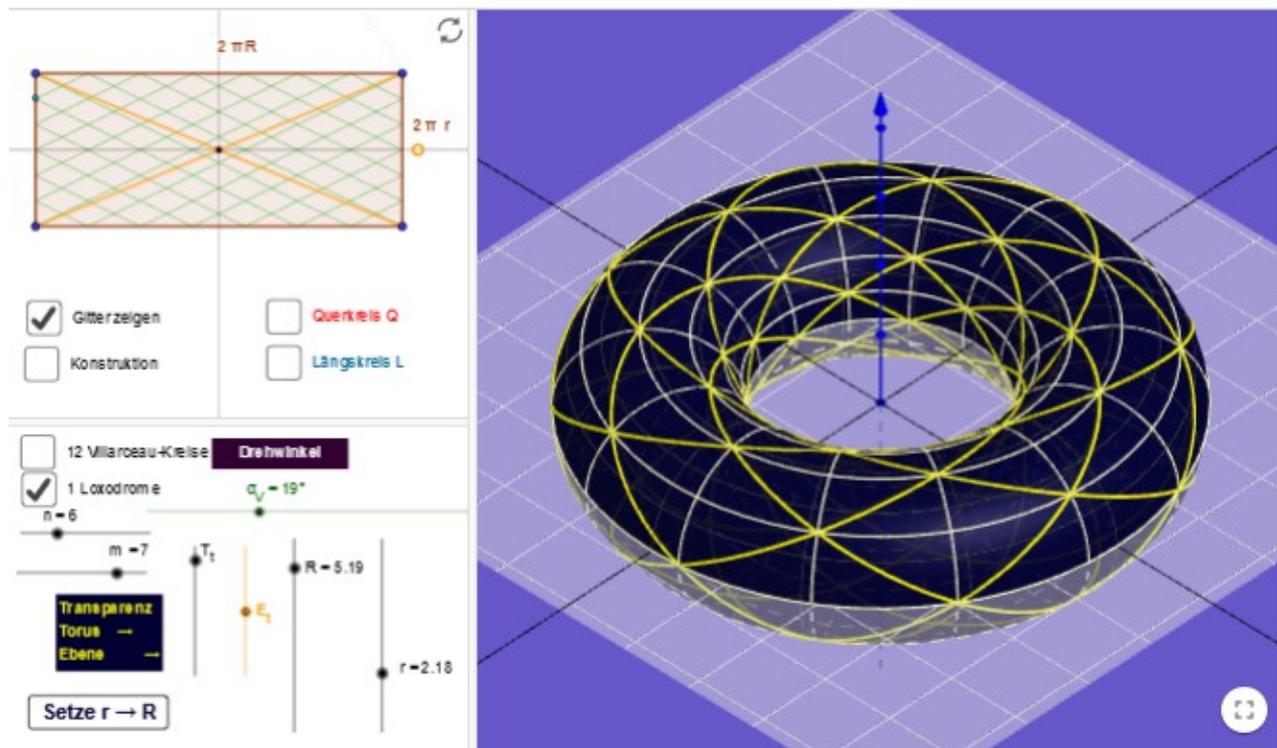


Torus-Loxodrome und andere - 1 -

Autor: Walter Fächte



Diese Aktivität ist eine Seite des [geogebra-books "Loxodrome" ? Oder nicht ? \(16/18.12.2019\)](#)

In [wikipedia](#) werden neben den **Kugel-Loxodromen** ("Winkelgleiche") auch andere Kurven dieses Typs erwähnt:

✓ "Allgemeiner gibt es zu jedem **Rotationskörper** Loxodromen als Kurven konstanten Kurses."

Loxodromen findet man also auch auf Zylindern, Kegeln und eben auch auf einem **Torus** !

Walter Wunderlich hat 1952 in dem Artikel "[Über die Torusloxodromen](#)" für diese Kurven Parameterdarstellungen angegeben, die wir oben im Applet verwenden. (*Monatsh. Math.* 56 (1952) 313-334)

W. Wunderlich bezieht sich u.a. auf einen Artikel von **Georg Holzmüller** aus dem Jahr 1899: "[Elementares über die Dupin'schen Cykliden und die Grundlagen der Krümmungstheorie](#)" (*Zeitschrift d. Mathematik u. Physik* 44.4 Heft 1899). Dort findet man übrigens ein schönes und genaues Bild über ein **6-Eck-Netz** von **Villarceau**-schen Kreisen auf einem **Torus** - erstellt ganz ohne Computer und moderner Software!

$$\text{Parameterdarstellung eines Torus: } \mathbf{Torus}(u, v) := \begin{pmatrix} (R + r \cdot \cos(u)) \cdot \cos(v) \\ (R + r \cdot \cos(u)) \cdot \sin(v) \\ r \cdot \sin(u) \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} R > r: \text{ Ringtorus} \\ R = r: \text{ Horntorus} \\ R < r: \text{ Spindeltorus} \end{array}$$

In allen drei Fällen gibt es "**Loxodrome**"!

→ Was sind "Loxodrome"?

Für die **Standard-Loxodrome** auf der **Kugel** liegt ein **orthogonales Netz** von **Kreisen** vor: den **Breitenkreisen** und den **Meridianen (Längenkreise)**.

Loxodrome sind diejenigen Kurven, welche die **Meridianen**, bzw. die **Breitenkreise** jeweils unter einem konstanten Winkel schneiden.

Diese **Definition** läßt sich verallgemeinern: Liegt ein **orthogonales Netz** von Kurven vor, so kann man die Kurven, welche die **Netz-Kurven** unter konstantem Winkel schneiden, **Loxodrome** nennen.

