Logistička funkcija

Šime Šuljić, Pazin

> *Svijet bi bio bolje mjesto kad bi svakom studentu dali džepni kalkulator i ohrabrili ga da se igra logističkim jednadžbama.*
>
> Robert May, biolog

Svi koji su proučavali prirodne znanosti svjesni su koliko je diferencijalni račun snažno oruđe. Tek uz pomoć diferencijalnog računa moguće je dobro objasniti mnoge prirodne pojave, a s diferencijalnim jednadžbama opisati i vrlo složene procese. Nastava elementarne matematike je u neku ruku pretvorena u pripremu za razumijevanje i ovladavanje diferencijalnog računa, koji će onda objasniti mnoge pojave. Učenje matematike podređeno je samoj sebi, a primjene se odgađaju za višu matematiku. Mora li tome biti i dalje tako, kada znamo da su posljednjih desetljeća otkriveni jednostavni matematički modeli, koji objašnjavaju vrlo složene prirodne, tehničke pa čak i društvene procese? U drugom se razredu srednje škole proučavaju kvadratna, eksponencijalna i logaritamska funkcija. Odmah ćemo pomisliti kako se uvodna opaska ne odnosi na te funkcije, jer zaista nije teško pronaći primjere na koje se može primijeniti te nelinearne funkcije u drugim područjima znanosti i u svijetu koji nas okružuje. To je točno, ali ovdje želim skrenuti pozornost da se elementarna matematika može upotrijebiti za modeliranje složenih sustava u zoologiji, odnosno ekologiji, ma koliko to djelovalo nevjerojatno! Dovoljno je poznavati pojam funkcije i znati nacrtati graf kvadratne funkcije.

Ljude je odavna zaokupljao problem godišnjih kretanja brojnosti pojedinih životinjskih vrsta, a naročito insekata. U godinama s povoljnijim uvjetima za neku vrstu njihova bi se brojnost povećala, a u oskudnim godinama smanjivala. Ali više je upadalo u oči to što vrste imaju neki svoj unutarnji ritam promjene brojnosti koji se pravilno izmjenjuje gotovo zanemarujući vanjske uvjete. Lako je uočiti da se neke vrste insekata pojedinih godina jako razmnože, a onda naredne godine nema više tolike najezde. Kod nekih vrsta plimni val dolazi u pravilnim ciklusima svake treće, četvrte ili čak nakon više godina. U pojedinim krajevima svijeta već znaju kada mogu očekivati najezdu skakavaca koja sve opustoši. Kako matematički opisati ovo populacijsko variranje iz godine u godinu pojedine vrste? Svakako bi broj jedinki x_{n+1} u sljedećoj godini trebao ovisiti o broju roditelja x_n u prethodnoj godini. Kako ta dva broja neće biti identična, mogli bismo tu promjenu opisati jednostavnom formulom:

$$x_{n+1} = rx_n,$$

gdje parametar r ovisi o biološkoj vrsti i području na kojem obitava. Ako je broj r veći od jedan, doći će do povećanja populacije, odnosno smanjenja ako je broj r manji od jedan. No, ova nas jednostavna linearna forma, koja ustvari predstavlja eksponencijalan rast ili pad, vodi k neograničenom rastu ili izumiranju vrste, dakle onome što ne opisuje uobičajeno kretanje brojnosti vrste. Ako početna populacija broji 100 000 jedinki, a parametar je $r = 1.2$, sljedeće generacije će predstavljati neograničen niz:

