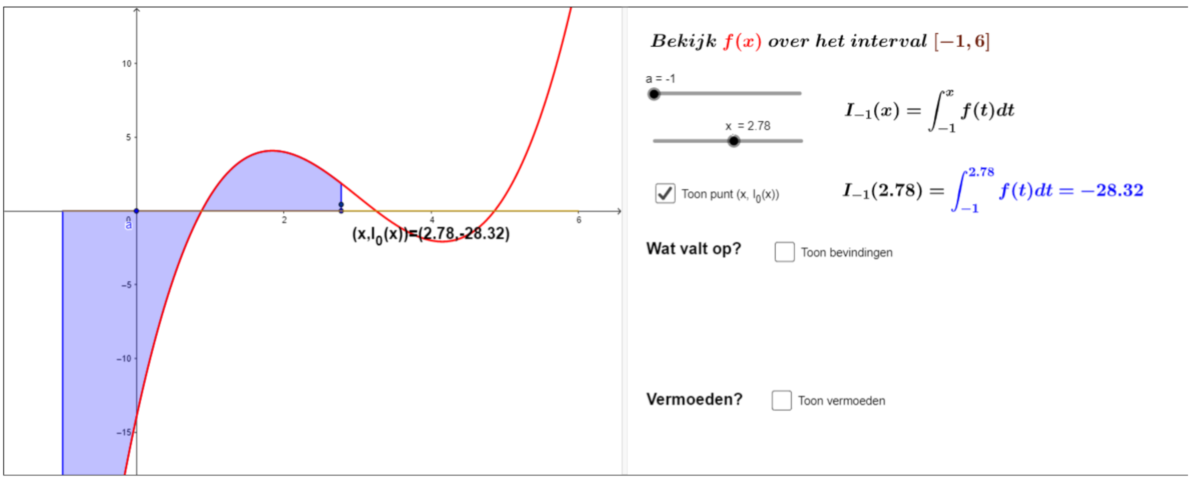


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/QzHejD4G

5.1.2 Hoofdstelling van de integraalrekening

Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een reële continue functie op het interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dan is voor alle $x_0 \in [a,b]$ de functie

$I_{x_0} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ afleidbaar en een primitieve functie van f.

