Las matemáticas de Escher

Departamento de matemáticas.

IES Ángel Corella. (Colmenar Viejo)

6 de marzo de 2017

I.E.S. ÁNGEL CORELLA
Departamento de matemáticas

✓Activar el modo de presentación

índice de contenidos I

Tipos de movimientos en el plano.

Movimientos directos e inversos.

Tipos de movimientos

Tipos de movimientos en el plano.

Movimientos directos e inversos.

Tipos de movimientos

- Los movimientos en el plano se pueden clasificar en directos e inversos:

Movimientos directos

Movimientos inversos

Tipos de movimientos en el plano.

Movimientos directos e inversos.

Tipos de movimientos

- Los movimientos en el plano se pueden clasificar en directos e inversos:

Movimientos directos

- Son aquellos que conservan el sentido de giro.

Movimientos inversos

Tipos de movimientos en el plano.

Movimientos directos e inversos.

Tipos de movimientos

- Los movimientos en el plano se pueden clasificar en directos e inversos:

Movimientos directos

- Son aquellos que conservan el sentido de giro.
  1. Traslaciones.

Movimientos inversos

Tipos de movimientos en el plano.

Movimientos directos e inversos.

Tipos de movimientos

- Los movimientos en el plano se pueden clasificar en directos e inversos:

Movimientos directos

- Son aquellos que conservan el sentido de giro.
  1. Traslaciones.
  2. Rotaciones.

Movimientos inversos

Tipos de movimientos en el plano.

Movimientos directos e inversos.

Tipos de movimientos

- Los movimientos en el plano se pueden clasificar en directos e inversos:

Movimientos directos

- Son aquellos que conservan el sentido de giro.
  1. Traslaciones.
  2. Rotaciones.
  3. Simetría central.

Movimientos inversos

Tipos de movimientos en el plano.

Movimientos directos e inversos.

Tipos de movimientos

- Los movimientos en el plano se pueden clasificar en directos e inversos:

Movimientos directos

- Son aquellos que conservan el sentido de giro.
  1. Traslaciones.
  2. Rotaciones.
  3. Simetría central.

Movimientos inversos

- Son aquellos que invierten el sentido de giro.

Tipos de movimientos en el plano.

Movimientos directos e inversos.

Tipos de movimientos

- Los movimientos en el plano se pueden clasificar en directos e inversos:

Movimientos directos

- Son aquellos que conservan el sentido de giro.
  1. Traslaciones.
  2. Rotaciones.
  3. Simetría central.

Movimientos inversos

- Son aquellos que invierten el sentido de giro.
  1. Simetría axial.

Traslaciones en el plano.

Vector de traslación $\vec{t}$

Vector $\vec{AB}$

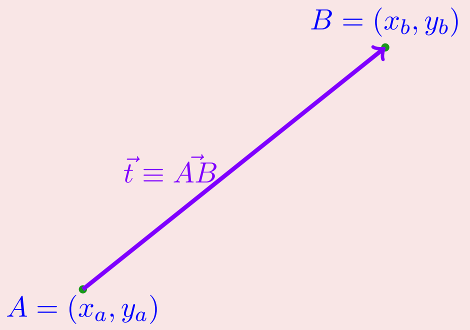
Traslaciones en el plano.

Vector de traslación $\vec{t}$

Vector $\vec{AB}$

1. Definimos $\vec{t}$ como el vector que traslada A hasta B.

figura:



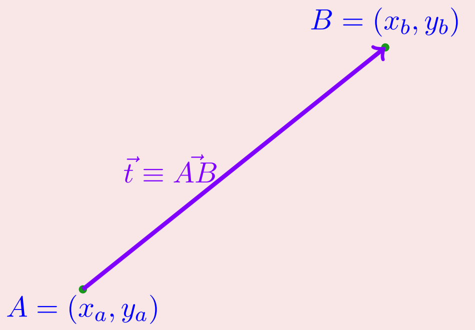
Traslaciones en el plano.