$$120000, 121000, 144000, 172800, 207360.$$

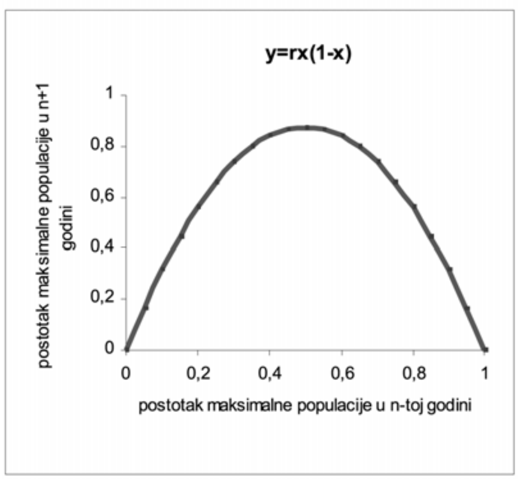
Ako je parametar $r = 0.8$, niz

$$80000, 64000, 51200, 40960, 32760$$

govori da populacija izumire. Ekolozi su bili svjesni da moraju posegnuti za boljim modelom. Ukupna populacija neće ovisiti samo o broju roditelja u prethodnoj generaciji, već i o raspoloživoj hrani na danom području. Što populacija bude veća, hrane će biti manje pa će mnoge jedinke izumrijeti. Ekolozi su s 1 označili maksimalni broj jedinki neke vrste koji može živjeti na određenom području, a x_n predstavlja postotak od tog maksimalnog broja n-te godine. Ovisnost o hrani i drugim uvjetima izrazili su faktorom $1 - x_n$, stanovitim "brojem slobodnih mjesta". Ovaj korektivni faktor je to manji što je x_n veći i obrnuto. Najjednostavnija formula koja bi mogla opisivati populacijske promjene iz godine u godinu bila bi:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

Inačice ovakve jednadžbe ekolozi su koristili još sredinom prošlog stoljeća posudivši ih od fizičara. Nazvane su logističke jednadžbe razlike. Oslobodimo li se zagrada, dobivamo izraz $x_{n+1} = rx_n - rx_n^2$. Ovaj kvadratni izraz možemo shvatiti kao kvadratnu funkciju, gdje brojnost vrste u sljedećoj godini zavisi o broju jedinki u prethodnoj godini, što bi se moglo prikazati grafom (slika 1.).



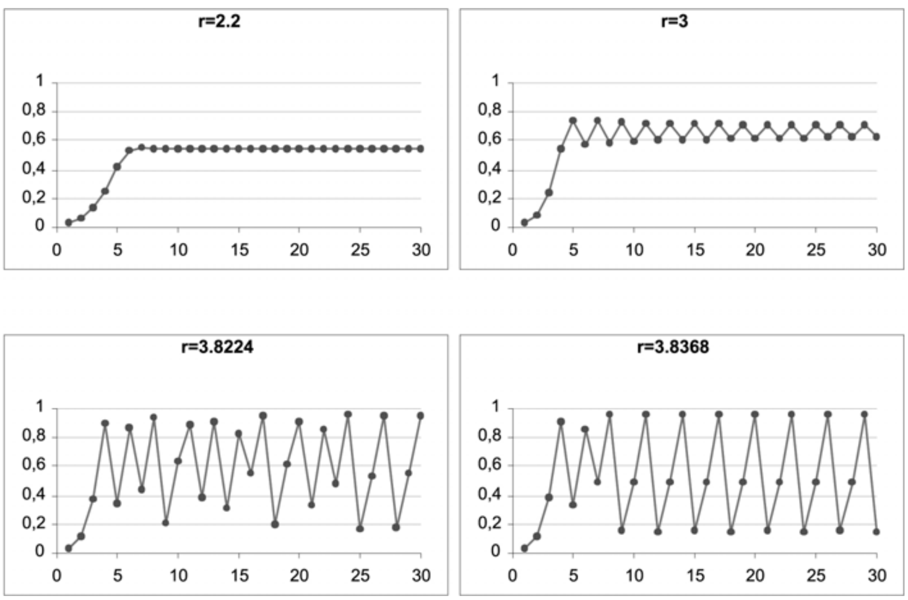
Slika 1.

Međutim, taj nam graf ne prikazuje sudbinu populacije kroz vrijeme. Da bismo to prikazali, uzmimo neki proizvoljni parametar, na primjer $r = 2.2$ i početnu vrijednost populacije od recimo

$x_0 = 0.03$. Uz pomoć džepnog kalkulatora računamo:

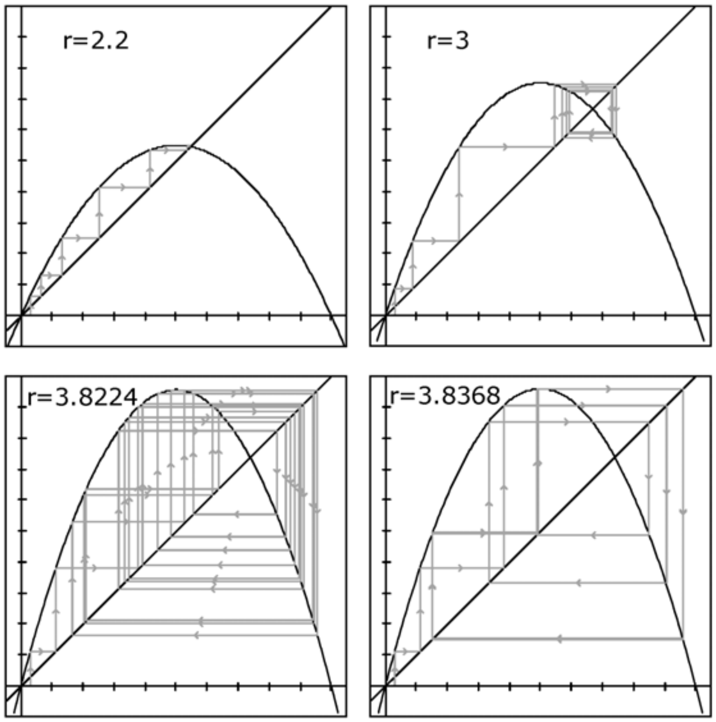
$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0.03,\\
x_1 &= 2.2 \cdot 0.03(1-0.03) = 0.0640,\\
x_2 &= 2.2 \cdot 0.0640(1-0.0640) = 0.1318,\\
x_3 &= 2.2 \cdot 0.1318(1-0.1318) = 0.2518,\\
x_4 &= 2.2 \cdot 0.2518(1-0.2518) = 0.4145,\\
x_5 &= 2.2 \cdot 0.4145(1-0.4145) = 0.5339,\\
x_6 &= 2.2 \cdot 0.5339(1-0.5339) = 0.5475,\\
x_7 &= 2.2 \cdot 0.5475(1-0.5475) = 0.5450,\\
x_8 &= 2.2 \cdot 0.5450(1-0.5450) = 0.5455,\\
x_9 &= 2.2 \cdot 0.5455(1-0.5455) = 0.5454,\\
x_{10} &= 2.2 \cdot 0.5454(1-0.5454) = 0.5455.
\end{aligned}
$$

Vidimo da zamišljenu populaciju prati nagli porast u početnim godinama, a da se zatim postotak stabilizira i blago varira oko vrijednosti 0.54. Lako se možemo uvjeriti da bi ova stabilizacija na istom nivou uslijedila i da uzmemo početnu vrijednost 0.5 ili 0.9. Ovaj konkretni model opisuje čestu pojavu u prirodi, a to je da na određenom području obitava stalan broj jedinki neke vrste ako nema značajnijih vanjskih poremećaja. Dobivene podatke prikažimo grafički tako da na apscisu nanesemo redni broj generacije, a na os ordinatu broj jedinki u postocima od mogućeg maksimalnog broja. Napravimo takve grafikone i za vrijednosti parametra r od 3, 3.8224 i 3.8368, a neka početna vrijednost populacije bude uvijek 0.03.



Slika 2.

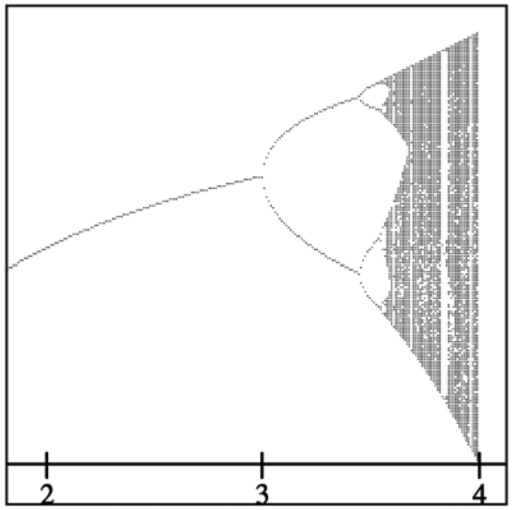
Na drugoj sličici u nizu vidimo da se nakon početnog rasta dvije vrijednosti stalno izmjenjuju. I takav dvogodišnji ciklus postoji u prirodi za neke vrste. Ako je vrijednost parametra $r = 3.8224$ nema nikakve pravilnosti u promjeni populacije iz godine u godinu. Ovaj proces mogli bismo nazvati kaotičnim. Najzanimljivije je u svemu da ako sad parametar r neznatno povećamo na 3.8368 dolazi ponovno do pravilne izmjene vrijednosti svake tri godine. Povećavajući dalje parametar došlo bi ponovno do nepravilne, kaotične promjene populacije. Ispočetka su biolozi odbacivali ovakve "nepredvidive" podatke kakvi se javljaju pri malim promjenama parametra r, smatrajući da je došlo do greške u proračunima. No, nije se radilo ni o kakvoj greški. Riječ je o sustavu koji opisuje deterministički kaos, kada kaže da male promjene početnih uvjeta uzrokuju dramatične promjene u rezultatima. To slikovito opisuje čuveni leptirov efekt, koji kaže da zamah krilima leptira u Pekingu izaziva oluju u Parizu.