Dit laatste wil zeggen: $D(I_{x_0}(x)) = f(x)$

Figure 7: https://www.geogebra.org/m/QzHejD4G

5.1.3 Grafisch bewijs

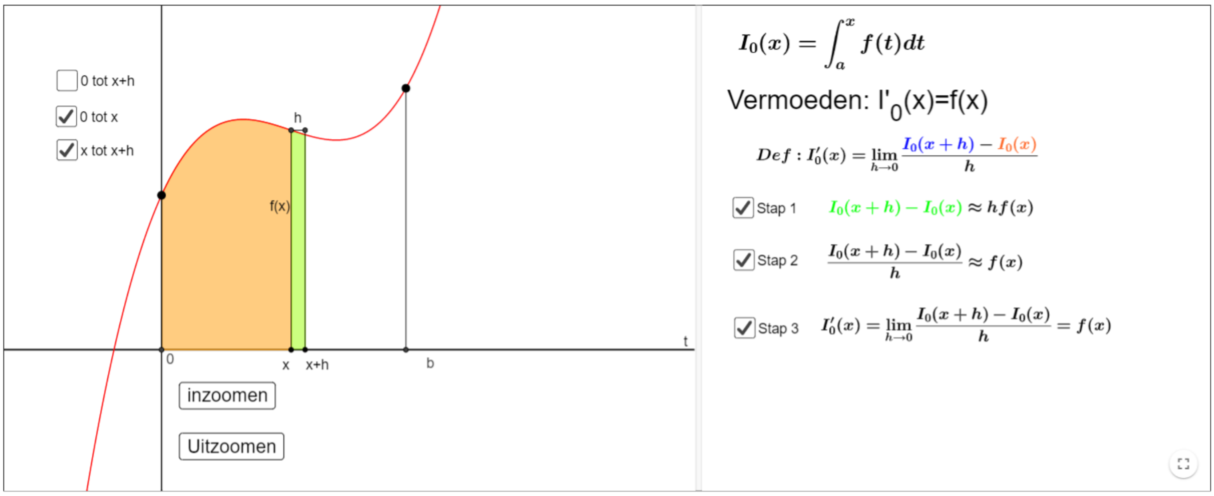


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/QzHejD4G

5.1.4 Algebraïsch bewijs

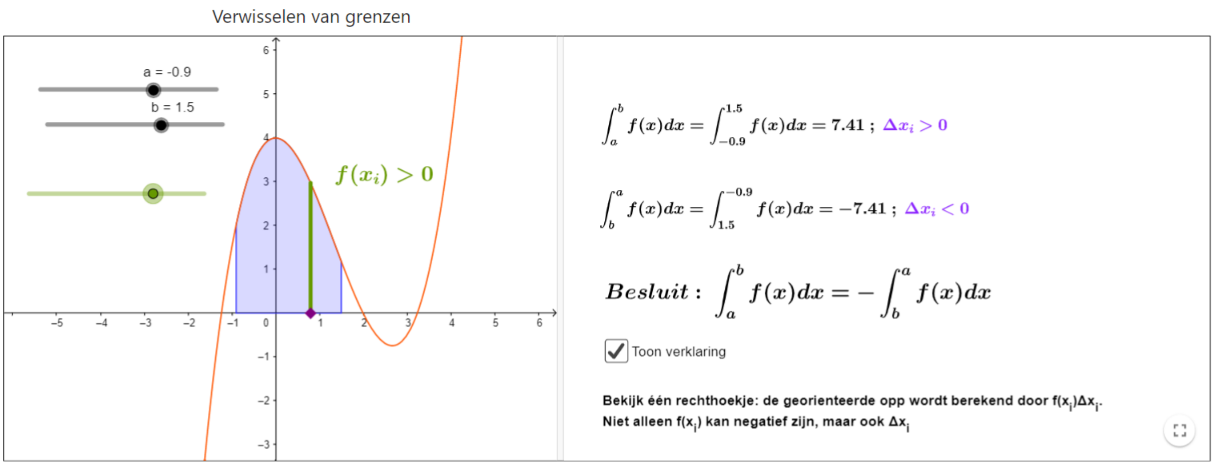


Figure 9: https://www.geogebra.org/m/PwQgTmGT

verwisseling van grenzen

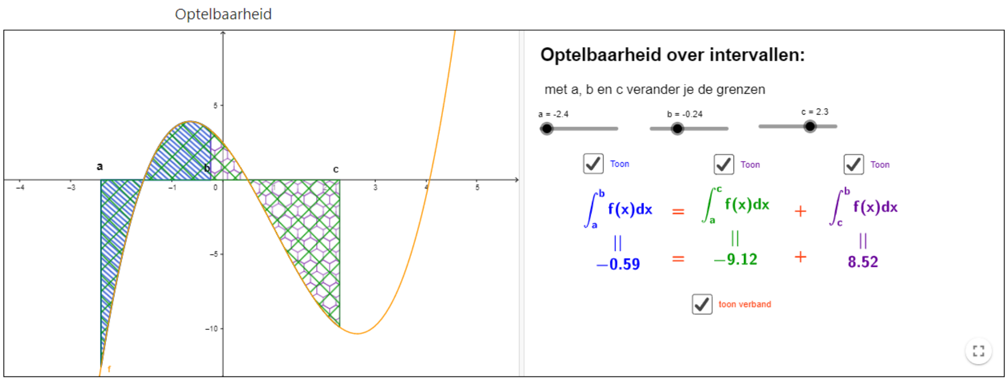


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/PwQgTmGT

Optelbaarheid over intervallen

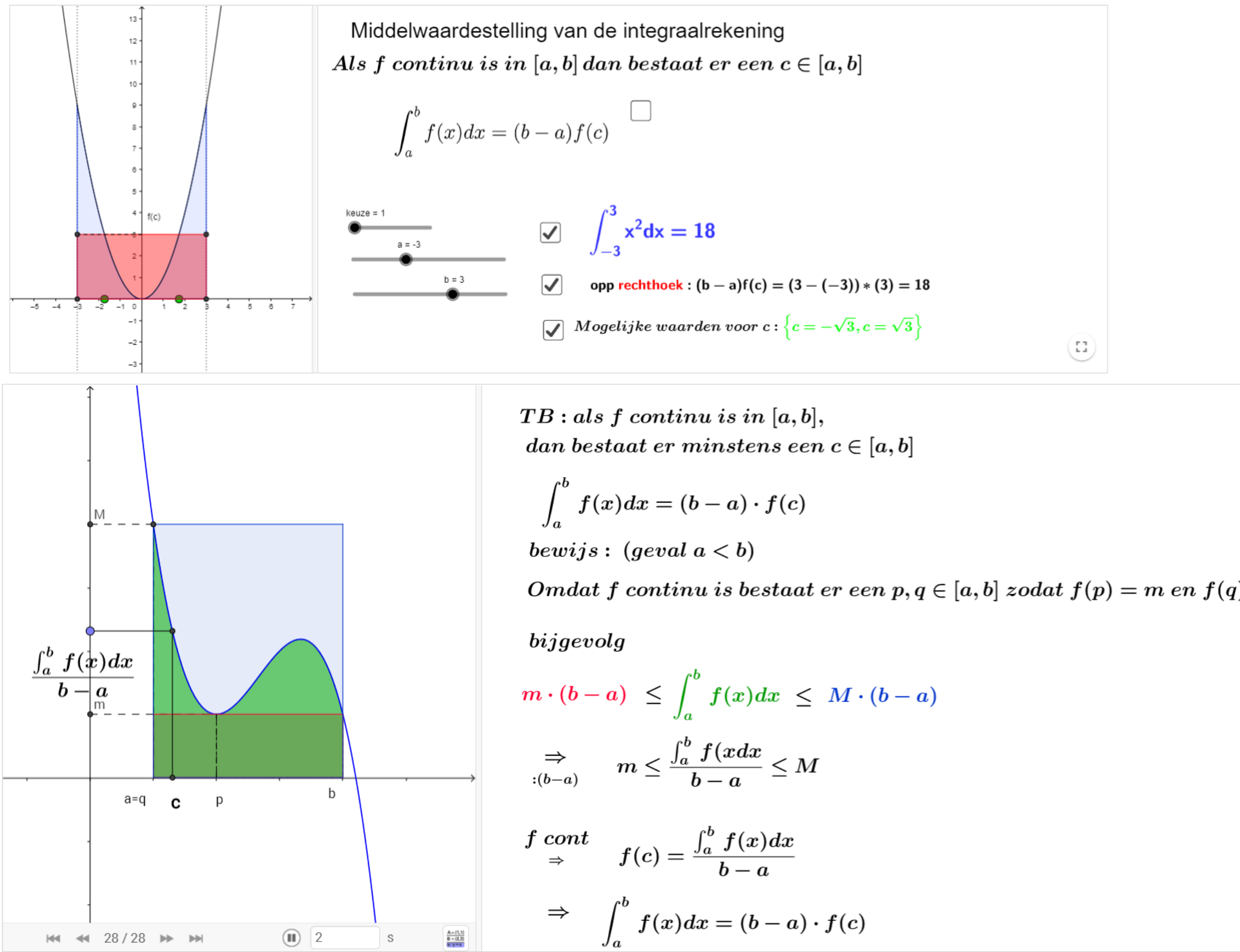


Figure 11: https://www.geogebra.org/m/PwQgTmGT

middelwaardestelling

$TB : D(I_a(x)) = f(x)$

Bewijs

$$D(I_a(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} \quad (definitie\ afgeleide)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx}{h} \quad (Definitie\ integraalfunctie)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(x)dx + \int_x^a f(x)dx}{h} \quad \text{(verwisselen van grenzen)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(x)dx}{h} \quad (optelbaarheid\ van\ intervallen)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(c)\cdot((x+h)-x)}{h} \text{ met } c \in [x, x+h] \quad \text{(middelwaardestelling)}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(c) \text{ met } c \in [x, x+h]$$