Vector de traslación $\vec{t}$

Vector $\vec{AB}$

1. Definimos $\vec{t}$ como el vector que traslada A hasta B.
2. $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$

figura:



Traslación de una figura mediante un vector $\vec{t}$

Ejemplo de traslación de un triángulo

Dados los vértices A, B y C y $\vec{t}$

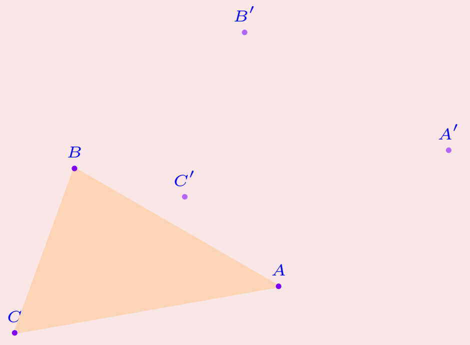
Traslación de una figura mediante un vector $\vec{t}$

Ejemplo de traslación de un triángulo

Dados los vértices A, B y C y $\vec{t}$

1. Calculamos los nuevos vértices:

Figuras



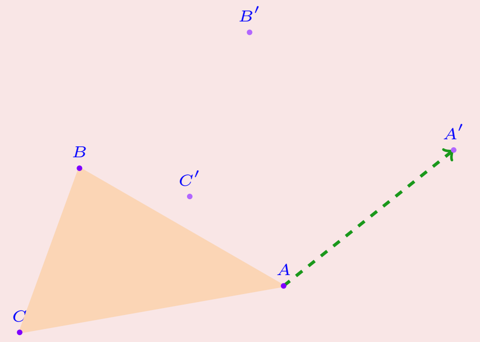
Traslación de una figura mediante un vector $\vec{t}$

Ejemplo de traslación de un triángulo

Dados los vértices A, B y C y $\vec{t}$

1. Calculamos los nuevos vértices:
   - $A' = A + \vec{t}$

Figuras



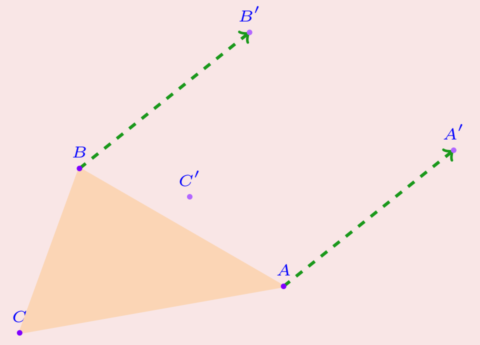
Traslación de una figura mediante un vector $\vec{t}$

Ejemplo de traslación de un triángulo

Dados los vértices A, B y C y $\vec{t}$

1. Calculamos los nuevos vértices:
   - $A' = A + \vec{t}$
   - $B' = B + \vec{t}$

Figuras



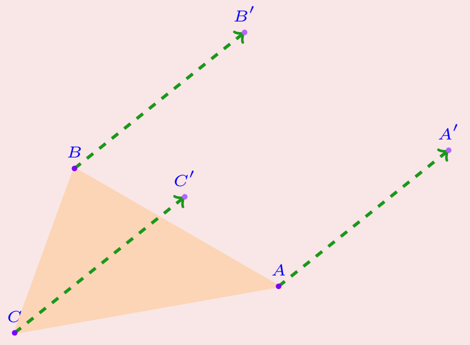
Traslación de una figura mediante un vector $\vec{t}$

Ejemplo de traslación de un triángulo

Dados los vértices A, B y C y $\vec{t}$

1. Calculamos los nuevos vértices:
   - $A' = A + \vec{t}$
   - $B' = B + \vec{t}$
   - $C' = C + \vec{t}$

Figuras



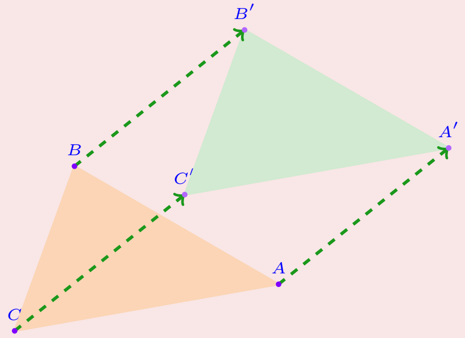
Traslación de una figura mediante un vector $\vec{t}$

Ejemplo de traslación de un triángulo

Dados los vértices A, B y C y $\vec{t}$

1. Calculamos los nuevos vértices:
   - $A' = A + \vec{t}$
   - $B' = B + \vec{t}$
   - $C' = C + \vec{t}$
2. Creamos el triángulo.