Slika 3.

Iako su točkasti grafikoni na prikazanim slikama vrlo zorni, skloni smo ih tretirati kao statističke, a ne "čisto matematičke". Srećom postoji i vrlo zgodno "čisto matematičko" rješenje prikaza kretanja brojnosti populacije na paraboli $y = rx(1-x)$. Prisjetimo se najprije kako očitavamo pojedinu vrijednost funkcije na njenom grafu u koordinatnom sustavu. Krenemo od odabrane vrijednosti x okomito na apscisu u smjeru grafa funkcije i kada dođemo do grafa, skrećemo pod pravim kutom prema ordinati na kojoj očitamo pripadajući y tj. vrijednost funkcije. Za praćenje promjena populacije kroz vrijeme "čitanje" grafa ćemo donekle izmijeniti. Grafu kvadratne funkcije dodajmo pravac $y = x$. Na jednak način krenemo od proizvoljnog x, ali na paraboli $y = rx(1-x)$ više ne skrećemo k ordinati, već prema pravcu $y = x$ na kojem zrcalimo našu putanju uputivši je ponovno prema paraboli i postupak po volji nastavljamo. Time zapravo svaku dobivenu vrijednost funkcije pretvaramo ponovno u argument. Iako sam postupak nije neka novina u matematici, njegova primjena na logističku funkciju je vrlo korisna, jer samo jedan pogled na sliku daje kvalitetnu informaciju o kretanju promatrane populacije. Takav graf može biti i vrlo zabavan ako ga promatramo kako nastaje na zaslonu računala. Na slici 3. možemo vidjeti prije opisane primjere u novom grafičkom prikazu.

Proučavanje insekata dovelo nas je tako na područje fizikalne teorije determinističkog kaosa. Prije nego napustimo našu igru modeliranja eko sustava, bilo bi dobro razumjeti još jednu poznatu sliku, odnosno grafikon te znanstvene discipline. Riječ je o bifurkacijskom dijagramu. Primijetili smo da se za pojedine vrijednosti parametra r sustav stabilizira i poprima jednu, dvije ili više uvijek iste vrijednosti brojnosti populacije x. Za neke vrijednosti parametra r sustav postaje nestabilan i ima mnoštvo različitih vrijednosti x. Nanesemo li na apscisu vrijednosti parametra r, a na ordinatu vrijednosti brojnosti populacije x $(0 < x < 1)$, dobivamo poznati bifurkacijski dijagram (slika 4.).



Slika 4.

Dodatak. Za proučavanje logističkih jednadžbi sasvim je dovoljan najobičniji kalkulator. Međutim, mnogo je ugodnije, brže i više se može različitih modela istražiti uporabom osobnog računala. U tu svrhu potrebno je posegnuti za određenim programima.