$$= f(x)$$

Figure 12: https://www.geogebra.org/m/rqa2xHAC

bewijs

5.2 Primitieve functies

Begrip primitieve functie

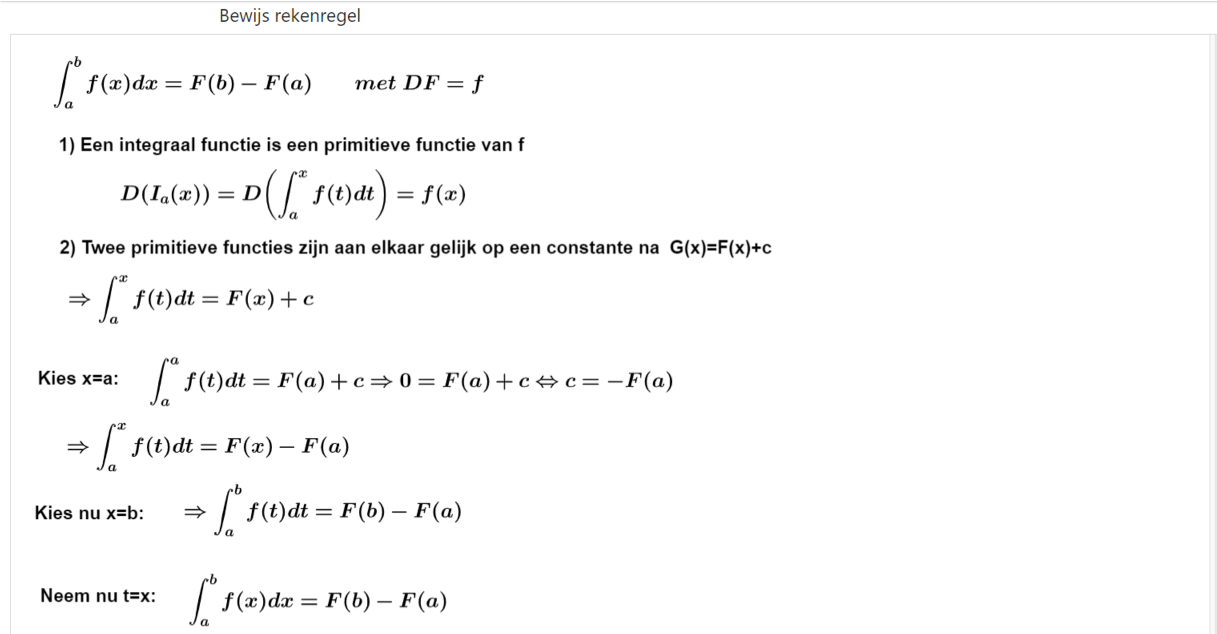
Definitie:
Een primitieve van een functie f in een interval I is een andere functie F met als eigenschap F'(x)= f(x) voor x in een interval I

Eigenschap:
Twee primitieve functies zijn aan elkaar gelijk op een constante na

Bewijs:
Als F en G twee primitieve functies zijn dan geldt:
(G(x)-F(x))'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0 in I
Dus G(x)-F(x)=c of G(x)=F(x)+c in I

Figure 13: https://www.geogebra.org/m/nY3X4vVw

5.3 Bewijs rekenregel



Bewijs rekenregel

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad met\ DF = f$$

1) Een integraal functie is een primitieve functie van f

$$D(I_a(x)) = D\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

2) Twee primitieve functies zijn aan elkaar gelijk op een constante na G(x)=F(x)+c

$$\Rightarrow \int_a^x f(t)dt = F(x) + c$$

Kies x=a: $$\int_a^a f(t)dt = F(a) + c \Rightarrow 0 = F(a) + c \Leftrightarrow c = -F(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