Figuras



Rotación respecto de un punto O

Rotación de un punto P un ángulo α respecto de un punto O:

Sea un punto $P = (p_x, p_y)$

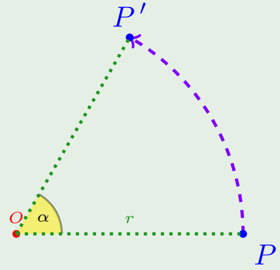
Rotación respecto de un punto O

Rotación de un punto P un ángulo α respecto de un punto O:

Sea un punto $P = (p_x, p_y)$

1. Sea un ángulo α y el centro de giro $O = (o_x, o_y)$

figura



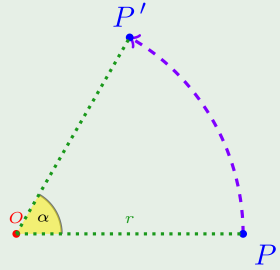
Rotación respecto de un punto O

Rotación de un punto P un ángulo α respecto de un punto O:

Sea un punto $P = (p_x, p_y)$

1. Sea un ángulo α y el centro de giro $O = (o_x, o_y)$
2. Giramos el punto P respecto de O, obteniendo P'

figura



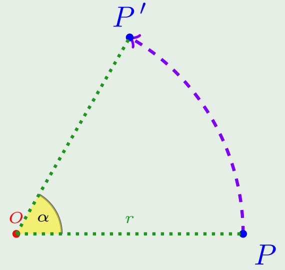
Rotación respecto de un punto O

Rotación de un punto P un ángulo α respecto de un punto O:

Sea un punto $P = (p_x, p_y)$

1. Sea un ángulo α y el centro de giro $O = (o_x, o_y)$
2. Giramos el punto P respecto de O, obteniendo P'
   - Si $\alpha > 0 \rightarrow$ sentido antihorario.

figura



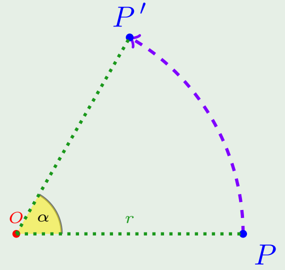
Rotación respecto de un punto O

Rotación de un punto P un ángulo α respecto de un punto O:

Sea un punto $P = (p_x, p_y)$

1. Sea un ángulo α y el centro de giro $O = (o_x, o_y)$
2. Giramos el punto P respecto de O, obteniendo P'
   - Si $\alpha > 0 \rightarrow$ sentido antihorario.
   - Si $\alpha < 0 \rightarrow$ sentido horario.

figura



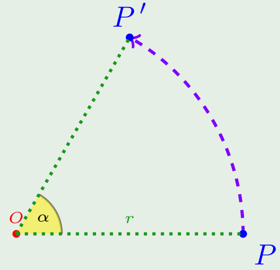
Rotación respecto de un punto O

Rotación de un punto P un ángulo α respecto de un punto O:

Sea un punto $P = (p_x, p_y)$

1. Sea un ángulo α y el centro de giro $O = (o_x, o_y)$
2. Giramos el punto P respecto de O, obteniendo P'
   - Si $\alpha > 0 \rightarrow$ sentido antihorario.
   - Si $\alpha < 0 \rightarrow$ sentido horario.
3. 2.º de Bachillerato

figura



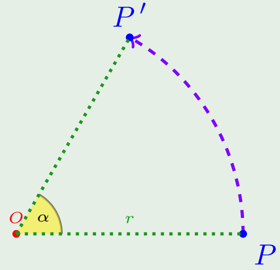
Rotación respecto de un punto O

Rotación de un punto P un ángulo α respecto de un punto O:

Sea un punto $P = (p_x, p_y)$

1. Sea un ángulo α y el centro de giro $O = (o_x, o_y)$
2. Giramos el punto P respecto de O, obteniendo P'
   - Si $\alpha > 0 \rightarrow$ sentido antihorario.
   - Si $\alpha < 0 \rightarrow$ sentido horario.
3. 2.º de Bachillerato
   - Las coordenadas de P':
     $$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o_x \\ o_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

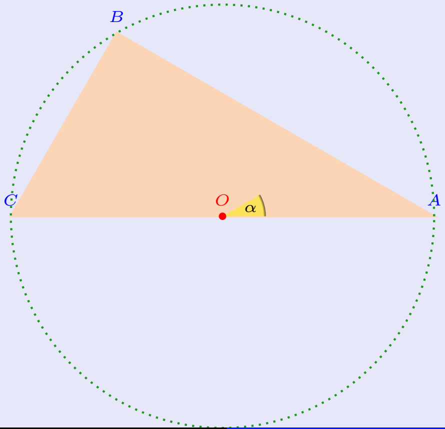
figura



Ejemplo de rotación de un triángulo un giro $\alpha = 30^\circ$ alrededor de su circuncentro O

