Neue Aufgabe | Drehen | Nicht drehen | - Schritt = 1 +

Die Punkte $A(0,-3,-5), B(-5,-3,-3)$ und $C(2,-4,-5)$ liegen in der Ebene E!

a) Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene E

☐ Lsg

Die Grafik zeigt den Vektor $\vec{a}$ als Stützvektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Stützvektor: $\vec{a}$

Spannvektoren: $\vec{r_1} = \vec{b} - \vec{a}, \quad \vec{r_2} = \vec{c} - \vec{a}$

$$\vec{r_1} = \begin{pmatrix} -5-0 \\ -3-(-3) \\ -3-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r_2} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -4-(-3) \\ -5-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Punkte $P_1(-1,-2,3)$ und $P_2(0,3,7)$ liegen auf der Geraden g

b) Bestimmen Sie eine Parameterform der Geraden g!

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{p_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Stützvektor: $\vec{p_1}$

Richtungsvektor: $\vec{p_2} - \vec{p_1}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ansatz:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Big| - \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Als lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{|l|l} -5\lambda + 2\mu - 1\nu = -1 & (1) \\ 0\lambda - 1\mu - 5\nu = 1 & (2) \\ 2\lambda + 0\mu - 4\nu = 8 & (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|} (1)' = 20 \cdot (1) & -100\lambda + 40\mu - 20\nu = -20 \\ (2)' = 4 \cdot (2) & -4\mu - 20\nu = 4 \\ (3)' = 5 \cdot (3) & 10\lambda \quad - 20\nu = 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|} (1)'' = (2)' - (1)' & 100\lambda - 44\mu = 24 \\ (2)'' = (3)' - (1)' & 110\lambda - 40\mu = 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|} (1)''' = 10 \cdot (1)'' & 1000\lambda - 440\mu = 240 \\ (2)''' = 11 \cdot (2)'' & 1210\lambda - 440\mu = 660 \end{array}$$

$$(2)''' - (1)''': \quad 210\lambda = 420 \quad | :210$$

$$\boxed{\lambda = 2}$$

Einsetzen in $(1)''$

$$200 - 44\mu = 24 \quad | -200$$

$$-44\mu = -176 \quad | :(-44)$$

$$\boxed{\mu = 4}$$

Einsetzen in (1)

$$-5\lambda + 2\mu - 1\nu = -1 \quad \Big| \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \mu = 4 \end{array}$$

$$-10 + 8 - 1\nu = -1$$

$$-2 - 1\nu = -1 \quad | +2$$

$$-1\nu = 1 \quad | :(-1)$$

$$\boxed{\nu = -1}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Big| \ \nu = -1$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 -1 \\ -2 -5 \\ 3 -4 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Big| \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \mu = 4 \end{array}$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 10 + 8 \\ -3 - 4 \\ -5 \ \ 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$