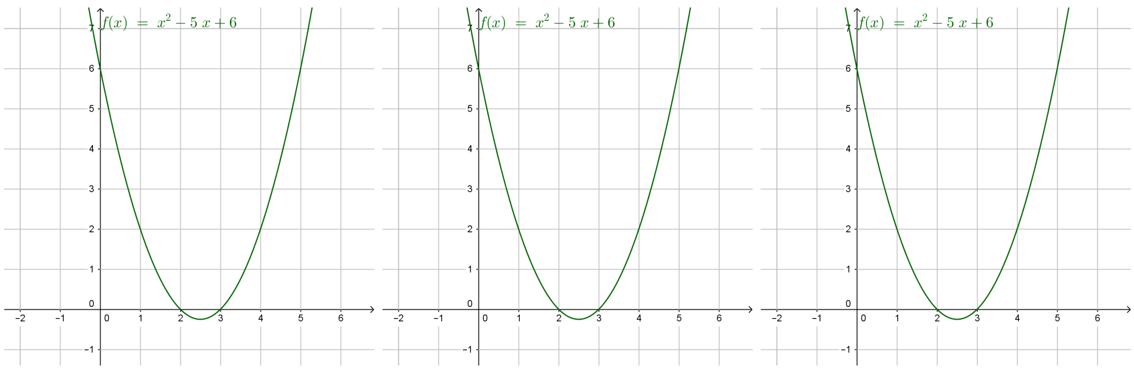
Kies nu x=b: $$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Neem nu t=x: $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Figure 14: https://www.geogebra.org/m/nY3X4vVw

6 Oefeningen

1. Bereken en teken R_4 (midden), s_4 en S_4



2. Bereken de "rechtereindpunt" Riemannsom voor $f(x) = x^3 - 6x^2$ over $[1,3]$ met $n = 4$ deelintervallen. Is deze Riemannsom een onder- of overschatting van $\int_1^3 x^3 - 6x^2 dx$? Leg uit.

3. Benader de waarde van $\int_0^1 3sin^{-1}(x)$ door R_2 met α_i de rechtereindpunten (A. π)

4. Los op:

12. Which of the following gives the exact area under the curve $f(x) = \ln(x)$ on the interval $[2, 7]$?

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{5}{n} \ln\left(2 + \frac{5}{n} i\right)$

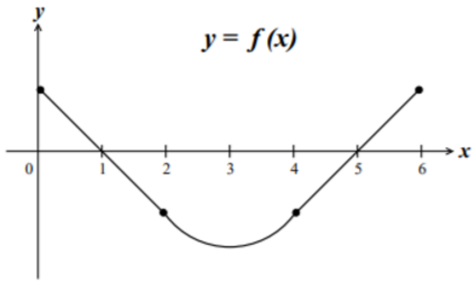
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{5}{n} \ln\left(\frac{5}{n} i\right)$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{7}{n} \ln\left(2 + \frac{5}{n} i\right)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{7}{n} \ln\left(\frac{7}{n} i\right)$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{7}{n} \ln\left(2 + \frac{7}{n} i\right)$

5. Gegeven is onderstaande grafiek van $f(x)$

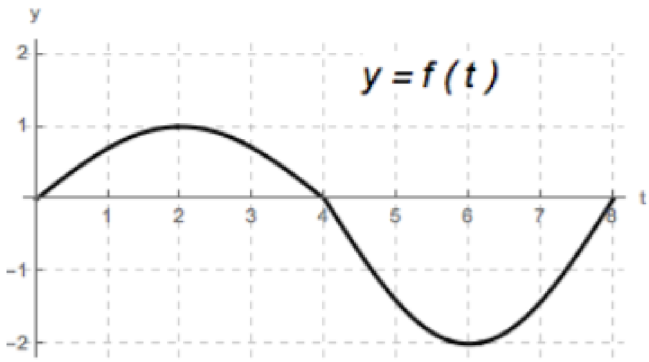


Zij $A(x) = \int_0^x f(t)dt$ met $0 \leq x \leq 6$

(a) Over welke interval(len) is $A(x)$ positief?
(b) Over welke interval(len) is $A(x)$ stijgend?
(c) Over welke interval(len) is $A(x)$ hol?
(d) Voor welke waarde(n) van x bereikt $A(x)$ een absoluut maximum?

6. Los op:

4. (12 pts) The function f is continuous on $[0, 8]$. The graph of f is shown below.



Let $A(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ for $0 \le x \le 8$.

(a) Circle the correct statement below regarding the value of $A(4.2)$.

i. $A(4.2) < 0$

ii. $A(4.2) = 0$

iii. $A(4.2) > 0$

iv. No previous choice is true.

(b) Circle the correct statement below regarding the value of $A'(4.2)$.

i. $A'(4.2) < 0$

ii. $A'(4.2) = 0$

iii. $A'(4.2) > 0$

iv. No previous choice is true.