Aplicamos lo visto anteriormente, obteniendo:

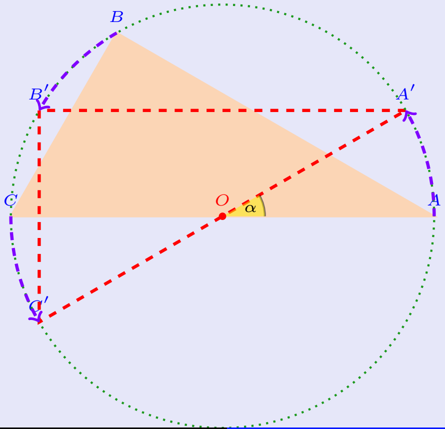
Pulsa para continuar



Ejemplo de rotación de un triángulo un giro $\alpha = 30^\circ$ alrededor de su circuncentro O

Aplicamos lo visto anteriormente, obteniendo:

Pulsa para continuar



Simetría central respecto de un punto O

Dados un punto P y un punto O:

Equivale a un giro de 180° alrededor de O

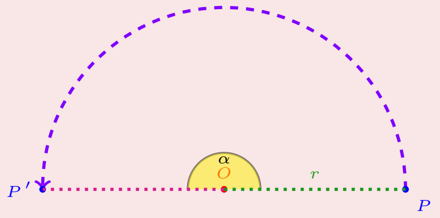
Simetría central respecto de un punto O

Dados un punto P y un punto O:

Equivale a un giro de 180° alrededor de O

1. Basta con realizar dicho giro.

Figura:



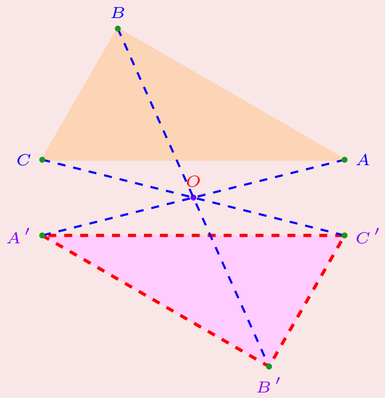
Simetría central respecto de un punto O

Dados un punto P y un punto O:

Equivale a un giro de 180° alrededor de O

1. Basta con realizar dicho giro.
2. Ejemplo de un triángulo:

Figura:



Simetría axial

Dado un punto P y una recta r

Simétrico de P respecto de r

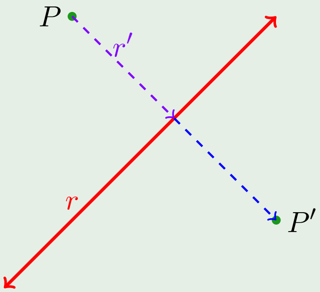
Simetría axial

Dado un punto P y una recta r

Simétrico de P respecto de r

1. El punto P' está sobre $r' \perp r$

figuras



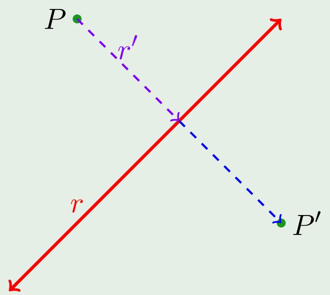
Simetría axial

Dado un punto P y una recta r

Simétrico de P respecto de r

1. El punto P' está sobre $r' \perp r$
2. P y P' equidistan de r

figuras



Ejemplo con una figura:

Simetría de un triángulo $\widehat{PQR}$ respecto de una recta r

Simetría axial:

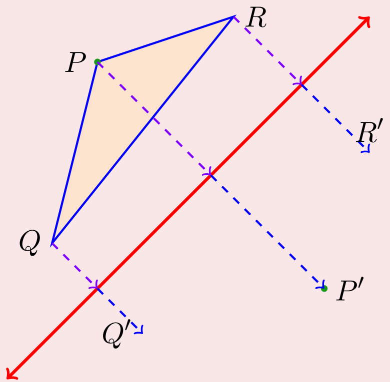
Ejemplo con una figura:

Simetría de un triángulo $\widehat{PQR}$ respecto de una recta r

Simetría axial:

1. Realizamos la simetría de cada vértice.

figura



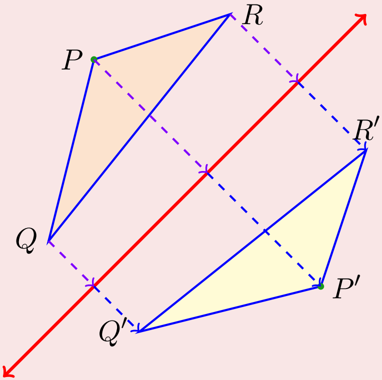
Ejemplo con una figura:

Simetría de un triángulo $\widehat{PQR}$ respecto de una recta r

Simetría axial:

1. Realizamos la simetría de cada vértice.
2. Obtenemos el triángulo.

figura



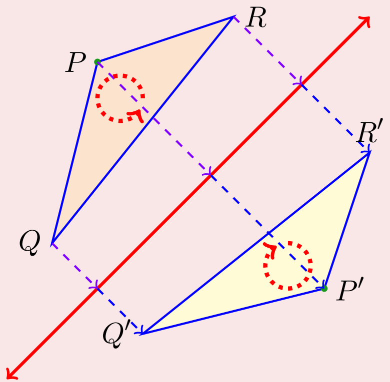
Ejemplo con una figura:

Simetría de un triángulo $\widehat{PQR}$ respecto de una recta r

Simetría axial:

1. Realizamos la simetría de cada vértice.
2. Obtenemos el triángulo.
3. El sentido de giro RPQ se invierte

figura



Homotecia respecto de O por un factor de escala r

Las figuras obtenidas son semejantes

Homotecia con $r = 3$

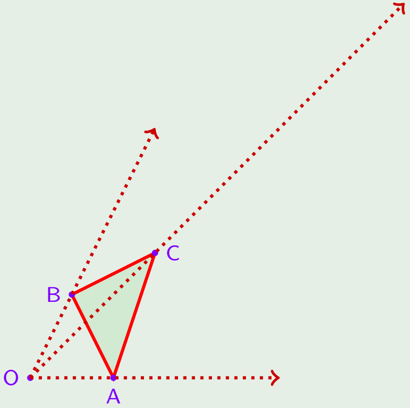
Homotecia respecto de O por un factor de escala r

Las figuras obtenidas son semejantes

Homotecia con $r = 3$

1. Realizamos semirectas $\overline{OV_i}$

figuras



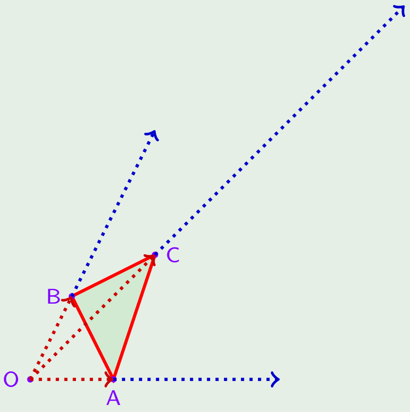
Homotecia respecto de O por un factor de escala r

Las figuras obtenidas son semejantes

Homotecia con $r = 3$

1. Realizamos semirectas $\overline{OV_i}$
2. Se ha de cumplir: (Tales)

figuras



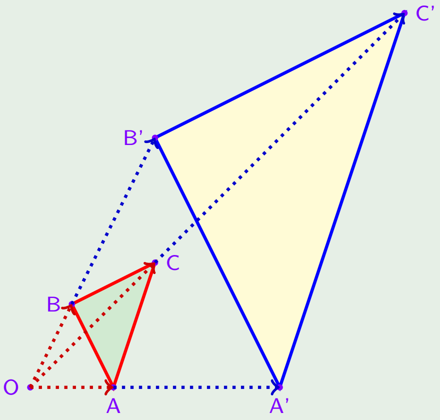
Homotecia respecto de O por un factor de escala r

Las figuras obtenidas son semejantes

Homotecia con $r = 3$

1. Realizamos semirectas $\overline{OV_i}$
2. Se ha de cumplir: (Tales)
   - $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{OC'}{OC} = r = 3$

figuras



Mosaicos:

¿Cómo cubrir el plano con polígonos regulares?