- **Microsoft Excel.** Ovaj alat za tablični proračun i prikaz grafova dostupan je gotovo na svim računalima. Na raspolaganju ima bogatu kolekciju matematičkih funkcija, a može izračunavati i crtati rekurzivno zadane jednadžbe. U budućnosti će mnogim učenicima upravo taj program predstavljati poslovno okruženje. Stoga se neminovno nameće zaključak da ovaj program mora naći svoje mjesto u nastavi matematike. Pomoću ovog programa je rađen proračun u članku, slika 1. i slika 2. Ovdje ne bih opisivao postupak izrade grafikona, ali sam na Internet postavio dokument, koji se može pogledati ili preuzeti. Naravno, interaktivan je. (`http://www.gssjd.hr/matematika/zanimljiva/logisticka/tablica.xls`)
- **Winfeed** je specijaliziran program za generiranje fraktala i drugih slika determimističkog kaosa, matematičara Richarda Parrisa (`http://math.exeter.edu/rparris/`). Slike 3. i 4.
- **Javascript** "programčić" koji se izvršava kroz web preglednik dostupan na URL adresi `http://www.gssjd.hr/matematika/zanimljiva/logisticka/jscript.htm` izračunava željeni broj koraka za upisani parametar r i početnu vrijednost x.
- **Java aplet** demonstrira grafičke prikaze poput onih na slikama 2. i 3., a dozvoljava mijenjanje vrijednosti parametra r i početne vrijednosti x. Zabavno!
(`http://www.gssjd.hr/matematika/zanimljiva/logisticka/aplet.htm`)

Pitanja. Korištenjem nekog od gornjih alata pokušajte naći odgovore na sljedeća pitanja:

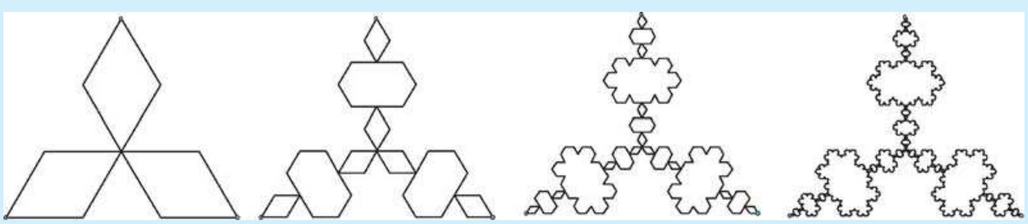
1. Do koje vrijednosti parametra r populacija teži izumiranju?
2. Koja je maksimalna vrijednost parametra r? Zašto?
3. Do koje vrijednosti parametra r se populacija stabilizira na uvijek istoj brojnosti?
4. Od koje do koje vrijednosti parametra r se populacija stabilizira na dvije naizmjenične brojnosti?
5. S kojom približnom vrijednošću parametra r nastupa kaotično stanje? Javljaju li se stabilna stanja nakon te vrijednosti parametra r?
6. Ako je sustav stabilan, ovisi li broj jedinki u nekoj daljoj godini o početnom broju x?
7. Ako je sustav kaotičan, ovisi li broj jedinki u nekoj daljoj godini o početnom broju x?

Literatura

[1] Lopac, Vjera: *Fizika kaosa — nova revolucija u znanosti (II)*, Matematičko-fizički list, 1/XLIII 1992./1993.
[2] Iovinelli, Robert: *Chaotic Behavior in the Classroom*, Mathematics Teacher, 2/93, 2000.
[3] Gleick, James: *Kaos — rađanje nove znanosti*, Izvori, Zagreb 2000.
[4] Wattenberg, Frank: Longterm Behavior, `www.math.montana.edu/frankw/ccp/calculus/discdynm/logistic/learn.htm`
[5] May, Robert: *Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics*, Nature, Vol. 261, p. 459, June 10, 1976, `http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5/Sept01/May/May_contents.html`

ANTIPAHULJICA

Vidjeli smo kako od jednakostraničnog trokuta nastaje Kochova pahuljica. Zamislite da umjesto što konstrukciju provodimo "prema van", to činimo prema "unutra". Tako ćemo dobiti antipahuljicu. I njezina je duljina beskonačna, a površina konačna. Kolika?



Na to pitanje nije teško odgovoriti. Naime, pojedini dio ravnine koji kod Kochove pahulje dodajemo sukladan je onom koji kod antipahulje oduzimamo. Zato antipahuljica gubi onaj dio površine kojega Kochova pahuljica dobiva. Kako je površina prve $\frac{8}{5}$ *polaznog jednakostraničnog trokuta, površina druge je jednaka* $\frac{2}{5}$ *površine originalnog trokuta.*