Das **orthogonale Netz** auf einem **Torus** besteht aus den Kreisen, welche bei der Rotation der **Torus-Punkte** um die Achse entstehen: wir haben sie im Applet **Längskreise** genannt, und den dazu orthogonalen **Meridiankreisen (Querkreise)**.

Ein Kandidat für die gesuchten **Loxodromen** könnten die Kurven mit der nebenstehenden Parameterdarstellung sein:

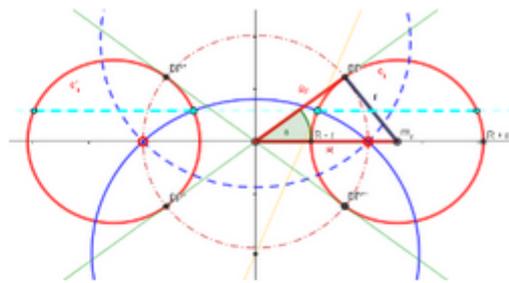
$$t \mapsto \text{Loxo}(t) := \begin{pmatrix} (R + r \cdot \cos(m \cdot t)) \cdot \cos(n \cdot t) \\ (R + r \cdot \cos(m \cdot t)) \cdot \sin(n \cdot t) \\ r \cdot \sin(m \cdot t) \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Für ganzzahlige m und n entstehen geschlossene Kurven, welche sich **spiralig** um den **Torus** winden. Diese Kurven stimmen jedoch nicht mit den von **Walter Wunderlich** angegebenen **Torusloxodromen** überein. Insbesondere enthalten sie im Falle des **Ringtorus** nicht die **Villarceauxchen Kreise**, welche bekannterweise **Loxodrome** des **Torus** sind.

Im folgenden geben wir die **Parameterdarstellungen** der drei Kurventypen an. An einem Nachweis, dass es sich wirklich um die "**Winkelgleichen**" der handelt, versuchen wir uns noch!

Loxodromen
des
Ringtorus

$$R > r$$

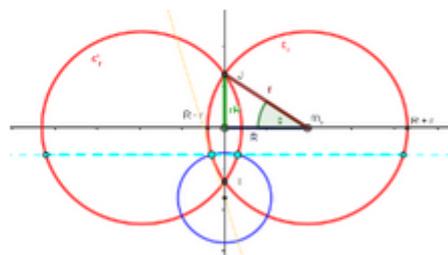


mit $Rr = \sqrt{R^2 - r^2}$ $\mathbf{rLoxo}(\varphi) := \frac{Rr}{R - r \cdot \cos(b \cdot \varphi)} \cdot (Rr \cdot \cos(\varphi), Rr \cdot \sin(\varphi), r \cdot \sin(b \cdot \varphi))$ und $\varphi \in [-k \cdot \pi, k \cdot \pi]$

Für $b = \frac{m}{n}$ mit ganzzahligen m und n ergeben sich geschlossene **Loxodrome**; für $b = \pm 1$ erhält man die **Villarceauxchen Kreise**, die es für die beiden anderen **Torus**-Typen nicht gibt.

Loxodromen
des
Spindeltorus

$$r > R$$



mit $rR = \sqrt{r^2 - R^2}$ $\mathbf{sLoxo}(\varphi) := \frac{rR}{r \cdot \cosh(b \cdot \varphi) \pm R} \cdot (rR \cdot \cos(\varphi), rR \cdot \sin(\varphi), r \cdot \sinh(b \cdot \varphi))$ und $\varphi \in [-k \cdot \pi, k \cdot \pi]$

Wieder erhält man für b wie oben mit ganzzahligen m und n geschlossene **Loxodrome**, allerdings nicht immer angezeigt werden. Das Vorzeichen im Nenner entscheidet, welcher Teil der Kurve im Inneren, und welcher Teil im Äußeren angezeigt wird.

Loxodromen

des

Horntorus

$$r = R$$

$$\mathbf{hLoxo}(\varphi) := \frac{2 \cdot R}{1 + b^2 \cdot \varphi^2} \cdot (\cos(\varphi), \sin(\varphi), b \cdot \varphi)$$

mit $\varphi \in [-k \cdot \pi, k \cdot \pi]$

b, m, n wie oben; wieder werden in einigen Fällen die Kurven nicht angezeigt (!?)

Für die beiden letzten **Torus**-typen haben wir die **Längs**- und **Querkreise** für die Schnittpunkte nicht berechnet, der Rechenaufwand ist insgesamt für die Parameterkurven sehr hoch!

Der Grenzfall $R \rightarrow 0$ führt übrigens zu den **Standard-Loxodromen** auf der **Kugel**, das kann man im Applet gut erkennen!

Bemerkungen:

- In dem Faktor b steckt der Schnittwinkel der **Loxodromen** mit den **Meridianen**.
- **G. Holzmüller** erwähnt, dass es "bekanntlich" eine "einfache" **konforme Abbildung** eines **Rechtecks** auf den **Torus** gäbe. Damit ist wohl gemeint, dass eine **winkeltreue** Abbildung eines Rechtecks auf den **Torus** existiert, für welche die achsenparallelen Strecken die **Längs**- und **Querkreise**, und die schrägen Parallel-Strecken die **Loxodrome** ergeben.
- Diese Abbildung haben wir nicht gefunden, das im Falle der **Ring-Tori** angezeigte **Gitter** könnte ein Urbild für diese Abbildung sein! Wie **Holzmüller** angibt, muss nur der Winkel der **Diagonalen** stimmen!?!
- **W. Wunderlich** verdeutlicht in einem Bild, dass die Projektion der **Loxodromen** vom Ursprung aus auf einen ko-axialen **Zylinder** einfache **Sinus-Linien** ergibt.

↔ Eine hübsche Aufgabe zur Veranschaulichung mit **ge**  **gebra**-Hilfsmitteln!