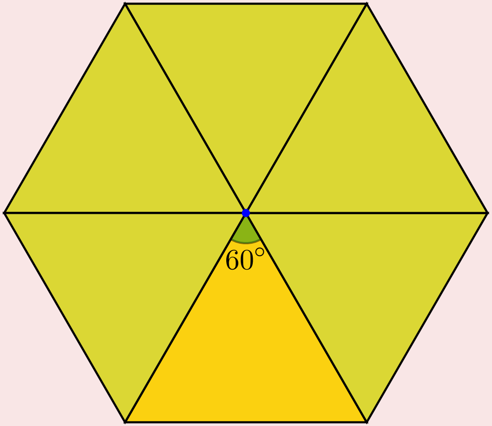
Indicaciones:

Mosaicos:
¿Cómo cubrir el plano con polígonos regulares?

Indicaciones:

1. La suma de los ángulos en un vértice$=360^\circ$

Figuras:



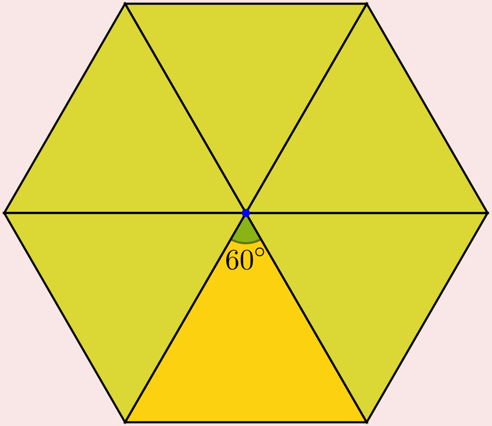
Mosaicos:

¿Cómo cubrir el plano con polígonos regulares?

Indicaciones:

1. La suma de los ángulos en un vértice$=360^\circ$
2. Polígono iguales: $\Rightarrow$

Figuras:

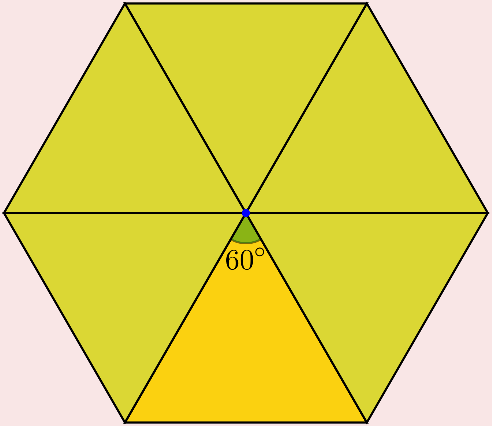


Mosaicos:
¿Cómo cubrir el plano con polígonos regulares?

Indicaciones:

1. La suma de los ángulos en un vértice$=360^\circ$
2. Polígono iguales: $\Rightarrow$
   - Triángulos

Figuras:



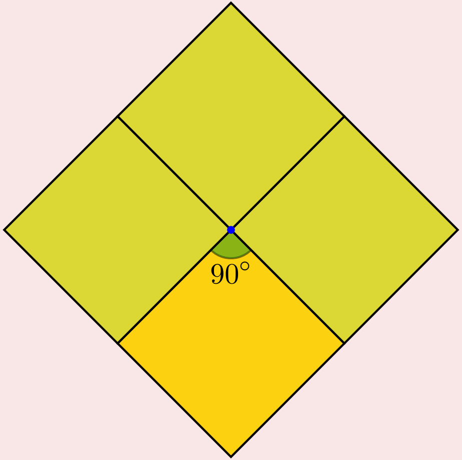
Mosaicos:

¿Cómo cubrir el plano con polígonos regulares?

Indicaciones:

1. La suma de los ángulos en un vértice=360°
2. Polígono iguales: $\Rightarrow$
   - Cuadrados

Figuras:



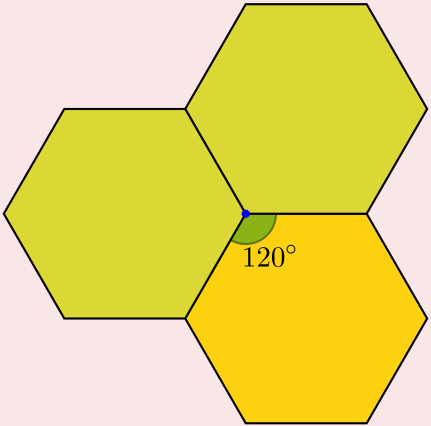
Mosaicos:

¿Cómo cubrir el plano con polígonos regulares?