(c) Circle the choice that correctly completes the following sentence.
The function A attains its **maximum** value on $[0, 8]$ at ____.

i. $x = 0$

ii. $x = 2$

iii. $x = 4$

iv. $x = 6$

v. $x = 8$

vi. No previous choice is true.

(d) Circle the choice that correctly completes the following sentence.
The function A is **decreasing** and **concave DOWN** on the interval ____.

i. $(0, 2)$

ii. $(2, 4)$

iii. $(4, 6)$

iv. $(6, 8)$

v. No such interval exists.

vi. No previous choice is true.

7. Bepaal het functievoorschrift van de functie f en een waarde voor de constante c zodanig dat:

$$\int_c^x f(t)dt = \cos x - \frac{1}{2}$$

8. Een functie f is continu in $\mathbb{R}$ en voldoet aan de vergelijking

$$\int_0^x f(t)dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

voor elke $x \in R$. Bereken $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

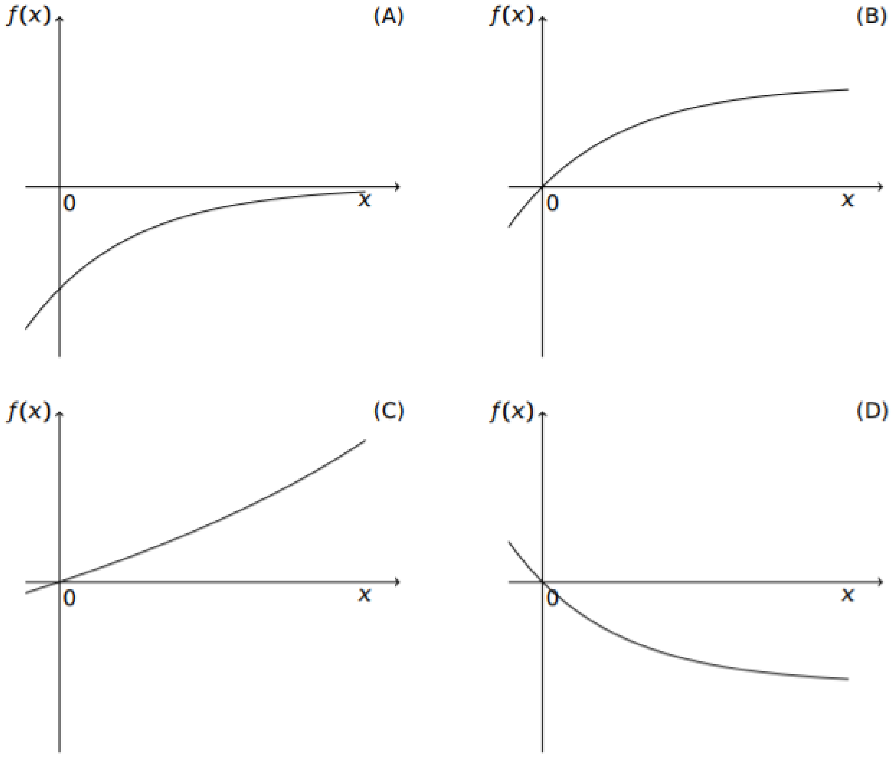
9. Bepaal alle reële getallen zodat:

$$\int_0^x t^3 - tdt = \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^x t - t^3 dt$$

(Opl: $x = 0, x = \pm\sqrt{2}$)

10. Los op:

Welke van onderstaande figuren kan de grafiek voorstellen van de functie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x \mapsto f(x) = \int_0^x e^{-t}\,dt$?



11. Bewijs de optelbaarheid over intervallen als $c \leq b \leq a$

12. Bepaal c en $f(c)$ waarvan sprake in de middelwaardestelling.

    (a) $f(x) = 4 - x^2$, $a = -2$, $b = 2$

    (b) $f(x) = 2x - 4$, $a = 0$, $b = 4$

    (c) $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ over het interval $[0, 3]$

13. Als $\int_0^x f(t)dt = x \cdot e^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)dt$ bepaal dan een expliciet voorschrift voor f(x). (Opl. $f(x) = \frac{e^{2x}+2xe^{2x}}{1-e^{-x}}$)