

Teoría – Tema 1

Teoría - 9 - valor absoluto en ecuaciones e inecuaciones

Valor absoluto de un número real

El valor absoluto de un número real a se escribe $|a|$ y es el mismo número a cuando es positivo o cero, y opuesto de a cuando es negativo. Se define como:

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{si } a < 0 \\ a & \text{si } a \geq 0 \end{cases}$$

El valor absoluto cumple las siguientes propiedades:

$$|a| = |-a|$$

$$|a - b| = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \text{ si } b \neq 0$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$$

$$|a - b| \geq ||a| - |b||$$

$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b \rightarrow a \in [-b, b]$$

$$|a| \geq b \Leftrightarrow \{a \leq -b\} \cup \{a \geq b\}$$

Podemos ver el valor absoluto como la distancia del número al origen 0 de la recta real. Y las distancias, por definición, siempre son positivas.

Valor absoluto en una ecuación

En las ecuaciones que contienen valor absoluto hay una norma muy importante que debemos aprender desde ya: **no se puede operar con valor absoluto**.

Para "eliminar las barras del valor absoluto" debemos obtener las raíces del argumento contenido dentro del valor absoluto, y aplicar la definición general: donde sea positivo se quitan las barras, y donde sea negativo se quitan las barras y se antepone un signo negativo.

Si en el argumento aparecen cociente de polinomios, debemos obtener las raíces del numerador y del denominador.

Pero en algunos casos el proceso es mucho más sencillo: si el valor absoluto de la ecuación está igualada a un número, se pueden quitar las barras y colocar los signos + - delante del número.

Ejemplo 1 resuelto

Resuelve $|x-3|=5$

Razonamos de la siguiente manera: $x-3=\pm 5 \rightarrow$ resolvemos las dos ecuaciones

$$x-3=5 \rightarrow x=8$$

$$x-3=-5 \rightarrow x=-2$$

Ejemplo 2 resuelto

Resuelve $2x+|x^2-9|=15$

Dejamos solo en un miembro el polinomio contenido dentro del valor absoluto.

$$|x^2-9|=15-2x$$

Igualamos el argumento del valor absoluto a 0 $\rightarrow x^2-9=0 \rightarrow x=\pm 3$

Con estas raíces vemos el signo del argumento en los diferentes intervalos.

$$(-\infty, -3) \rightarrow \text{Tomo por ejemplo } x=-10 \rightarrow (-10)^2-9=91>0 \rightarrow \text{Quitar barras}$$

$$(-3, 3) \rightarrow \text{Tomo por ejemplo } x=0 \rightarrow 0^2-9=-9<0 \rightarrow \text{Quitar barras y anteponer signo negativo}$$

$$(3, \infty) \rightarrow \text{Tomo por ejemplo } x=10 \rightarrow (10)^2-9=91>0 \rightarrow \text{Quitar barras}$$

Con esto, la ecuación de partida se rompe en tres ecuaciones diferentes (una para cada intervalo).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x < -3 \rightarrow x^2 - 9 = 15 - 2x \rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \\ \text{si } -3 \leq x \leq 3 \rightarrow -(x^2 - 9) = 15 - 2x \rightarrow -x^2 + 2x - 6 = 0 \\ \text{si } x > 3 \rightarrow x^2 - 9 = 15 - 2x \rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \end{array} \right.$$

Debemos resolver cada ecuación. **Las soluciones serán válidas siempre que pertenezcan a cada uno de los intervalos en que está definida la ecuación.**

Fijate que las ecuaciones para $x < -3$ y para $x > 3$ son idénticas.

$$x^2 + 2x - 24 = 0 \rightarrow \text{soluciones} \rightarrow x = -6 \text{ para intervalo } x < -3 \text{ y } x = 4 \text{ para } x > 3 .$$

$$-x^2 + 2x - 6 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución} \rightarrow \text{No hay solución para el intervalo } [-3, 3] .$$

Ejemplo 3 resuelto

Resuelve $\left| \frac{x}{x+2} \right| = x - 4$

Raíz del numerador del argumento: $x = 0$

Raíz del denominador del argumento: $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

Evaluamos el argumento en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -2) \rightarrow \text{por ejemplo } x = -10 \rightarrow \frac{-10}{-10+2} > 0 \rightarrow \text{quitar las barras}$$

$$(-2, 0) \rightarrow \text{por ejemplo } x = -1 \rightarrow \frac{-1}{-1+2} < 0 \rightarrow \text{quitar las barras y anteponer signo negativo}$$

$$(0, \infty) \rightarrow \text{por ejemplo } x = 7 \rightarrow \frac{7}{7+2} > 0 \rightarrow \text{quitar las barras}$$

Dos o más valores absolutos en una ecuación

Si aparecen varios valores absolutos en una ecuación, obtenemos las raíces de todos los argumentos y evaluamos en cada uno de los intervalos que forman.

Resolvemos la ecuación asociada a cada intervalo y comprobamos si las soluciones pertenecen a dicho intervalo.