Indicaciones:

1. La suma de los ángulos en un vértice$=360^\circ$
2. Polígono iguales: $\Rightarrow$
   - Hexágonos

Figuras:



Mosaicos:

¿Cómo cubrir el plano con polígonos regulares?

Indicaciones:

1. La suma de los ángulos en un vértice$=360^\circ$
2. Polígono iguales: $\Rightarrow$
3. Polígonos distintos.

Figuras:

Mosaicos:

¿Cómo cubrir el plano con polígonos regulares?

Indicaciones:

1. La suma de los ángulos en un vértice$=360^{\circ}$
2. Polígono iguales: $\Rightarrow$
3. Polígonos distintos.
   - Hay muchos casos diferentes.

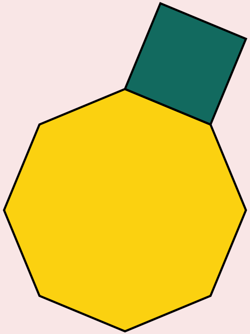
Figuras:

Mosaicos:
¿Cómo cubrir el plano con polígonos regulares?

Indicaciones:

1. La suma de los ángulos en un vértice$=360^\circ$
2. Polígono iguales: $\Rightarrow$
3. Polígonos distintos.
   - Hay muchos casos diferentes.
   - Un ejemplo: Octógono-cuadrado

Figuras:

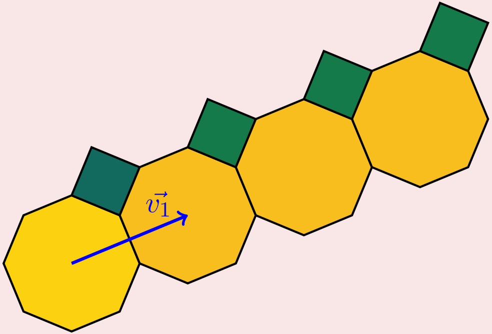


Mosaicos:
¿Cómo cubrir el plano con polígonos regulares?

Indicaciones:

1. La suma de los ángulos en un vértice$=360^\circ$
2. Polígono iguales: $\Rightarrow$
3. Polígonos distintos.
   - Hay muchos casos diferentes.
   - Un ejemplo: Octógono-cuadrado

Figuras:



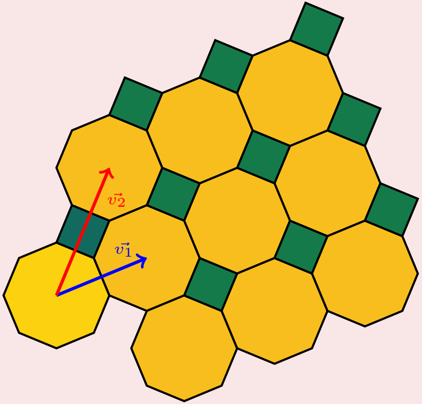
Mosaicos:

¿Cómo cubrir el plano con polígonos regulares?

Indicaciones:

1. La suma de los ángulos en un vértice$=360^\circ$
2. Polígono iguales: $\Rightarrow$
3. Polígonos distintos.
   - Hay muchos casos diferentes.
   - Un ejemplo: Octógono-cuadrado

Figuras:



Cubrir el plano con polígonos irregulares

Polígonos creados a partir de un polígono regular

Creamos el patrón:

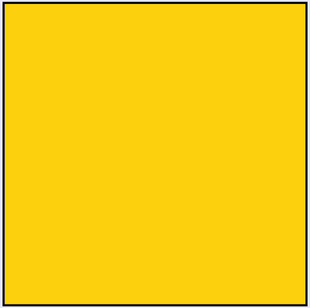
Cubrir el plano con polígonos irregulares

Polígonos creados a partir de un polígono regular

Creamos el patrón:

1. Tomamos un polígono:

Figuras



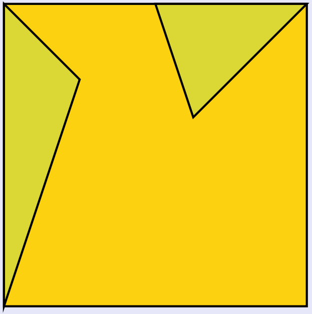
Cubrir el plano con polígonos irregulares

Polígonos creados a partir de un polígono regular

Creamos el patrón:

2. Elegimos alguna zona:

Figuras



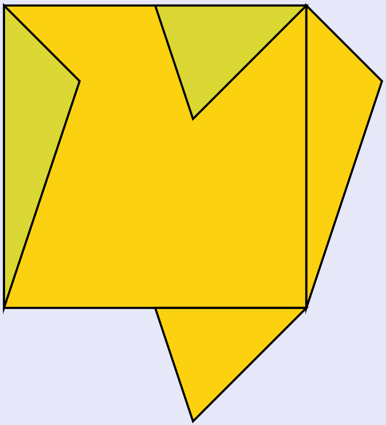
Cubrir el plano con polígonos irregulares

Polígonos creados a partir de un polígono regular

Creamos el patrón:

3. Trasladamos dichas zonas

Figuras



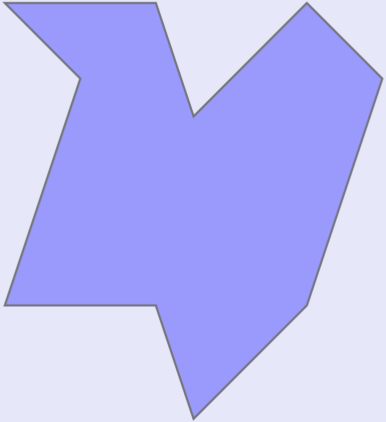
Cubrir el plano con polígonos irregulares

Polígonos creados a partir de un polígono regular

Creamos el patrón:

4. Obtenemos el patrón de traslación

Figuras



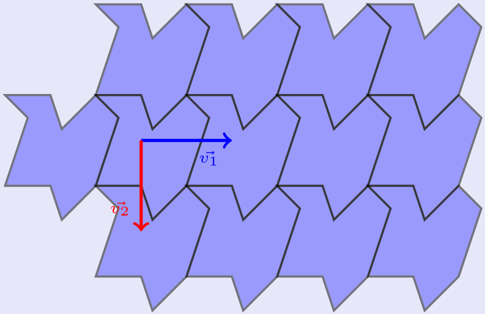
Cubrir el plano con polígonos irregulares

Polígonos creados a partir de un polígono regular

Creamos el patrón:

5. Realizamos las traslaciones

Figuras



Ejemplos de algunas figuras de obras de Escher

Un par de ejemplos sencillos

Triángulo de Penrose

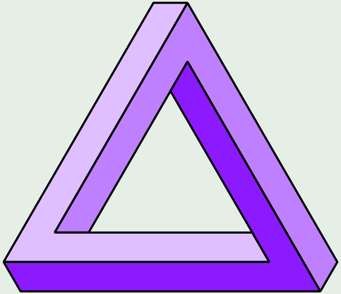


Figura 1: Autor:Julien Cretel

Brick de Escher

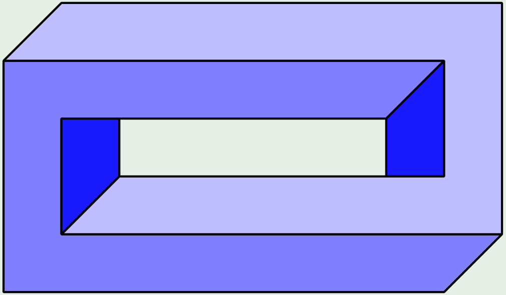


Figura 2: Autor:Julien Cretel

La banda de Moebius

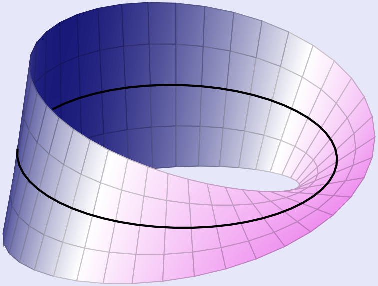


Figura 3: Banda de Moebius

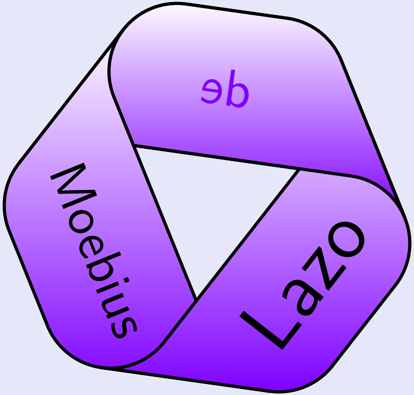


Figura 4: Autores: Jacques Duma y Gerard Tisseau