Ejemplo 4 resuelto

Resuelve $|x+4|=1-|x-6|$

Igualamos cada argumento del valor absoluto a cero, para sacar sus raíces.

$$x+4=0 \rightarrow x=-4$$

$$x-6=0 \rightarrow x=6$$

Aparecen tres intervalos. Debemos evaluar el argumento de cada valor absoluto en cada uno de esos intervalos.

Intervalo	signo argumento de $ x+4 $	signo argumento de $ x-6 $
$(-\infty, -4) \rightarrow x=-10$	-	-
$(-4, 6) \rightarrow x=0$	+	-
$(6, \infty) \rightarrow x=20$	+	+

Rompemos la ecuación en cada intervalo:

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\infty, -4): -(x+4)=1-(-(x-6)) \\ [-4, 6]: x+4=1-(-(x-6)) \\ (6, \infty): x+4=1-(x-6) \end{array} \right\} \rightarrow \text{operar} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (-\infty, -4): -x-4=1+x-6 \\ [-4, 6]: x+4=1+x-6 \\ (6, \infty): x+4=1-x+6 \end{array} \right\}$$

Resolvemos cada ecuación, y comprobamos que las soluciones pertenezcan al intervalo en que están definidas.

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\infty, -4): -2x=-1 \rightarrow x=\frac{1}{2} \notin (-\infty, -4) \\ [-4, 6]: 0=-9 \rightarrow \text{absurdo matemático} \\ (6, \infty): 2x=3 \rightarrow x=\frac{3}{2} \notin (6, \infty) \end{array} \right\} \rightarrow \text{El ejercicio no tiene solución}$$

Valores absolutos insertados uno dentro de otro

Si encontramos un valor absoluto dentro de otro valor absoluto, debemos romper de dentro hacia fuera. Y razonar de la misma forma a la planteada en problemas anteriores.

Suelen ser problemas largos, donde debemos estar muy atentos a los intervalos donde estamos trabajando. Y comprobar si las soluciones obtenidas pertenecen a esos intervalos.

Ejemplo 5 resuelto

Resuelve $|x + |2x + 8|| + x = 4$

Rompemos el valor absoluto interior.

$$2x + 8 = 0 \rightarrow x = -4$$

Aparecen dos intervalos.

Intervalo	signo argumento de $ 2x + 8 $
$(-\infty, -4) \rightarrow x = -10$	-
$(-4, \infty) \rightarrow x = 0$	+

Llegamos a dos ecuaciones (una por intervalos) donde aparece un nuevo valor absoluto en cada ecuación.

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\infty, -4): |x - (2x + 8)| + x = 4 \\ [-4, \infty): |x + 2x + 8| + x = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \text{operar} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (-\infty, -4): |-x - 8| + x = 4 \\ [-4, \infty): |3x + 8| + x = 4 \end{array} \right\}$$

En cada ecuación debemos romper su correspondiente valor absoluto.

Para $(-\infty, -4) \rightarrow -x - 8 = 0 \rightarrow x = -8$

Intervalo	signo argumento de $ -x - 8 $
$(-\infty, -8) \rightarrow x = -10$	+
$(-8, -4) \rightarrow x = -6$	-

Resolver cada ecuación

$$(-\infty, -8) \rightarrow -x - 8 + x = 4 \rightarrow 0 = 12 \rightarrow \text{absurdo matemático}$$

$$(-8, -4) \rightarrow -(-x - 8) + x = 4 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2 \notin (-8, -4) \rightarrow \text{no hay solución}$$

Valores absolutos en inecuaciones

La regla general es bien sencilla: romper los valores absolutos que aparezcan y resolver cada inecuación en su intervalo asociado.

Ejemplo 6 resuelto

Resuelve $|x+5| \leq 4$

El razonamiento es bien sencillo en este caso, ya que el argumento del valor absoluto debe oscilar entre -4 y +4 por aparecer en un lado un valor absoluto y en otro lado de la desigualdad un número positivo.

$$-4 \leq x+5 \leq 4$$

Obtenemos dos inecuaciones por separado.

$$-4 \leq x+5 \rightarrow -9 \leq x$$

$$x+5 \leq 4 \rightarrow x \leq -1$$

La solución final será la intersección de ambas soluciones individuales.

$$-9 \leq x \cap x \leq -1 \rightarrow [-9, -1]$$

Ejemplo 7 resuelto

Resuelve $|x+5| > 2-3x$

Rompemos el valor absoluto, y tendremos una inecuación para cada intervalo.

$$x+5=0 \rightarrow x=-5$$

Intervalo	signo argumento de $ x+5 $
-----------	----------------------------

$(-\infty, -5)$ $\rightarrow x < -5$	-
--------------------------------------	---

$(-5, \infty)$ $\rightarrow x > -5$	+
-------------------------------------	---

Para $(-\infty, -5)$ $\rightarrow -(x+5) > 2-3x$

Resolver $\rightarrow -x-5 > 2-3x \rightarrow 2x > 7 \rightarrow x > \frac{7}{2} \notin (-\infty, -5) \rightarrow$ no hay solución

Para $(-5, \infty)$ $\rightarrow x+5 > 2-3x$

Resolver $\rightarrow 4x > -3 \rightarrow x > \frac{-3}{4} \in (-5, \infty) \rightarrow$ el intervalo solución resulta: $(\frac{-3}{4}, \infty)$